Elektrische Messtechnik

Vorlesung 6

Prof. Dr. Peter Weber

Wintersemester 25/26

Im Studiengang Elektro- und Informationstechnik (B.Eng.)

Spielregeln in der Präsenz-Vorlesung

- Besuch der Vorlesungen erhöht die Chance auf eine gute Note bzw. Klausurbestehen
- Ihre Fragen und Anmerkungen gehen vor - Unterbrechen Sie mich gerne, wenn ich Ihre Meldung übersehen sollte
- Keine „Side Meetings“ in der Vorlesung - Paralleldiskussionen zu zweit verbreiten zu viel Unruhe
  - ➔ Fragen, Ideen oder Anmerkungen bitte immer in die große Runde – keine Hemmungen
  - ➔ Es gibt keine dummen Fragen - Niemand wird für eine Wortmeldung „augebuht“!
- Pünktlich erscheinen - Später hereintröpfelnde Teilnehmer verbreiten Unruhe
- Verlassen der Vorlesung bitte nur zur Pause oder zum Ende (logischerweise ausgenommen Toilettengänge)
- Am Ende der Vorlesung meinen letzten Satz vor dem Aufstehen abwarten.
- Telefone auf „leise“
- Ich wünsche mir immer Ihr Feedback – sofort in der Vorlesung oder gerne auch z.B. per mail

Organisation

Vorlesung:

Montag 08:15 h bis 11:30 h Raum: Hung C-101

Start 13.07.2025 - Ende 26.01.2026

Labor (Herr Michalik):

Montag 11:45 h bis 15:45 h Raum: 8-205

Terminorganisation bei Herrn Michalik

CampUAS – Vorlesung (P. Weber):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4525

Weber: Elektrische Messtechnik - WiSe 25/26

Enrollment Key: alessandrovolta

CampUAS – Labor (R. Michalik):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4433

Michalik: Labor Elektrische Messtechnik - WiSe 25

Enrollment Key: MTLAB-WiSe2025

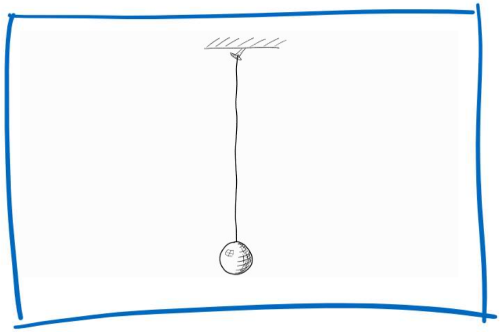
Wichtig: Vorbesprechung Labor – Termin Kommt von Herrn Michalik

Bitte unbedingt in beiden Kursen einschreiben (auch bei Herrn Michalik).

Sie verpassen sonst wichtige Infos bzw. werden bei der Laborterminvergabe nicht berücksichtigt

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Schwingung



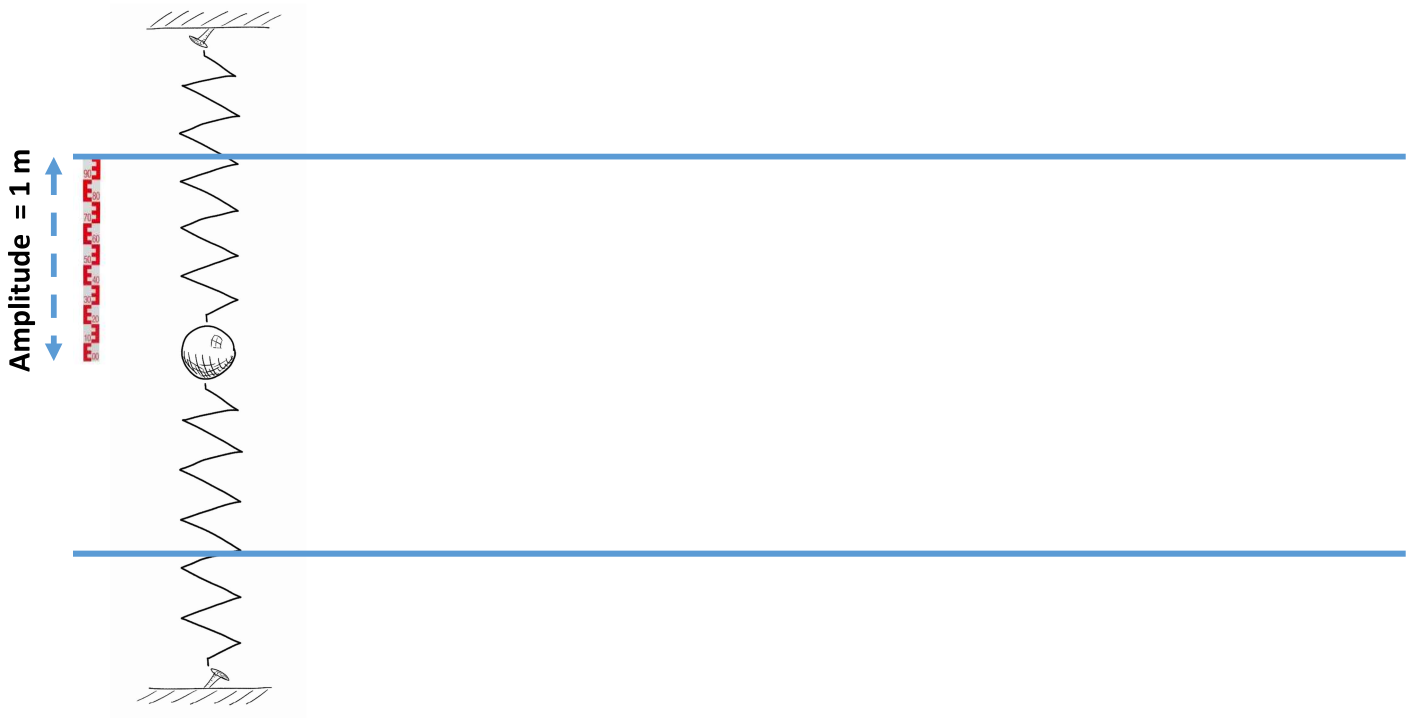
Periodendauer

Amplitude

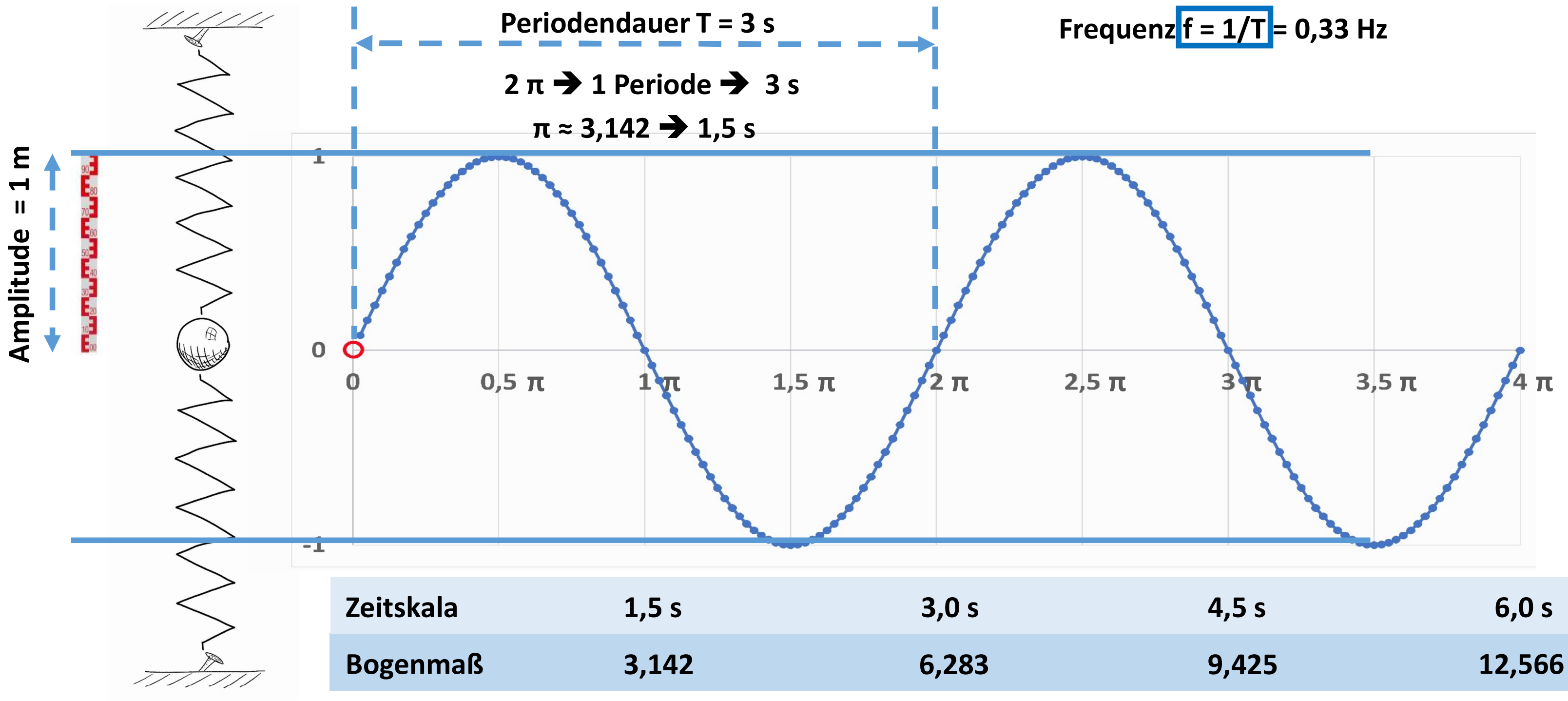
Frequenz

Mathematisches Modell:
Harmonischer Oszillator
Sinusschwingung

Charakterisierung periodischer Vorgänge



Charakterisierung periodischer Vorgänge

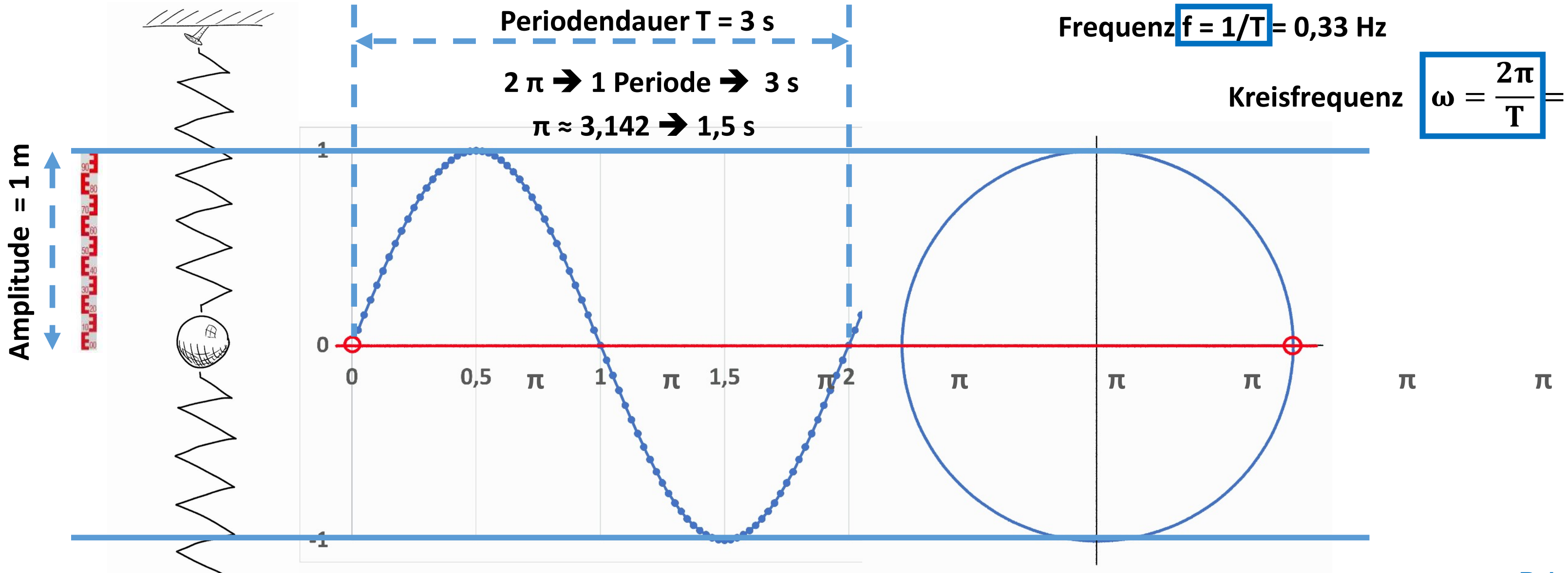


Zeitskala	1,5 s	3,0 s	4,5 s	6,0 s
Bogenmaß	3,142	6,283	9,425	12,566

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Frequenz $\boxed{f = 1/T} = 0{,}33\ \text{Hz}$

Kreisfrequenz $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\pi}{3\ s} = 2{,}1\ \frac{1}{s}$



Zeitskala	1,5 s	3,0 s
Bogenmaß	3,142	6,283

φ: Relative Phasenverschiebung zu einem definierten Zeitpunkt t=0

$$\boxed{f(t) = \hat{F} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)}$$

Remember Waves?

ω is the **angular frequency**, i.e. angle (radian measure) per time. It is the characteristic quantity for the oscillation in **time-domain**.
k is the **wave number**, i.e. angle (radian measure) per distance. It is the characteristic quantity for the oscillation in **space-domain**.

The relation between ω and k is a constant and determined by the coupling of the oscillators. This constant is the velocity of propagation of a wave in a particular medium: c

$$A(z,t) = A_0 \sin\left(k \cdot z - \omega \cdot t\right)$$

time-domain

Angular Frequency

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

Period and Frequency

$$T = \frac{1}{f}$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{f}{\nu} = \frac{\omega}{k}$$

space-domain

Angular Wave Number

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \cdot \nu$$

Wavelength and Wave Number

$$\lambda = \frac{1}{\nu}$$

Charakterisierung periodischer Vorgänge

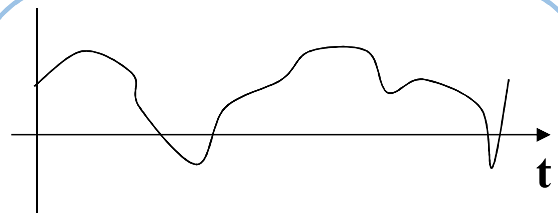
Zwei Arten zeitabhängiger Größen
- beliebig zeitlich veränderlich
- periodisch zeitlich veränderlich

Für eine periodische zeitabhängige Größe X(t) muss gelten:

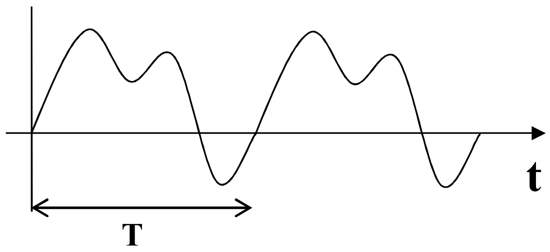
$X(t) = X(t + T)$

T: Periodendauer [T] = s
f: Frequenz [f] = Hz = 1/s (Hertz)

$f = 1 / T$



Beliebige zeitabhängige Größe



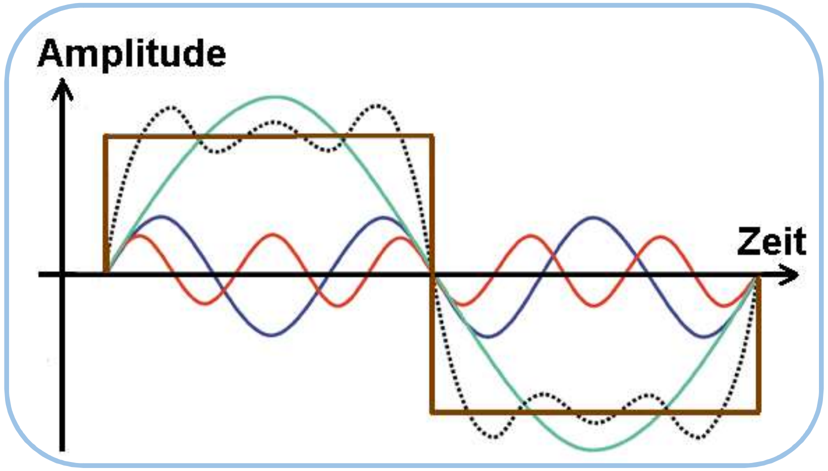
Periodische zeitabhängige Größe

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Mathematische Grundlage:

Fourier Reihenenwicklung

Jede periodische Funktion kann durch die Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz und Amplitude und einem Gleichanteil (Konstante) dargestellt werden. (Fourier-Reihen-Entwicklung)



$$\mathrm{X}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)$$

Praktisch bedeutet das:

Ist die Antwort eines Systems auf eine Sinusschwingung bekannt, so kennen wir die Antwort des Systems auf beliebige periodische Funktionen.

Mit anderen Worten: Es reicht zunächst einmal aus, das wir uns mit dem Spezialfall der Sinusschwingung beschäftigen!

Und für lineare Systeme gilt:
Speise ich ein Input-Signal mit der Frequenz f_0 ein, so kann jedes an beliebiger Stelle abgegriffenen Output-Signal auch nur die Frequenz f_0 haben.

Charakterisierung periodischer Vorgänge

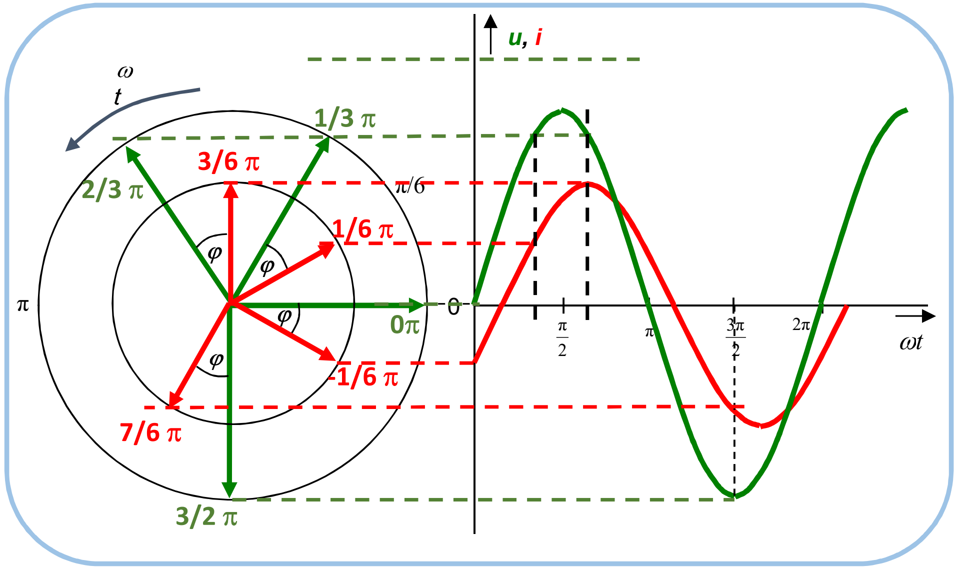
Zeigerdarstellung

Analogie zwischen Schwingung und Kreisbewegung

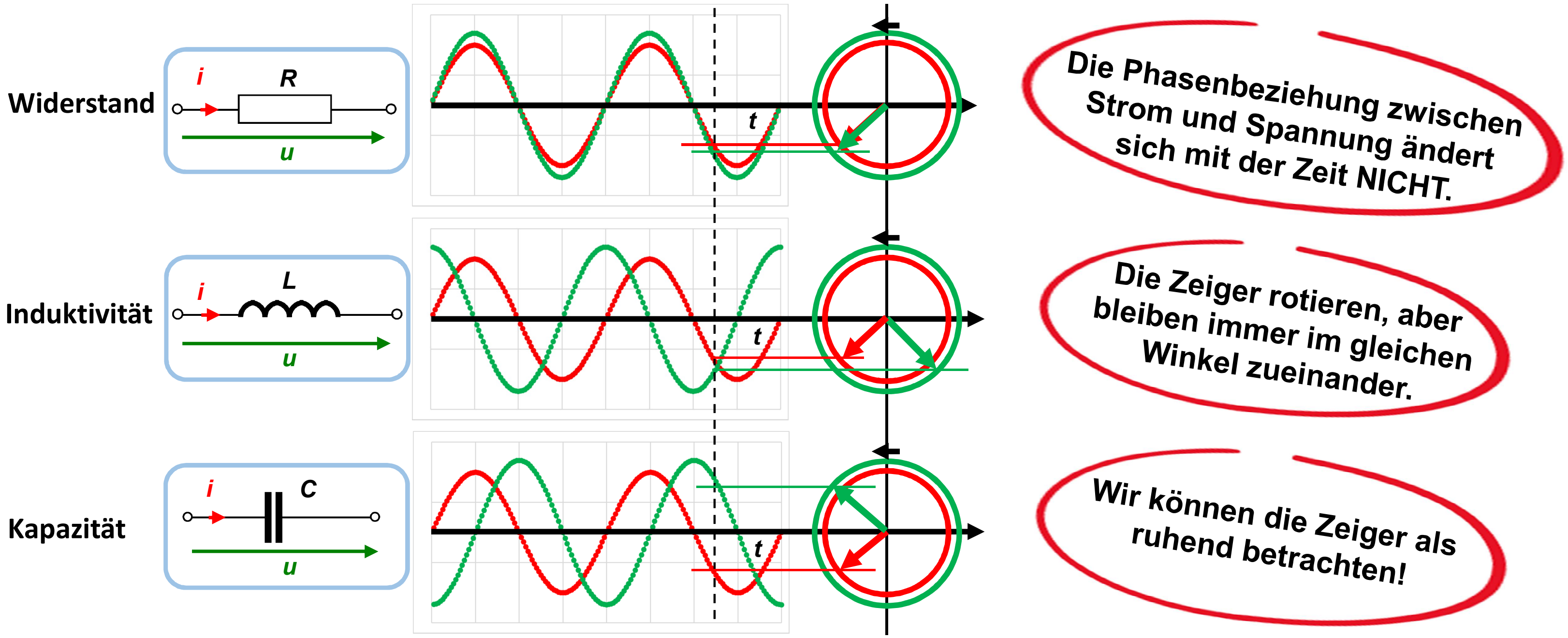
- Eine Schwingung kann als Projektion einer Kreisbewegung betrachtet werden.
- Alle Wechselgrößen einer Schaltung haben die gleiche Frequenz, aber eine gewisse Phasenlage φ zueinander.

Das bedeutet:

- Jede Wechselgröße kann durch einen rotierenden Zeiger dargestellt werden
- Alle Zeiger rotieren mit gleicher Frequenz
- Die Lage der Zeiger zueinander bleibt immer gleich



Charakterisierung periodischer Vorgänge



Charakterisierung periodischer Vorgänge

Zeigerdarstellung

- Da die Frequenz aller Zeiger gleich ist, bleibt die Lage der Zeiger zueinander gleich. Damit reicht es aus, ruhende Zeiger zu betrachten.
- Die Länge der Zeiger entspricht dem Scheitelwert bzw. bei Division mit dem Effektivwert.
- Zeiger drehen sich entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn (mathematisch positiv), d.h., der Stromzeiger im Bild eilt dem Spannungszeiger nach.
- Der Phasenwinkel ergibt sich aus
- Das Symbol für einen Zeiger ist der unterstrichene Großbuchstabe:
- Zeigerbilder ergeben sich aus der geometrischen Addition der Zeiger und durch die Lage von Strom- und Spannungszeigern zueinander, was wiederum durch die Art der Bauelemente vorgegeben wird.

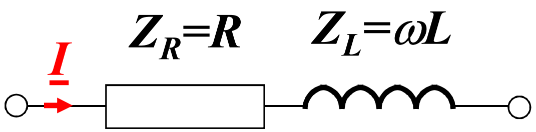
Charakterisierung periodischer Vorgänge

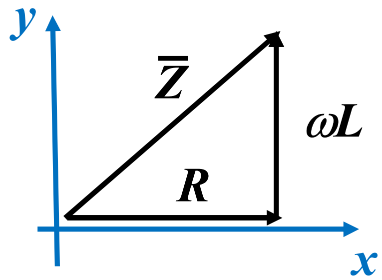
FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Zeiger-Darstellung in der reellen 2-dim. Zahlenebbene stößt auf Probleme

Impedanz $\vec{Z} = Z_R \cdot \overrightarrow{e_x} + Z_L \cdot \overrightarrow{e_y}$

$\vec{Z} = R \cdot \overrightarrow{e_x} + \omega L \cdot \overrightarrow{e_y}$



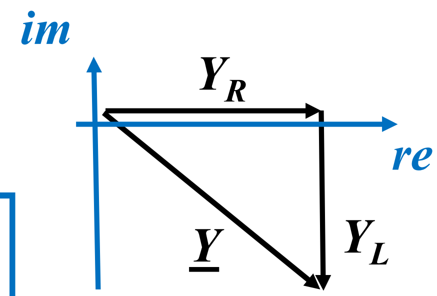


Admittanz $\vec{Y} = \frac{1}{\boxed{\vec{Z}}}$

Division durch einen Vektor ist in der Matematik nicht möglich!!!

Aber in der komplexen Zahlenebene ist die Division möglich:

Impedanz $\underline{Z} = R + j \cdot \omega L$



Erweitern zur 3. binomischen Formel

Admittanz $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j \cdot \omega L} = \frac{(R - j \cdot \omega L)}{(R + j \cdot \omega L)(R - j \cdot \omega L)} = \underbrace{\boxed{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{Y_R} - j \underbrace{\boxed{\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{Y_L}$

Charakterisierung periodischer Vorgänge

FAZIT

Wir gehen hier davon aus,

dass die Größen Strom und Spannung

periodisch und (in der Regel) sinusförmig sind

Sie werden eindeutig bestimmt durch

eine Amplitude, eine (Kreis-) Frequenz und eine Phasenlage zueinander.

Und: In linearen Netzwerken ist die Frequenz für alle Größen gleich.

Bei der Analyse von Wechselstromnetzwerken

werden die relevanten Größen

durch Zeiger in der komplexen Zahlenebene dargestellt.

Die Länge der Zeiger entspricht der Amplitude der jeweiligen Größe.

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Mittelwert (arithmetisches Mittel)
einer zeitlich sich ändernden Größe zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2:

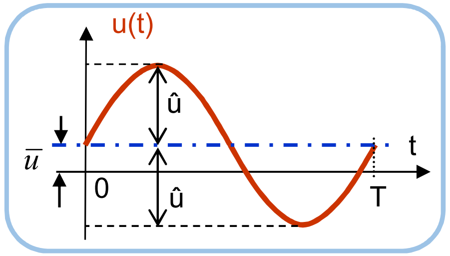
$$\bar{u} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt$$

Periodische Größen betrachten wir über eine oder mehrere Periodendauern T

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\boldsymbol{U_o + \hat{u} \cos(\omega t)}) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^T U_o dt + \int_0^T \hat{u} \cos(\omega t) dt \right)$$

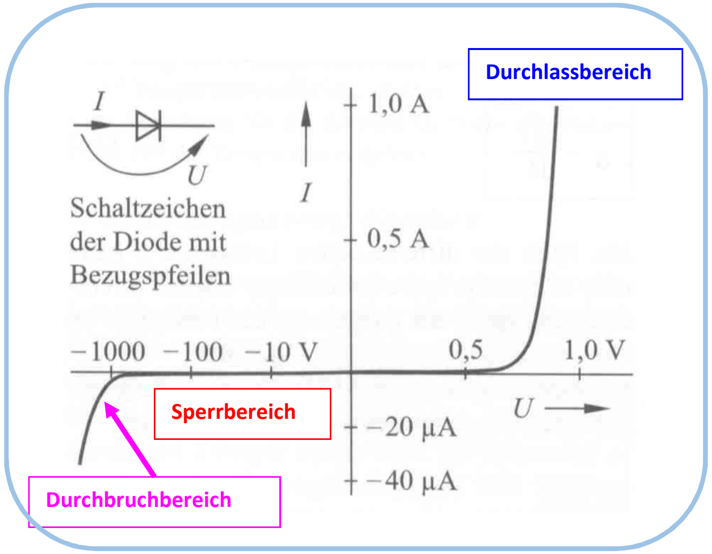
$$= U_o - \hat{u} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \Big|_o^T = U_o - \hat{u} \frac{1}{\omega} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t \right) \Bigg|_o^T = U_o$$

Mittelwert über die Periodendauer bei einer sich zeitlich ändernden Größe ist der Gleichanteil der Wechselgröße



Charakterisierung periodischer Vorgänge

Exkurs: Diode und Gleichrichtung
Nichtlineares Bauelement



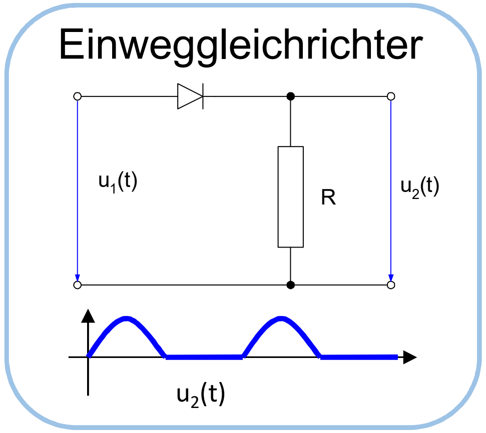
Durchlassbereich:
- Leitet nach überschreiten der Durchlass- (Schleusen-) spannung
- z.B. 0,8 V bei Siliziumdioden

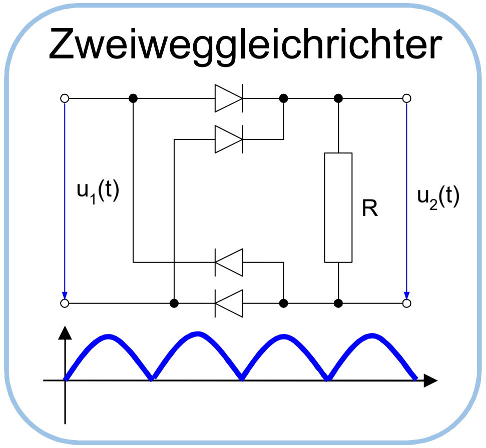
Sperrbereich
- Sperrt bis zum erreichen der Durchbruch-spannung
- Überschreiten führt zur Zerstörung

Besonderheit Zehnerdioden
Durchlassbereich:
- Wie normale Dioden

Sperrbereich
- Verringerte Durchbruchspannung
- Keine Zerstörung bei Überschreitung
- Anwendung Spannungsregelung

Charakterisierung periodischer Vorgänge





Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|dt$$

Einweggleichrichter (für sinusförmige Größen)

$$\overline{|u|} = \frac{\hat{U}}{\pi}$$

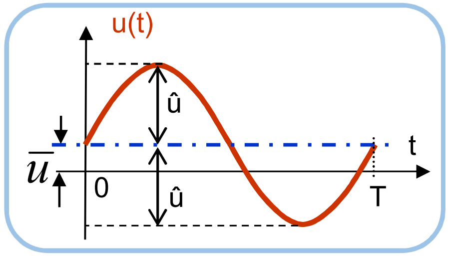
Zweiweggleichrichter – Brückengleichrichter

$$\overline{|u|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\hat{U} \cdot sin(\omega t)\right| d(\omega t) = 2\frac{\hat{U}}{\pi}$$

Messung von periodischen Größen historisch betrachtet:

- Drehspulinstrument ➔ **Mittelwert**

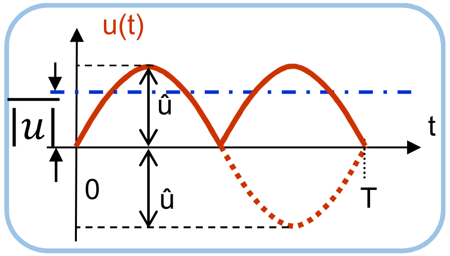
$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$



Ist der Gleichanteil
einer Wechselgröße

- Drehspulinstrument + Gleichrichter ➔ **Gleichrichtwertwert**

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|dt$$



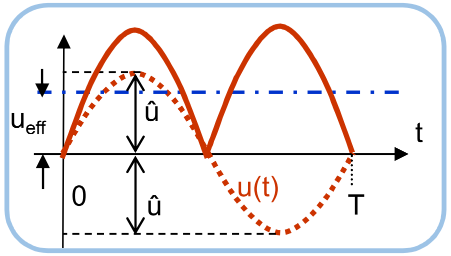
Gibt an, welcher Gleichstrom dieselbe Ladungsmenge transportiert wie im zeitlichen Mittel der gleichgerichtete Wechselstrom

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Messung von periodischen Größen historisch betrachtet:

- Dreheiseninstrumente ➔ **Effektivwert** (quadratischer Mittelwert)

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |u^2(t)|dt}$$



Ist der Gleichstrom, der über einem Widerstand die gleiche Leistung umsetzen würde, wie der betrachtete Wechselstrom.

Der Effektivwert ist daher messtechnisch von großer Bedeutung.

Traditionell werden Nenngrößen als Effektivwerte angegeben.

- Drehspulinstrument + Gleichrichter + Formfaktor ➔ **Effektivwert**
- Amplituden konnten nicht direkt gemessen werden

Bei sinusförmigen Schwingungen ist der Scheitelfaktor:

$$\mathbf{k_S = \sqrt{2}}$$

Scheitelfaktor

Verhältnis von Amplitude zu Effektivwert

$$k_S = \frac{\hat{u}}{u_{eff}}$$

Formfaktor

Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert

$$k_f = \frac{U}{\overline{|u|}}$$

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Der Gleichrichtwert hat eher nur noch historische Bedeutung.

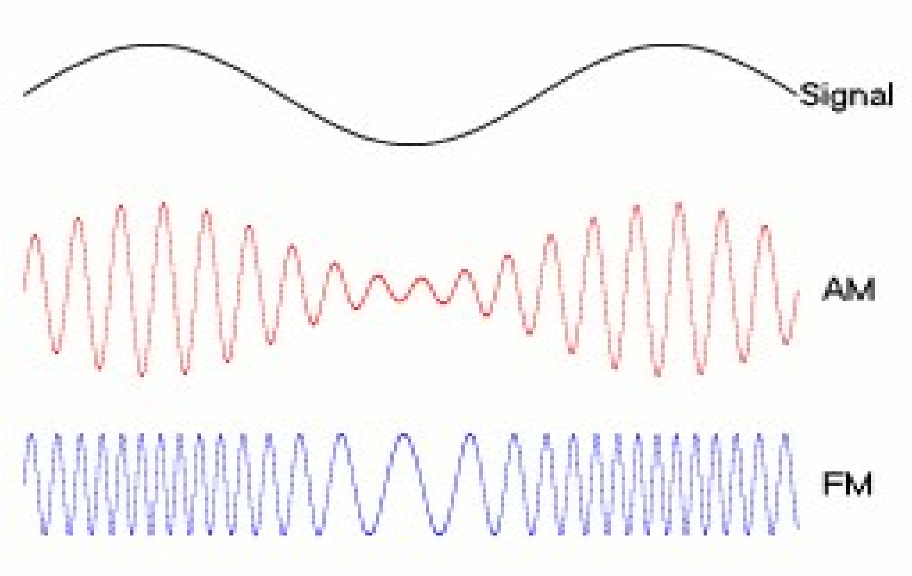
Durch Kombination eines einfachen Drehspulinstrumentes mit einem Gleichrichter war dieser Wert einfach zu erfassen.

Der technisch bedeutsamere Effektivwert bestimmte sich dann über den Formfaktor. Wenn die relevante Größe keinen idealen Sinusverlauf hatte, konnten sich dabei erheblich Fehler ergeben.

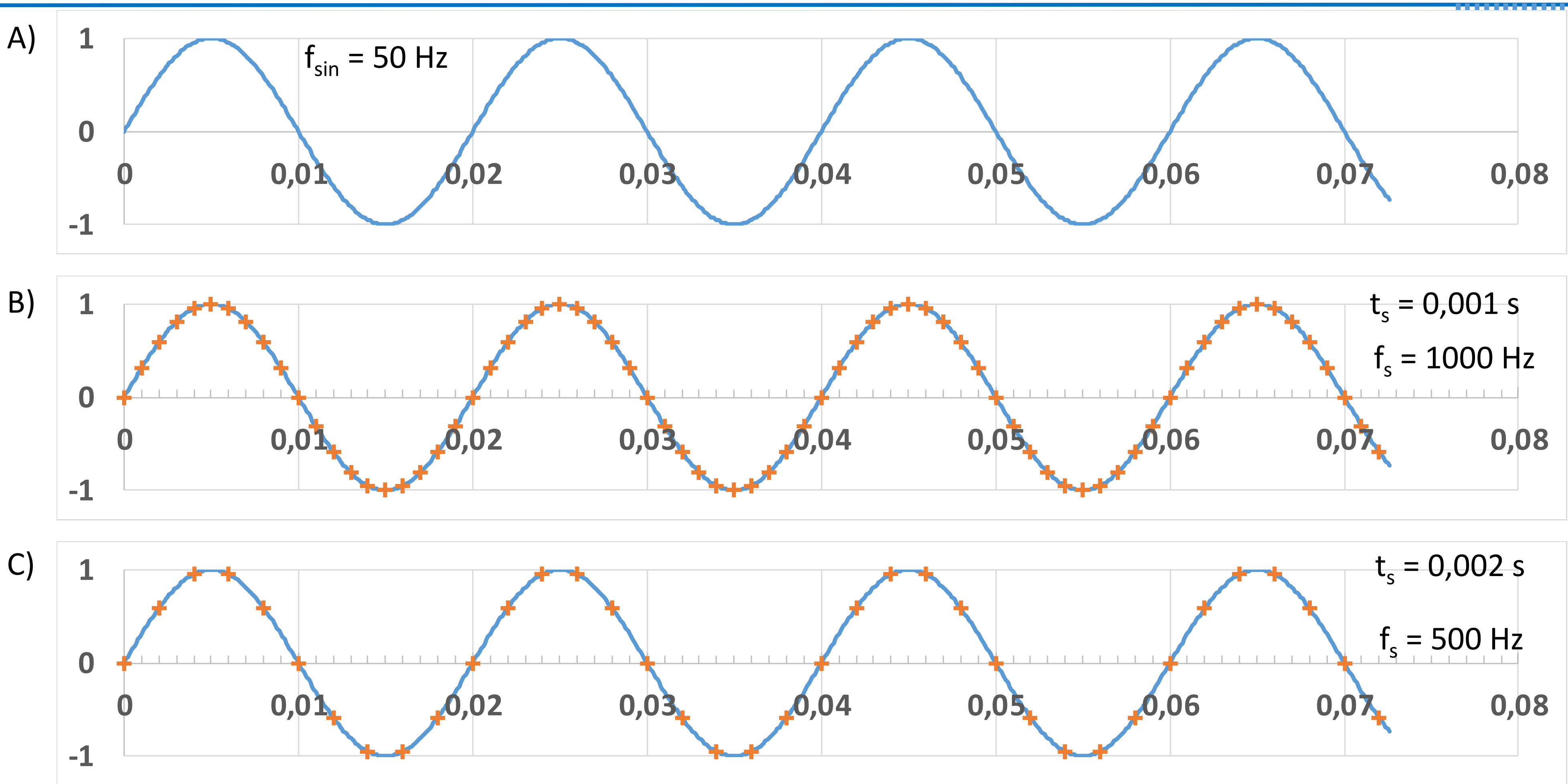
Mit einem Dreheiseninstrument konnte der Effektivwert direkt gemessen werden. Die Amplitude war messtechnisch nicht ohne weiteres zugänglich. Daher hat sich die Angabe von Effektivwerten durchgesetzt.

Heute verfügen digitale Messgeräte über ausreichend hohe Abtastraten, um den zeitlichen Verlauf der Größen direkt abzutasten. Sowohl Effektivwert als auch Amplitude und Frequenz können dann aus den Daten berechnet bzw. gefittet werden.

Signalübertragung

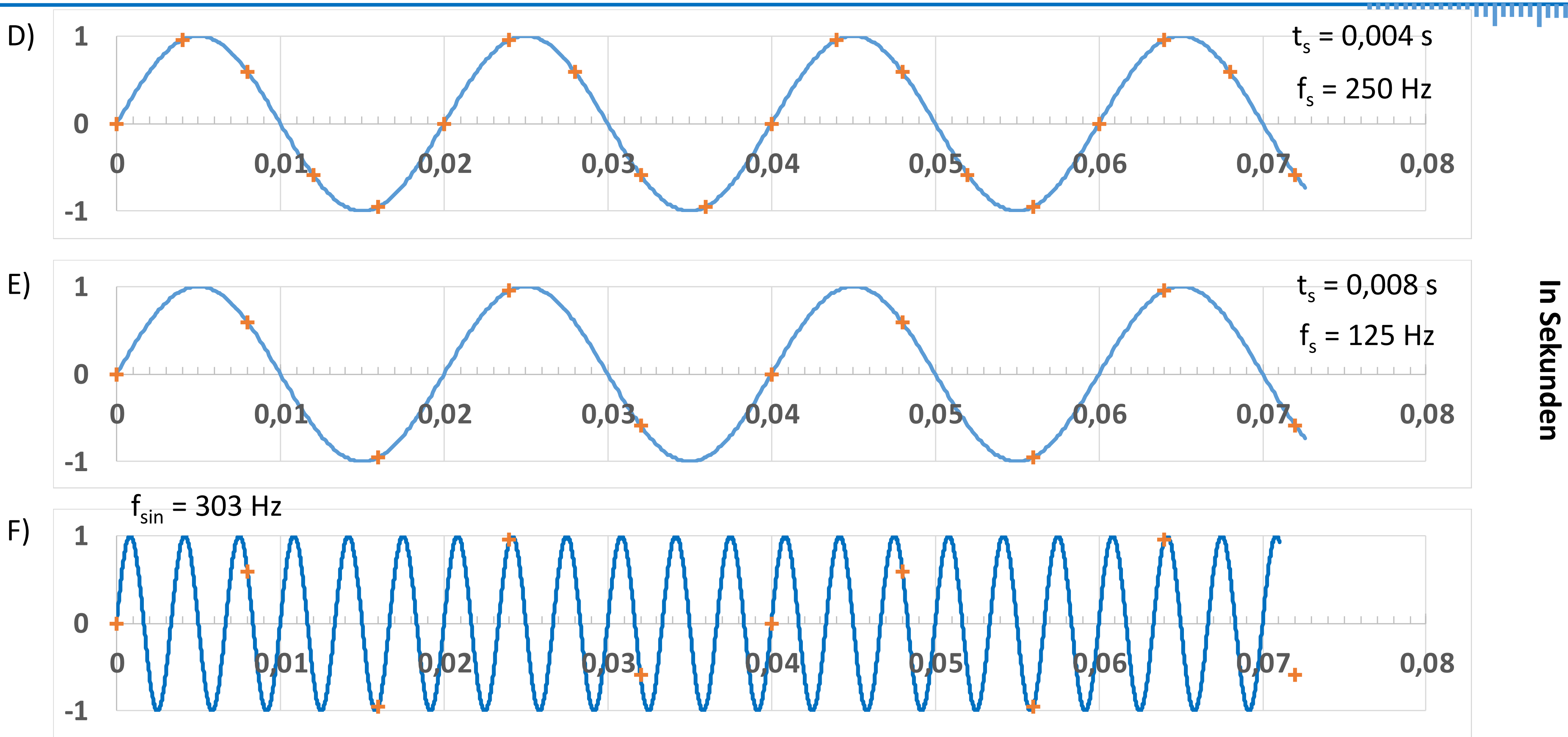


Abtasten von periodischen Signalen



In Sekunden

Abtasten von periodischen Signalen



Abtasten von periodischen Signalen

Aliasing Effekt

Aliasing-Effekte treten auf, wenn das abgetasteten Signal Frequenzanteile größer der zweifachen Abtastrate enthält.

Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

17.11.2025

Wenn eine periodische Funktion keine Frequenzanteile oberhalb einer Grenzfrequenz f_{max} enthält, dann kann dieses Signal nur mit einer Abtastrate größer als 2 f_{max} eindeutig bestimmt werden.

Wenn Sie also ein Signal mit der Frequenz f abtasten wollen, müssen Sie das mindestens mit einer Abtastrate von 2 f tun.

2 f_{max} wird auch als **Nyquist-Frequenz** bezeichnet.

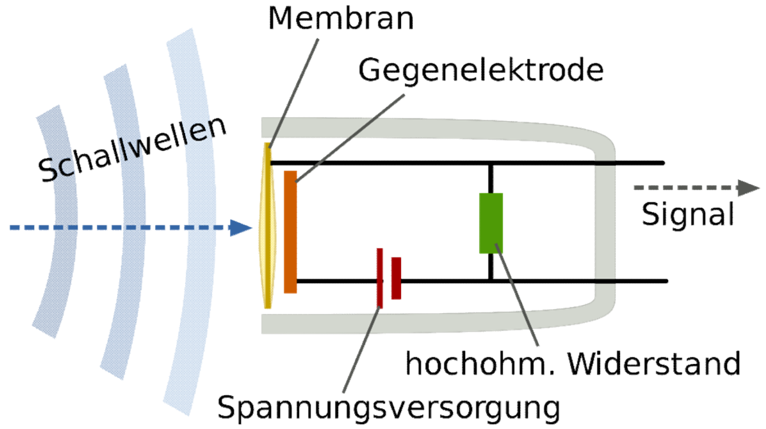
Bandbreite - Analog

Beispiel Kondensatormikrofon

Ein Mikrofon ist ein Messsystem zur Messung von Schall. Das Schallsignal wird in ein elektrisches Signal umgewandelt (Messwandler).

Messkette beim Kondensatormikrofon

- Anregung der Membran zu mechanischer Schwingung
- Zeitliche Änderung der Kapazität des Kondensators
- Zeitliche Änderung der Spannung über dem Kondensator
- Verstärkung des Spannungssignals



Limits der Bandbreite

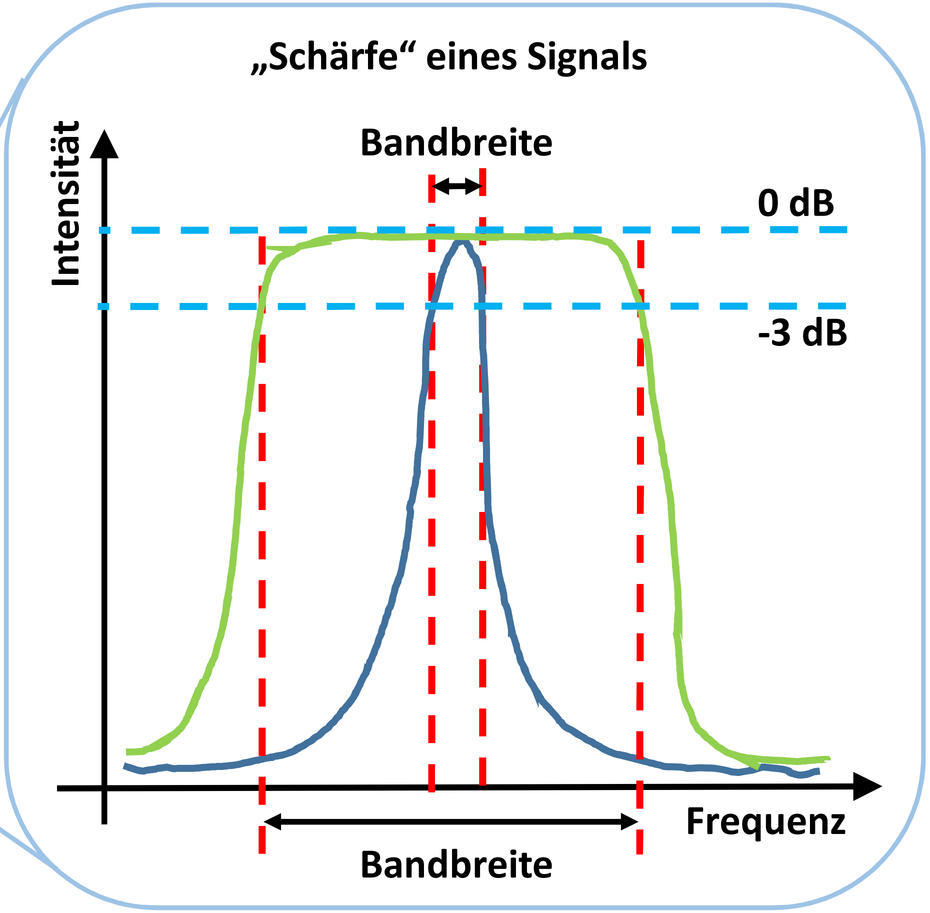
Jenseits bestimmter oberer und unterer Grenzfrequenzen folgt die Membran nicht mehr der Schwingung der Luftsäule.

Bandbreite

Bandbreite

Der Begriff wird in verschiedenen Bedeutungen verwendet.

1. **In der analogen Messtechnik gibt die Bandbreite den Bereich an an, innerhalb dessen ein Signal aufgenommen werden kann. Frequenzanteile oberhalb und unterhalb der Bandbreite werden abgeschnitten (Beispiel nächste Seite).**
2. **Maß für die „Schärfe“ eines Signales im Frequenzbereich. Definiert den Abstand der Frequenzen, bei denen die Intensität (Leistung) des Signals um 3 dB abgefallen ist.**
3. **Übertragungsrate (Datenrate) einer digitalen Datenverbindung.**



Bandbreite – Digitale Datenrate

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Signal Source	AD Umsetzer	Datenleitung	Data Sink

Beispiel AD-Umsetzer + Datenübertragung

Ein analoges Spannungssignal 0 V bis 12 V wird von einem 8-Bit AD-Wandler digitalisiert.

Die Abtastrate des AD Wandlers ist

f_{AD} = 0,048 MSPS [Mega-Samples Per Second] = 48 kHz

Die Übertragungsrate vom AD-Umsetzer zur weiteren Datenverarbeitung ist (wir nutzen eine Buetooth Verbindung)

C = 433,9 kbit / s

Bestimmen Sie die Spannungs-Auflösung des Messsystems.

Ermitteln Sie dann die maximale Rate des Systems, mit der ein Signal abgetastet werden kann.

Geben Sie an, ob AD-Umsetzung oder Datenleitung der limitierende Faktor ist.

Signal-Zu-Rauschverhältnis

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Schwache Signale werden in der Regel durch ein immer vorhandenes Untergrundrauschen maskiert.

Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis gibt an, in Welche Verhältnis die Signalleistung zur Rauschleistung steht.

Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis wird in der Regel in Bell bzw. Dezibell angegeben.

$$\mathbf{SNR} = \frac{\mathbf{P_{Signal}}}{\mathbf{P_{Rausch}}}$$

Überlagerung periosischer Signale

Wir beschränken uns hier im wesentlichen auf die Betrachtung von Signalen einer festen Frequenz.

In der Signalverarbeitung begegnen ihnen aber immer Signale, die eine Überlagerung von Frequenzen sind.

Daher ein kurzer Ausblick mit einem Beispiel:

Reale Randbedingungen der Signalübertragung:

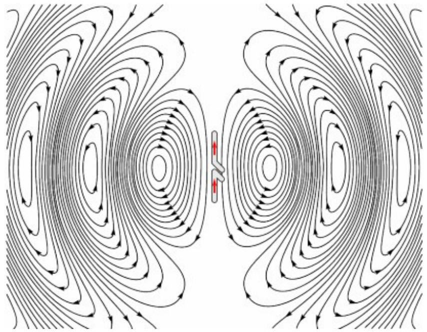
Eine Antenne stahlt nie eine einzelne Sinus-Frequenz ab, sondern auch ein Bündel von benachbarten Frequenzen.

https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1080791

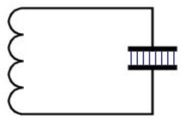
Wellenpaket in Raum und Zeit

Die Antenne als schwingender Dipol

sendet auf einer gewissen Bandbreite:



Von Chetvorno - Eigenes Werk, CC0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=41436811



Von Averse, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3198224

Überlagerung periosischer Signale

Eine Antenne sendet eine Bandbreite von Sinusschwingungen im Frequenzraum.

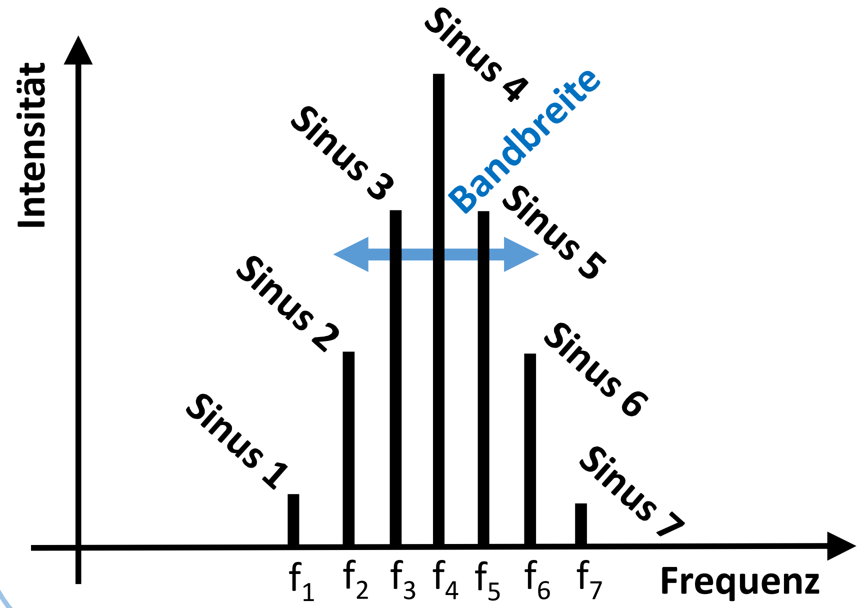
$$E_n(t) = \sum \dot{A}_n sin(\omega_n \cdot t) = \sum \dot{A}_n sin(2\pi \cdot f_n \cdot t)$$

Überlagerung mehrerer Sinus benachbarter Frequenzen…

…wie sieht das dann auf der Zeitachse und im Ortsraum aus?

Wellenpaket im Frequenzraum

(im sog. Frequenzspektrum)



Signal-Zu-Rauschverhältnis

Schwache Signale werden in der Regel durch ein immer vorhandenes Untergrundrauschen maskiert.

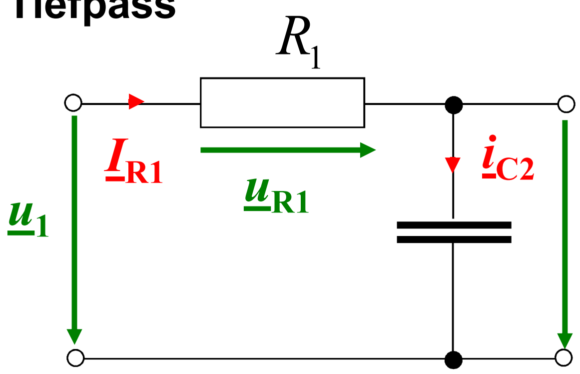
Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis gibt an, in Welche Verhältnis die Signalleistung zur Rauschleistung steht.

Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis wird in der Regel in Bell bzw. Dezibell angegeben.

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_{\mathrm{Signal}}}{P_{\mathrm{Rausch}}}$$

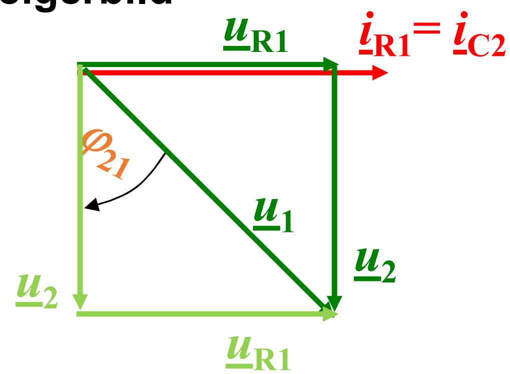
Filter

Tiefpass



$$Z_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2} = -j\frac{1}{\omega C_2}$$

Zeigerbild



Tiefpass lässt tiefe Frequenzen passieren und sperrt hohe Frequenzen.

Verstärkung U_2/U_1

$$\frac{|\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1|} = \frac{i\left|-j\frac{1}{\omega C_2}\right|}{i\left|R_1 - j\frac{1}{\omega C_2}\right|} = \frac{\frac{1}{\omega C_2}}{\sqrt{R_1^{\,2} + \left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2}}$$

Erweitere mit ωC_2

$$\boxed{\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega C_2 R_1)^2}} = f(\omega)}$$

Phasenwinkel

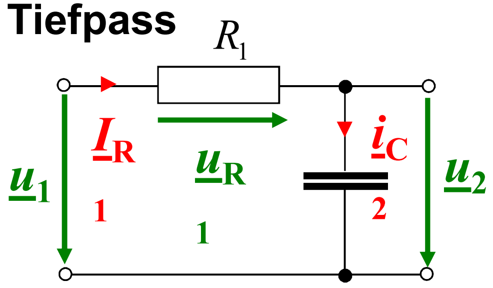
$$\tan(\varphi) = \frac{|\underline{u}_{R1}|}{|\underline{u}_2|} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C_2}} = R\omega C_2$$

$$\boxed{\varphi_{21} = \varphi_{U2} - \varphi_{U1} = -\arctan(\omega C_2 R_1) = f(\omega)}$$

Negativer Drehsinn

Filter

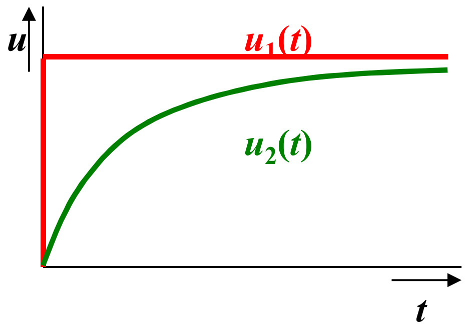
Tiefpass



$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega C_2 R_1)^2}} = f(\omega)$$

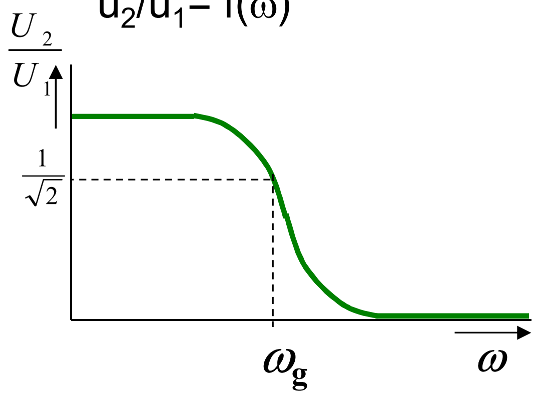
$$\varphi_{21} = -\arctan(\omega C_2 R_1) = f(\omega)$$

Sprungantwort $u(t)$



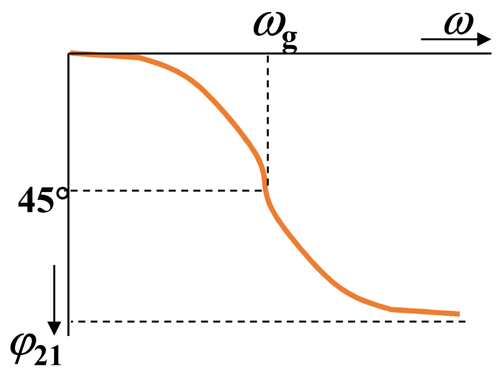
Amplitudengang

u_2/u_1= f(ω)



Phasengang

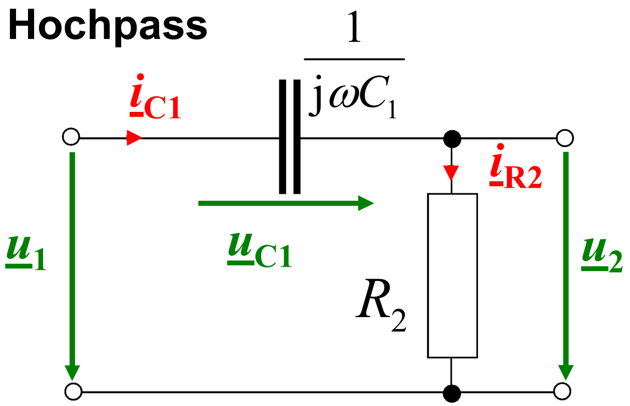
φ_{21}= f(ω)



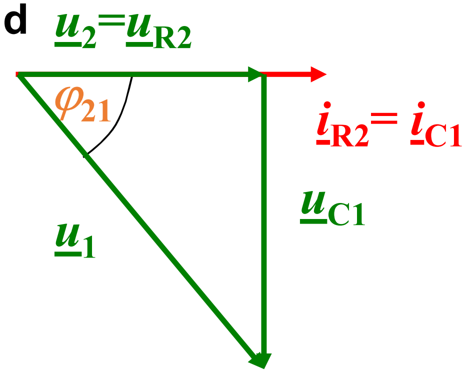
Grenzfrequenz: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 1 = (\omega_g C_2 R_1)^2 \qquad \omega_g = \frac{1}{C_2 R_1}$

Filter

Hochpass



Zeigerbild



Hochpass lässt hohe Frequenzen passieren und sperrt niedrige Frequenzen

Verstärkung U_2/U_1

$$\frac{|\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1|} = \frac{i|R_2|}{i\left|R_2 - j\frac{1}{\omega C_1}\right|} = \frac{R_2}{\sqrt{R_2{}^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2}}$$

Erweitere mit $\frac{1}{R_2}$

$$\boxed{\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega C_1 R_2)^2}}} = f(\omega)}$$

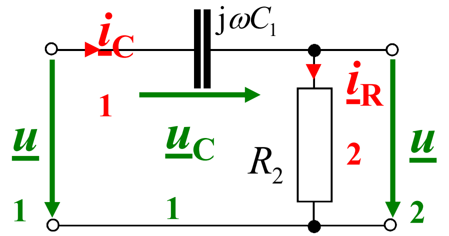
Phasenwinkel

$$\tan(\varphi) = \frac{|\underline{u}_{C1}|}{|\underline{u}_{R2}|} = \frac{\frac{1}{\omega C_1}}{R_2} = \frac{1}{R_2 \omega C_1}$$

$$\boxed{\varphi_{21} = \varphi_{U2} - \varphi_{U1} = \arctan\left(\frac{1}{\omega C_1 R_2}\right) = f(\omega)}$$

Positiver Drehsinn

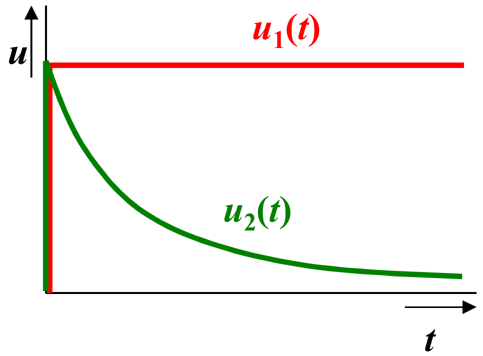
Hochpass



$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega C_1 R_2)^2}}} = f(\omega)$$

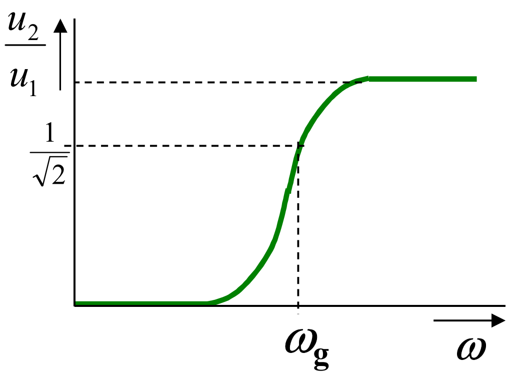
$$\varphi_{21} = \arctan\left(\frac{1}{\omega C_1 R_2}\right) = f(\omega)$$

Sprungantwort $u(t)$



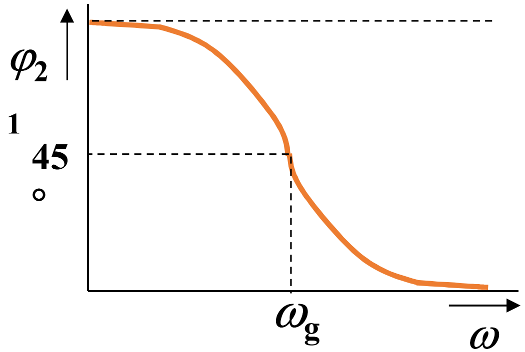
Amplitudengang

$u_2/u_1 = f(\omega)$



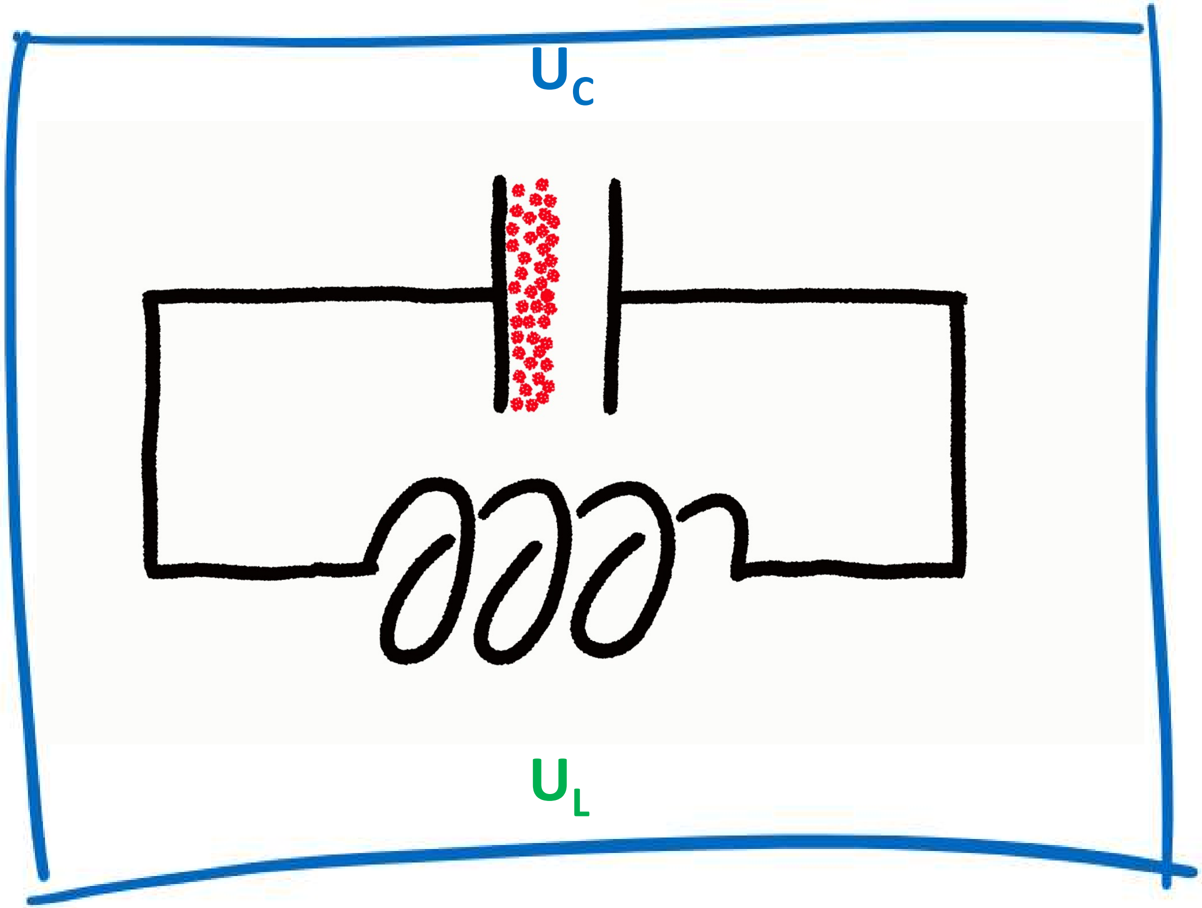
Phasengang

$\varphi_{21} = f(\omega)$



Grenzfrequenz: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 1 = (\omega_g C_1 R_2)^2 \qquad \omega_g = \frac{1}{C_1 R_2}$

Schwingkreis



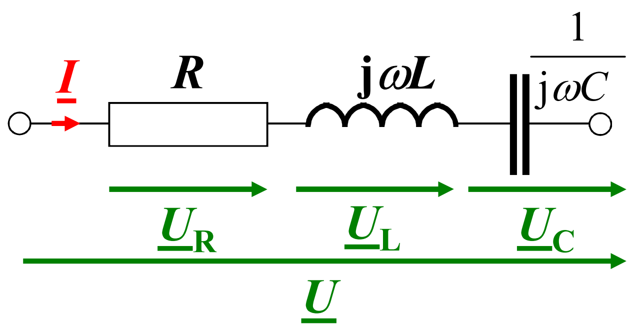
Filter

Schwingkreise

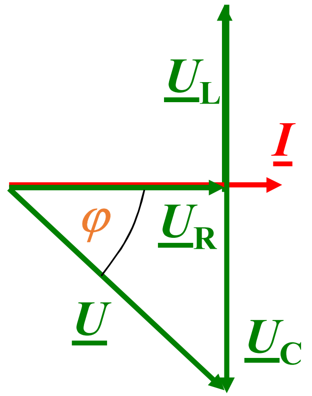
- Resonanzerscheinungen spielen in der Elektrotechnik eine große Rolle
- Schwingkreise sind die Ursache für Resonanzen
- Spannung U und Strom I werden phasengleich
- Sind Kombinationen von Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen

Beispiel Reihenschwingkreis / Bandpass

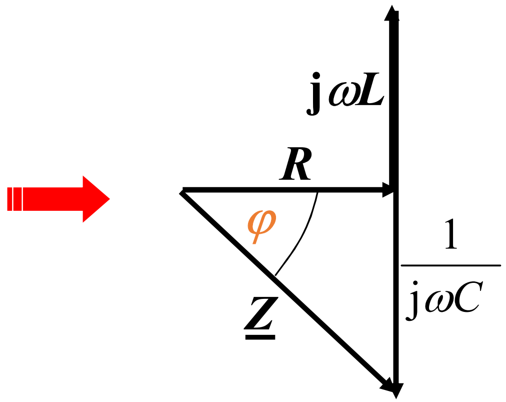
Schaltung



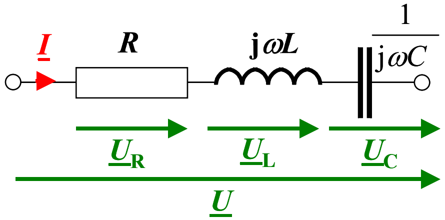
Zeigerbild



Impedanz



Filter



Impedanz

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Betrag

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Phasenwinkel

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Bei **Resonanz** heben sich die beiden Reaktanzen auf, d.h. als Impedanz wird nur der Widerstand R wirksam. U und I sind phasengleich.

Es gilt also $(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}) = 0$ im Resonanzfall.

Daraus berechnet sich die Resonanzkreisfrequenz:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

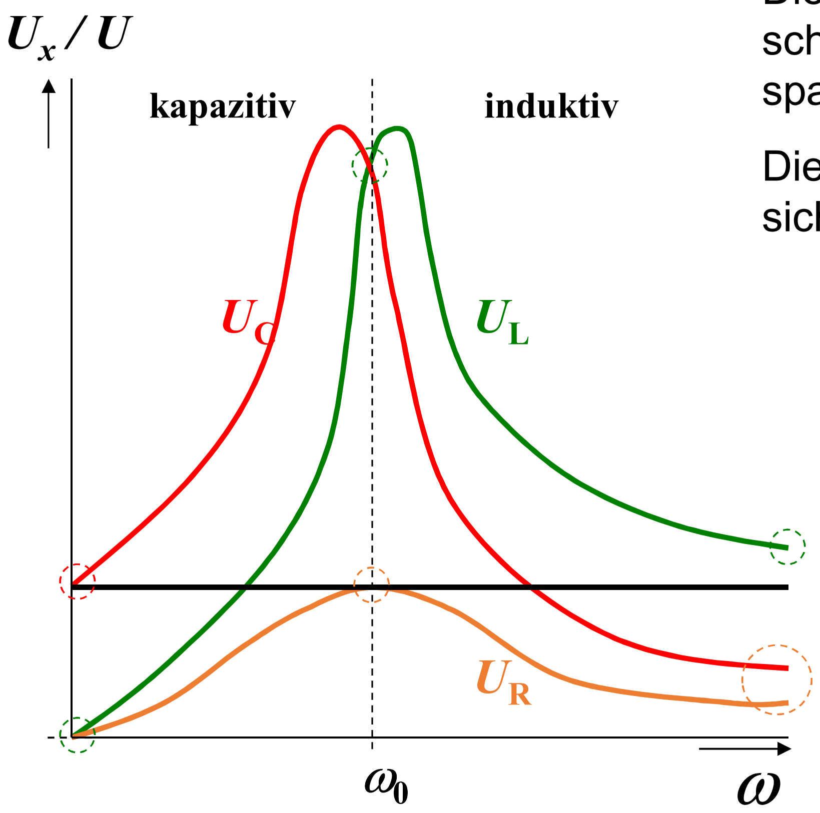
bzw. die Resonanzfrequenz zu

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.}$$

Für Impedanz, deren Betrag und Phasenwinkel ergibt sich im Zustand der Resonanz

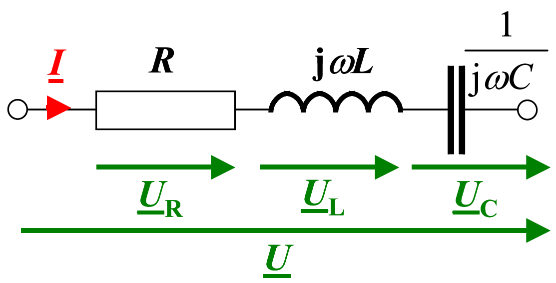
$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}) = R \qquad Z = \sqrt{R^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2} = R \qquad \varphi = \arctan \frac{\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}}{R} = 0°.$$

Filter



Die Teilspannungen eines Reihenschwingkreises können die Gesamtspannung U wesentlich übersteigen.

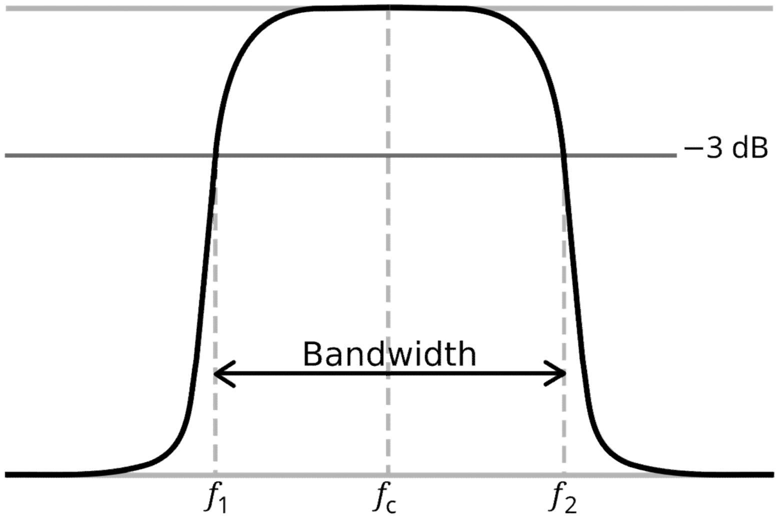
Die Überhöhung im Resonanzpunkt ergibt sich aus der Kreisgüte Q .



Güte des Schwingkreises

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Filter



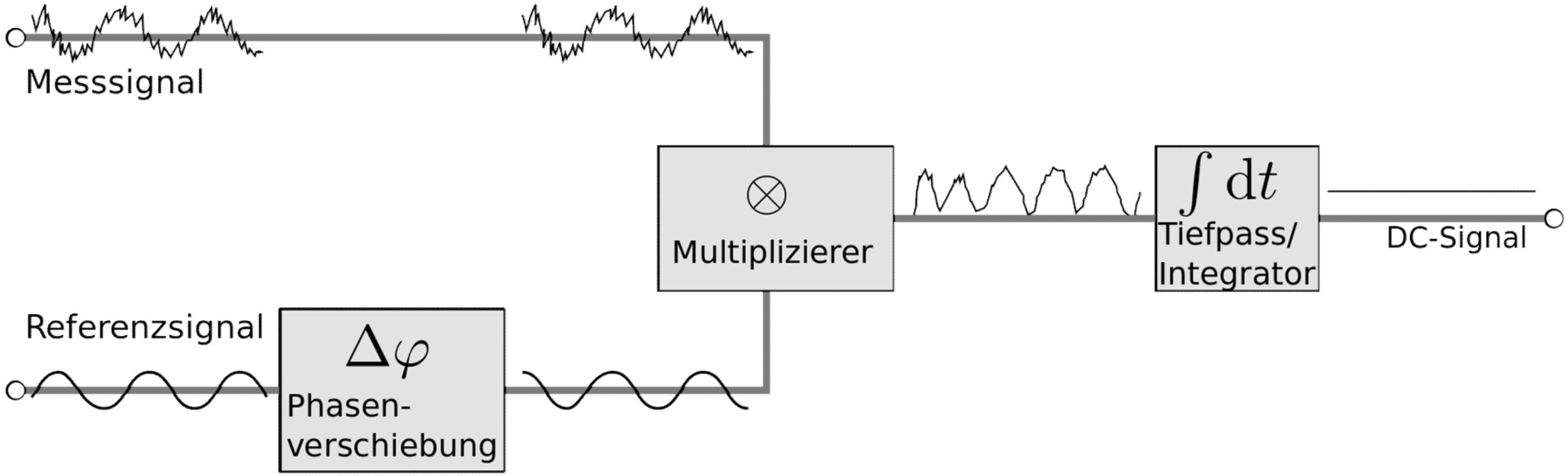
B: 3dB-Bandbreite

Güte $$Q = \frac{f_0}{B}$$

Beispiel Analoge Signalverarbeitung
Lock-In Verstärker

Messen von schwache, verrauschten Signalen:

- **Messsignal wird mit einem periodischen Signal moduliert (= überlagert)**
- **Bandfilter lässt nur die Frequenzanteile des modulierten Signal passieren**



Von Zelbear - Template:Grafik selbst erstellt nach Vorlage http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Lock-in.png von Christian Nölleke, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=12078001

Überlagerung periosischer Signale

Fazit - Reale Signale…

…sind nicht monochromatisch (also: bestehen nicht aus einer einzigen Sinusschwingung einer Frequenz)

…können beschrieben werden als Überlagerung von sinusförmigen Schwingungen

…können sowohl im Frequenzraum, als auch im Zeit"raum"beschrieben werden.

…werden im Frequenzraum durch die Bandbreite beschrieben (das ist die „Schärfe" der Frequenzbreite)