Elektrische Messtechnik

Vorlesung 3

Prof. Dr. Peter Weber

Wintersemester 24/25

Im Studiengang Elektro- und Informationstechnik (B.Eng.)

Spielregeln in der Präsenz-Vorlesung

- Ihre Fragen und Anmerkungen gehen vor - Unterbrechen Sie mich gerne, wenn ich Ihre Meldung übersehen sollte
- Keine „Side Meetings“ in der Vorlesung - Paralleldiskussionen zu zweit verbreiten zu viel Unruhe

  ➔ Fragen, Ideen oder Anmerkungen bitte immer in die große Runde – keine Hemmungen

  ➔ Es gibt keine dummen Fragen - Niemand wird für eine Wortmeldung „augebuht“!
- Pünktlich erscheinen - Später hereintröpfelnde Teilnehmer verbreiten zu viel Unruhe
- Verlassen der Vorlesung bitte nur zur Pause oder zum Ende (logischerweise ausgenommen Toilettengänge)
- Am Ende der Vorlesung den letzten Satz vor dem Aufstehen abwarten.
- Telefone auf „leise“
- Ich wünsche mir immer Ihr Feedback – sofort in der Vorlesung oder gerne auch z.B. per mail

Organisation

Vorlesung:

Donnerstag	08:15 h bis 11:30 h	Raum: 8-105

Start 21.10.2024 - Ende 12.02.2025

Labor (Herr Michalik):

Montag	11:45 h bis 15:45 h	Raum: 8-205

Terminorganisation bei Herrn Michalik

CampUAS – Vorlesung (P. Weber):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4525

Weber: Elektrische Messtechnik - WS 24/25

Enrollment Key: alessandrovolta

CampUAS – Labor (R. Michalik):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4433

Michalik: Labor Elektrische Messtechnik - WiSe 24

Enrollment Key: MT-LAB-WS24

Bitte unbedingt in beiden Kursen einschreiben (auch bei Herrn Michalik).

Sie verpassen sonst wichtige Infos bzw. werden bei der Laborterminvergabe nicht berücksichtigt

Gruppenarbeit

- Bilden Sie N Gruppen mit M Teilnehmern.
- Sie haben 20 Minuten Zeit.
- Bestimmen Sie eine Person Ihrer Gruppe, die im Anschluss Ihr Ergebnis präsentiert.
- Bestimmen Sie die Zahl Pi möglichst genau.
- Reflektieren bzw. diskutieren Sie Ihre Vorgehensweise.

  ➔ Stellen Sie die Prozesskette Ihrer Messung Schritt für Schritt dar

  ➔ Überlegen Sie, welche Einflüsse es pro Schritt auf das Messergebnis geben kann

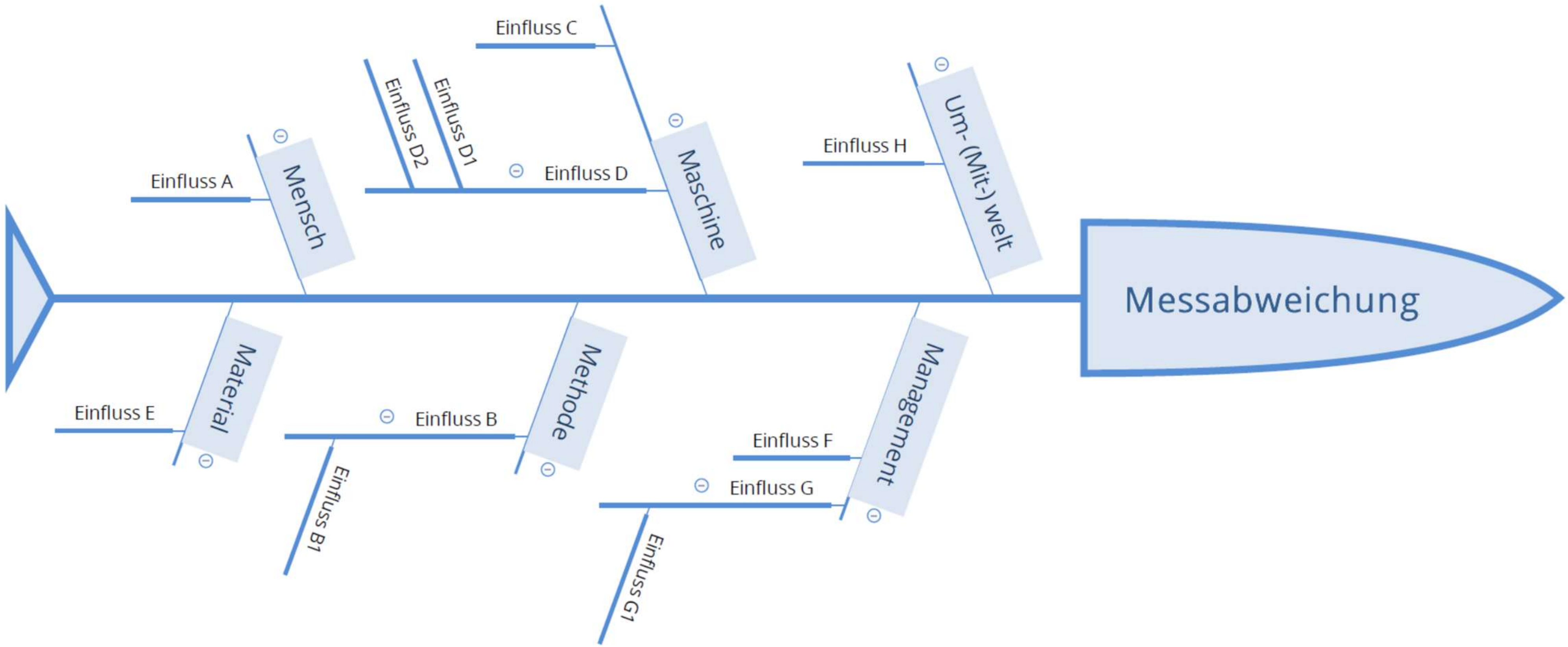
  ➔ Stellen Sie die Einflüsse in einem Fischgrätendiagramm dar
- Machen Sie sich Gedanken zur Aussagekraft Ihres Ergebnisses.

Pi… gemessen

3.
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971
6939937510 5820974944 5923078164 0628620899
8628034825 3421170679 8214808651 3282306647
0938446095 5058223172 5359408128 4811174502
8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482
1339360726 0249141273 7245870066 0631558817
4881520920 9628292540 9171536436 7892590360
0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179
3105118548 0744623799 6274956735 1885752724
8912279381 8301194912 …

Analyse der Mess-Prozesskette

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



Analyse der Mess-Prozesskette

1	2	3	4	5
Prozessschritt des Messprozesses	**Welche Parameter beeinflussen hier das Messergebnis?**	**Wie stark (1: wenig, 5: sehr) beeinflusst der jeweilige Parameter das Messergebnis?**	**Welche Maßnahmen könnten den Einfluss verringern?**	**Wie aufwändig (1: wenig, 5: sehr) wäre diese Maßnahme?**

Gültige Stellen – Genauigkeit Arithmetisch

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Die Anzahl der angegebenen Nachkommastellen physikalischer Größen ist NICHT beliebig!

Multiplikation und Division:
Im Ergebnis ist die Zahl gültiger Stellen die kleinste Zahl gültiger Stellen der Faktoren.

Addition und Subtraktion
Im Ergebnis nicht mehr Nachkommastellen, als Nachkommastellen beim Summanden mit der kleinsten Anzahl Nachkommastellen.

„Kaufmännisches“ Runden
Ist die erste gestrichene Stelle eine 1...4, dann bleibt die erste angegebene Stelle stehen
Ist die erste gestrichene Stelle eine 5...9, dann wird die erste angegebene Stelle um 1 erhöht

0,24 ➔ 0,2
0,25 ➔ 0,3

10,7 kg
➔ Masse zwischen 10,65 kg und 10,74 kg.

10,77 kg
➔ Masse zwischen 10,765 kg und 10,774 kg.

Gültige Stellen – Genauigkeit Arithmetisch

Bestimmen Sie das Ergebnis und beachten Sie die Regeln zu den gültigen Stellen

$$m = 7{,}874 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}12\ m^3$$

$$m = 1{,}003 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}02\ m^3$$

$$m = 20 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \quad 300\ m^3$$

$$\rho = \frac{15{,}67 \cdot 10^3\ kg}{3{,}25\ m^3}$$

$$\rho = \frac{20{,}01 \cdot 10^3\ kg}{0{,}02 \cdot 10^2 m^2}$$

$$\rho = \frac{20 \cdot 10^3\ kg}{300\ m^3}$$

$$m = 10\ kg + 3\ kg$$

$$m = 10{,}3\ kg + 3{,}47\ kg$$

$$m = 0{,}003\ kg + 0{,}0005\ kg$$

$$m = 10\ kg - 3\ kg$$

$$m = 10{,}3\ kg \quad 3{,}47\ kg$$

$$m = 0{,}003\ kg - 0{,}0005\ kg$$

Gültige Stellen – Genauigkeit Arithmetisch

Multiplikation & Division:
kleinste Zahl signifikannte Stellen

4 signifikannte Stellen · 2 signifikannte Stellen

$$m = \overbrace{7{,}874}^{4} \cdot 10^3 \,\frac{kg}{m^3} \cdot \overbrace{0{,}12}^{2}\, m^3$$

$$= \underbrace{0{,}94}_{2}\cancel{488} \cdot 10^3\, kg$$

2 signifikannte Stellen

$$\rho = \frac{\overbrace{15{,}67}^{4} \cdot 10^3\, kg}{\underbrace{3{,}25}_{3}\, m^3}$$

$$= \underbrace{4{,}82}_{3}\cancel{15} \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^2}$$

$$m = \overbrace{1{,}003}^{4} \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}0\overbrace{2}^{1}\, m^3$$

$$= 0{,}0\underbrace{2}_{1}\cancel{006} \cdot 10^3\, kg$$

$$\rho = \frac{\overbrace{20{,}01}^{4} \cdot 10^3\, kg}{0{,}0\underbrace{2}_{1} \cdot 10^2\, m^2}$$

$$= \underbrace{1}_{1}\cancel{000{,}5} \cdot 10^1\, \frac{kg}{m^2} = 1 \cdot 10^4\, \frac{kg}{m^2}$$

$$m = \overbrace{20}^{2} \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3} \cdot \overbrace{300}^{3}\, m^3$$

$$= 60\cancel{00} \cdot 10^3\, kg = 60 \cdot 10^5\, kg$$

$$\rho = \frac{\overbrace{20}^{2} \cdot 10^3\, kg}{\underbrace{300}_{3}\, m^3}$$

$$= 0{,}0\underbrace{66}_{2}\cancel{667} \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3} = 67\, \frac{kg}{m^3}$$

Addition & Subtraktion
kleinste Zahl Nachkommastellen

0 Nachkomma-stellen · 0 Nachkomma-stellen

$$m = 10\, kg + 3\, kg$$

$$= 13\, kg$$

0 Nachkomma-stellen

0 Nachkomma-stellen · 0 Nachkomma-stellen

$$m = 10\, kg - 3\, kg$$

$$= 7\, kg$$

0 Nachkomma-stellen

$$m = 10{,}\overbrace{3}^{1}\, kg + 3{,}\overbrace{47}^{2}\, kg$$

$$= 13{,}\underbrace{7}_{1}\cancel{7}\, kg = 13{,}8\, kg$$

$$m = 10{,}\overbrace{3}^{1}\, kg \quad 3{,}\overbrace{47}^{2}\, kg$$

$$\begin{array}{r} 10{,}3 \\ -\,3{,}47 \\ \hline 6{,}83 \end{array}$$

$$= 6{,}83\, kg = 6{,}8\, kg$$

$$m = 0{,}\overbrace{003}^{3}\, kg + 0{,}\overbrace{0005}^{4}\, kg$$

$$= 0{,}\underbrace{003}_{3}\cancel{5}\, kg = 0{,}004\, kg$$

$$m = 0{,}\overbrace{003}^{3}\, kg - 0{,}\overbrace{0005}^{4}\, kg$$

$$\begin{array}{r} 0{,}003 \\ 0{,}0005 \\ \hline 0{,}0025 \end{array}$$

$$= 0{,}\underbrace{002}_{3}5\, kg = 0{,}003\, kg$$

Fazit zum Runden

Die zuvor gelernten Daumenregeln für Multiplikation und Addition zu gültigen bzw. Nachkommastellen sind nur Näherungen.

Denn Rechnung mit den nach Rundungskonvention definierten oberen und unteren Grenzen der Einzelwerte zeigt, dass der Überlapp mit der nach Daumenregel bestimmten Spanne nicht 100 % gegeben ist.

Runden nach Daumenregel (grün)

$$\mathrm{m} = 10{,}3\ \mathrm{kg} + 3{,}47\ \mathrm{kg} = 13{,}77\ \mathrm{kg} = 13{,}8\ \mathrm{kg}$$

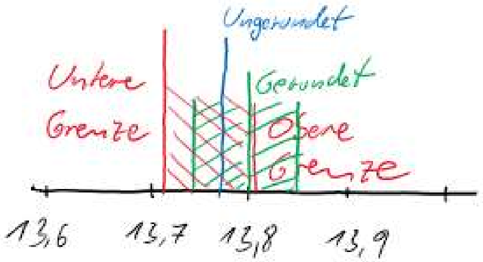
Spanne: (13,75..13,84) kg

Rechnen mit gerundeten max. / min. (rot)

$$\mathrm{m_{min}} = 10{,}25\ \mathrm{kg} + 3{,}465\ \mathrm{kg} = 13{,}715\ \mathrm{kg} = 13{,}72\ \mathrm{kg}$$

$$\mathrm{m_{max}} = 10{,}34\ \mathrm{kg} + 3{,}474\ \mathrm{kg} = 13{,}814\ \mathrm{kg} = 13{,}81\ \mathrm{kg}$$

Spanne: (13,72..13,81) kg

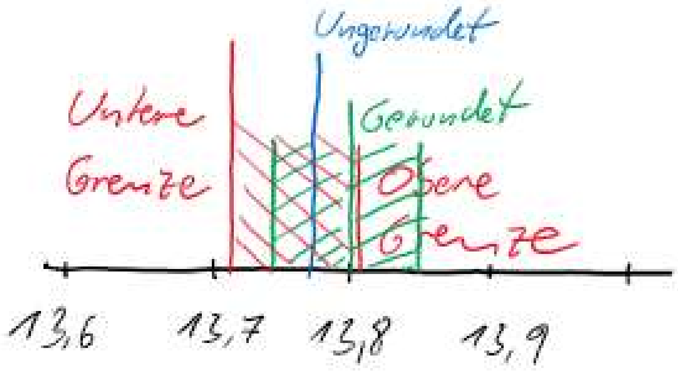


Fazit zum Runden

Die Anfangs gegebenen Werte erlauben eine Genauigkeit im Rahmen der roten Grenzen.

Das nach Daumenregel gerundete Ergebnis erlaubt eine Spanne, die zumindest zum Teil Überlapp mit dem roten Bereich hat.

Das ungerundete Ergebnis liegt zwar innerhalb des roten Bereichs, ist also sicher ein richtiges Ergebnis. Es definiert aber nur einen minimale Spanne, also ist der Überlapp seiner Lösungsmenge mit dem roten Bereich viel geringer. Es ist falsch, weil eine viel zu hohe Genauigkeit suggeriert wird.



Mit anderen Worten:

- Wenn keine detailliertere Betrachtung möglich ist, sind die Daumenregeln das Mittel der Wahl.
- **In der Messtechnik benötigen wir aber häufig eine noch bessere Methode:**
  Das ist die individuelle Angabe von Messunsicherheiten pro Wert.

Umgang mit Messunsicherheiten

In der Messtechnik geben wir zu jedem gemessenen Wert eine Messunsicherheit an.
Beispiel: Addition zweier gemessener Massen:

$$\mathrm{m} = m_1 + m_2 = 10{,}30\ \mathrm{kg} + 3{,}47\ \mathrm{kg}$$

Messunsicherheiten werden mit ein oder zwei gültigen Stellen angegeben (nicht mehr)

Zum Beispiel: $\mathrm{m} = 10{,}30\ \mathrm{kg}\ (\pm 2{,}0\%) + 3{,}47\ \mathrm{kg}(\pm 1{,}5\%)$ relativ

$\mathrm{m} = 10{,}30\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}20\cancel{6}\ \mathrm{kg}) + 3{,}47\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}05\cancel{205}\mathrm{kg})$ absolut

$\mathrm{m} = 10{,}30\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}21\ \mathrm{kg}) + 3{,}47\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}05\mathrm{kg})$ Messunsicherheit gerundet

Umgang mit Messunsicherheiten

In der Messtechnik geben wir zu jedem gemessenen Wert eine Messunsicherheit an.

$$\mathrm{m} = m_1(\pm\Delta m_1)+m_2(\pm\Delta m_2)$$

$$\mathrm{m} = 10{,}30\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}21\ \mathrm{kg}) + 3{,}47\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}05\mathrm{kg}) \quad \rightarrow \quad m_{nenn} = 10{,}30\ \mathrm{kg} + 3{,}47\ \mathrm{kg} = 13{,}77\ \mathrm{kg}$$

$$m_{min} = 10{,}09\ \mathrm{kg} + 3{,}42\ \mathrm{kg} = 13{,}51\ \mathrm{kg}$$

$$m_{max} = 10{,}51\ \mathrm{kg} + 3{,}52\ \mathrm{kg} = 14{,}03\ \mathrm{kg}$$

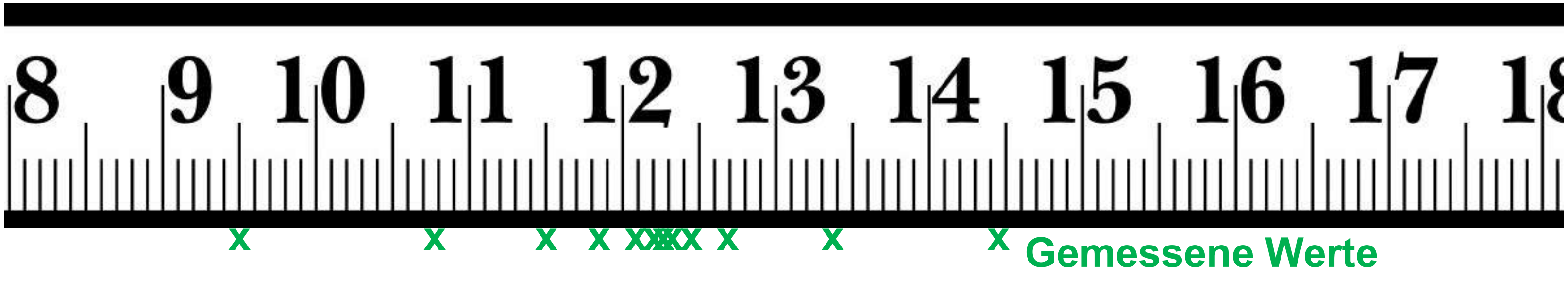
$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}\, m_\Delta = \frac{1}{2}(14{,}03\ \mathrm{kg} - 13{,}51\ \mathrm{kg}) = 0{,}26\ \mathrm{kg}$$

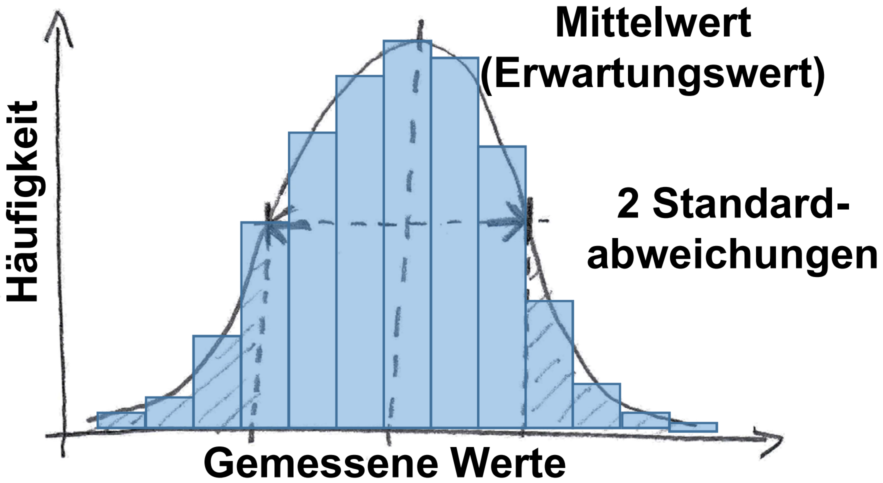
- **Bedenken Sie, dass die Messunsicherheit statistisch ist: Der „wahre“ Wert kann auch jenseits der „Grenze“ liegen, es ist nur weniger wahrscheinlich.**
- **Das führt zu Abweichungen von der min./max. Betrachtung.**
- **Wie wir damit umgehen, sehen wir später.**

$$\rightarrow \quad \mathrm{m} = 13{,}77\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}26\ \mathrm{kg})$$

$$\mathrm{m} = 13{,}77\ \mathrm{kg}\ (\pm 1{,}9\ \%)$$

Streuung


8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
Gemessene Werte


Mittelwert
(Erwartungswert)
2 Standard-
abweichungen
Häufigkeit
Gemessene Werte

Die Gaußsche Normalverteilung

Erwartungswert (Mittelwert)

$$\mu = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots x_N)}{N}$$

$$\boxed{\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}}$$

Standardabweichung

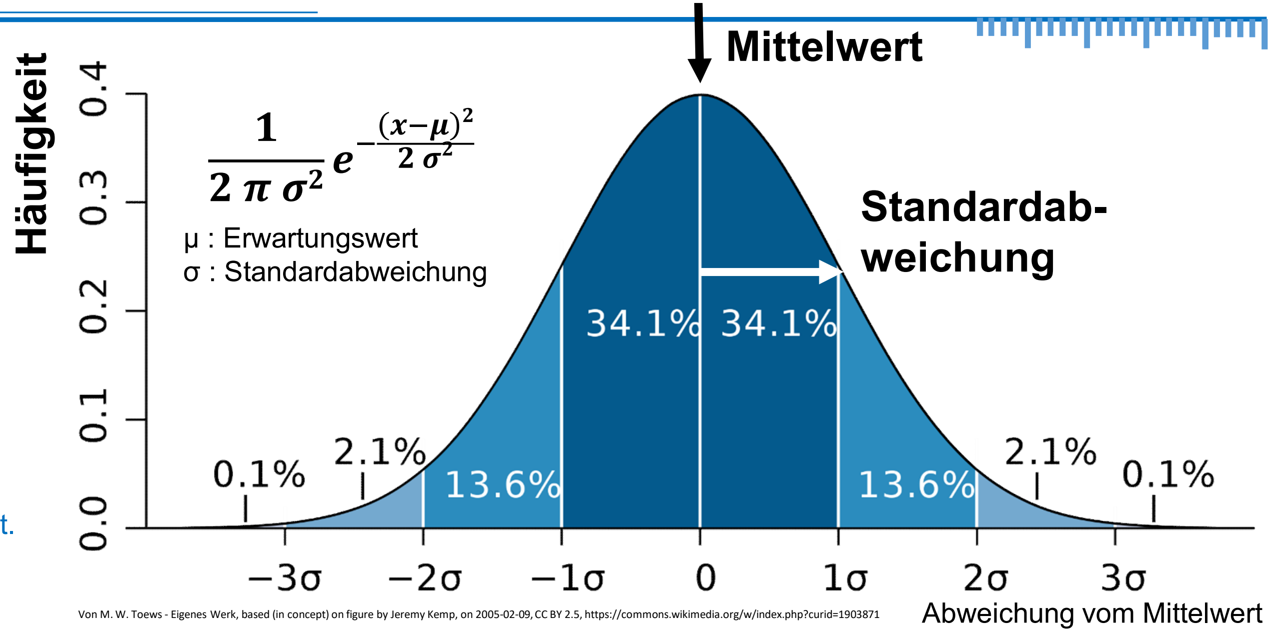
der Einzelmessung vom Mittelwert

Abschätzung für die Grundgesamtheit aus der Stichprobe

Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt ein einzelner Messwert im σ-Intervall um den wahren Wert.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (xn - \mu)^2}{N - 1}}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (xi - \mu)^2}{N - 1}}}$$



Von M. W. Toews - Eigenes Werk, based (in concept) on figure by Jeremy Kemp, on 2005-02-09, CC BY 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1903871

Messgröße

Messunsicherheit

des Mittelwertes vom wahren Wert

$$\boxed{u = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (xi - \mu)^2}{N \cdot (N - 1)}}}$$

Vertrauensniveau 68,2 %:
Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt der Mittelwert im u-Intervall um den wahren Wert.

Korrekturen

Erwartungswert (Mittelwert)

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Standardabweichung

der Einzelmessung vom Mittelwert

Abschätzung für die Grundgesamtheit aus der Stichprobe

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(xi - \mu)^2}{N-1}}$$

Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt ein einzelner Messwert im σ-Intervall um den wahren Wert.

14.11.

Beispielaufgabe Gaußverteilung

Messunsicherheit

des Mittelwertes vom wahren Wert

$$\mathrm{u} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(xi - \mu)^2}{N \cdot (N-1)}}$$

Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt der Mittelwert im u-Intervall um den wahren Wert.

Anzahl Messungen in der Messreihe n	Vertrauensfaktor t						
	$(1-\alpha)$ = 68,27 %	$(1-\alpha)$ = 90,00 %	$(1-\alpha)$ = 95,00 %	$(1-\alpha)$ = 95,45 %	$(1-\alpha)$ = 99,00 %	$(1-\alpha)$ = 99,73 %	$(1-\alpha)$ = 99,98 %
2	1,84	6,31	12,71	18,44	63,66	235,80	761,40
3	1,32	2,92	4,30	4,93	9,93	19,21	42,30
4	1,20	2,35	3,18	3,48	5,84	9,22	19,77
5	1,15	2,13	2,78	2,98	4,60	6,62	12,48
6	1,11	2,02	2,57	2,73	4,03	5,51	9,77
7	1,09	1,94	2,45	2,61	3,71	4,90	7,51
8	1,08	1,90	2,37	2,50	3,50	4,53	6,78
9	1,07	1,86	2,31	2,42	3,37	4,28	6,22
10	1,06	1,83	2,26	2,37	3,25	4,09	5,89
20	1,03	1,73	2,09	2,18	2,86	3,45	4,76
30	1,02	1,70	2,05	2,13	2,76	3,28	4,47
50	1,01	1,68	2,01	2,08	2,68	3,16	4,23
100	[illegible]	1,66	1,98	2,04	[illegible]	3,08	4,12
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Ggf. zusätzliche Korrektur durch Vertrauensfaktor t

$$\mathrm{u} = t\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

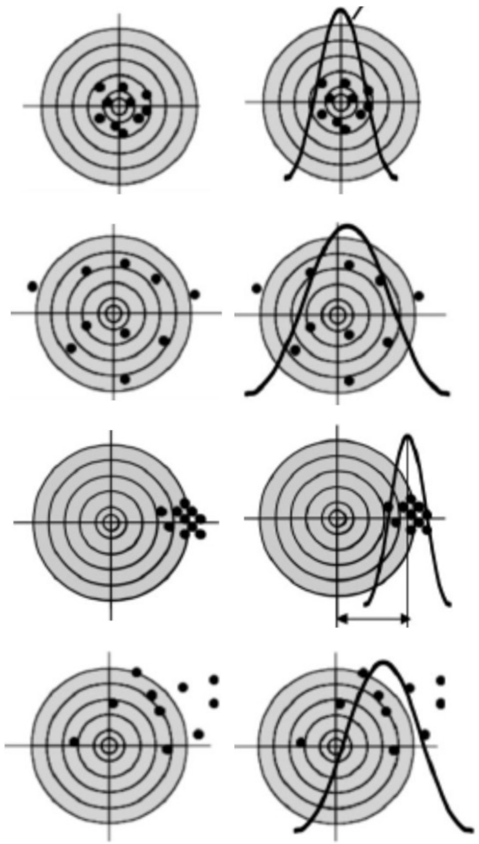
Genauigkeit

Hohe Präzision
Hohe Genauigkeit

Geringe Präzision
Hohe Genauigkeit

Hohe Präzision
Geringe Genauigkeit

Geringe Präzision
Geringe Genauigkeit



Zufälliger Fehler = Statistische Streuung

Systematische Abweichung = Offset