FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Elektrische Messtechnik

Vorlesung 3

Prof. Dr. Peter Weber

Wintersemester 2026/27

Im Studiengang Elektro- und Informationstechnik (B.Eng.)

Spielregeln in der Präsenz-Vorlesung

- Besuch der Vorlesungen erhöht die Chance auf eine Gute Note bzw. Klausurbestehen
- Ihre Fragen und Anmerkungen gehen vor - Unterbrechen Sie mich gerne, wenn ich Ihre Meldung übersehen sollte
- Keine „Side Meetings“ in der Vorlesung - Paralleldiskussionen zu zweit verbreiten zu viel Unruhe
  - ➔ Fragen, Ideen oder Anmerkungen bitte immer in die große Runde – keine Hemmungen
  - ➔ Es gibt keine dummen Fragen - Niemand wird für eine Wortmeldung „augebuht“!
- Pünktlich erscheinen - Später hereintröpfelnde Teilnehmer verbreiten Unruhe
- Verlassen der Vorlesung bitte nur zur Pause oder zum Ende (logischerweise ausgenommen Toilettengänge)
- Am Ende der Vorlesung meinen letzten Satz vor dem Aufstehen abwarten.
- Telefone auf „leise“
- Ich wünsche mir immer Ihr Feedback – sofort in der Vorlesung oder gerne auch z.B. per mail

Organisation

Vorlesung:

Mittwochs 08:15 h bis 09:45 h, Raum: Hung C 101

Donnerstags 08:15 h bis 09:45 h, Raum: Hung C 101

Start 12.10.2026

Ende 25.01.2027

CampUAS – Vorlesung (P. Weber):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4525

Weber: Elektrische Messtechnik - WiSe 26/27

Enrollment Key: alessandrovolta

CampUAS – Labor (R. Michalik):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4433

Michalik: Labor Elektrische Messtechnik - WiSe 26

Enrollment Key: MTLAB-2026

Labor (Herr Michalik):

Wichtig: Vorbesprechung Labor – Termin Kommt von Herrn Michalik

2. Semester TBD Raum: 8-205

3. Semester Montag 08:15 h bis 11:30 h Raum: 8-205

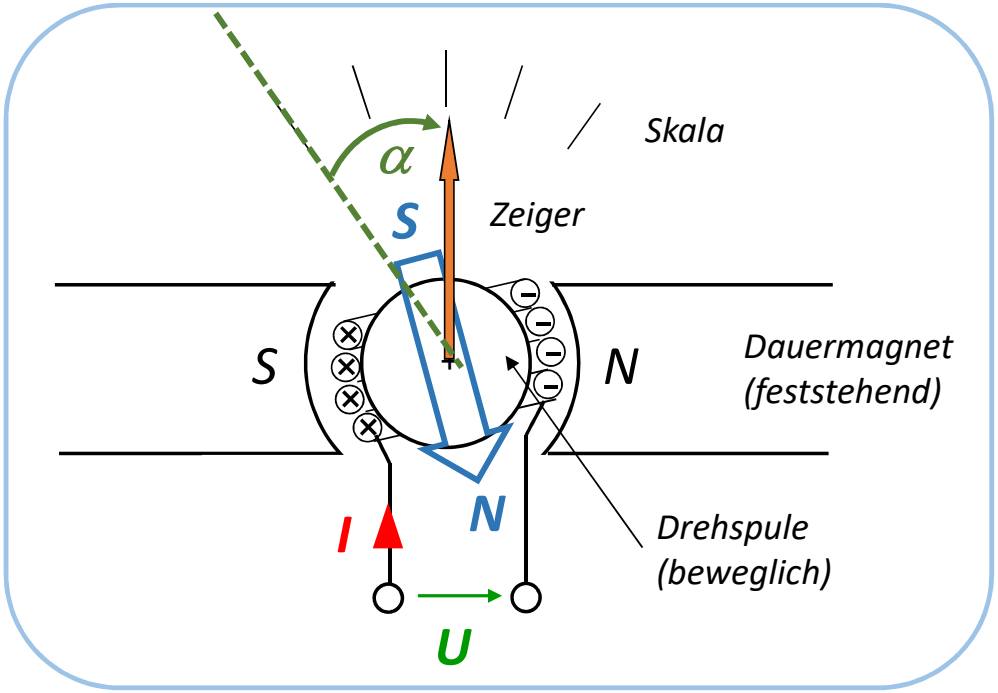
Terminorganisation bei Herrn Michalik

Bitte unbedingt in beiden Kursen einschreiben (auch bei Herrn Michalik).

Sie verpassen sonst wichtige Infos bzw. werden bei der Laborterminvergabe nicht berücksichtigt

Fehlerfortpflanzung

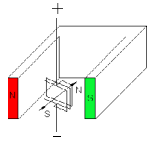
Drehspulmessgerät:
- Gleichstrom bzw. Gleichspannung
- Mittelwerte periodischer Größen

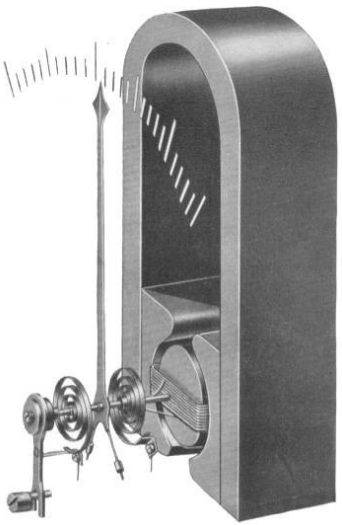


Symbol:



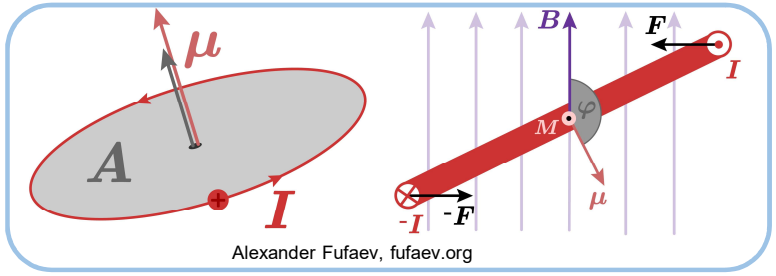
Wirkungsweise:
Kraft auf stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld





Fehlerfortpflanzung

A	**Querschnittsfläche der Spule [m²]**
n	**Anzahl der Wicklungen der Spule**
B	**Magnetfeld des Dauermagneten [Vs/m²] = [N/(Am)]**
μ	**Magnetisches Dipolmoment [Am²]**
M_{mag}	**Drehmoment des Dipols im B-Feld [Nm]**
M_{mech}	**Drehmoment der Feder [Nm]**
k	**Federkonstante [Nm/°]**



Alexander Fufaev, fufaev.org

$$\mu = n \cdot I \cdot A$$

$$M_{mag} = \vec{\mu} \times \vec{B} \approx \mu \cdot B$$

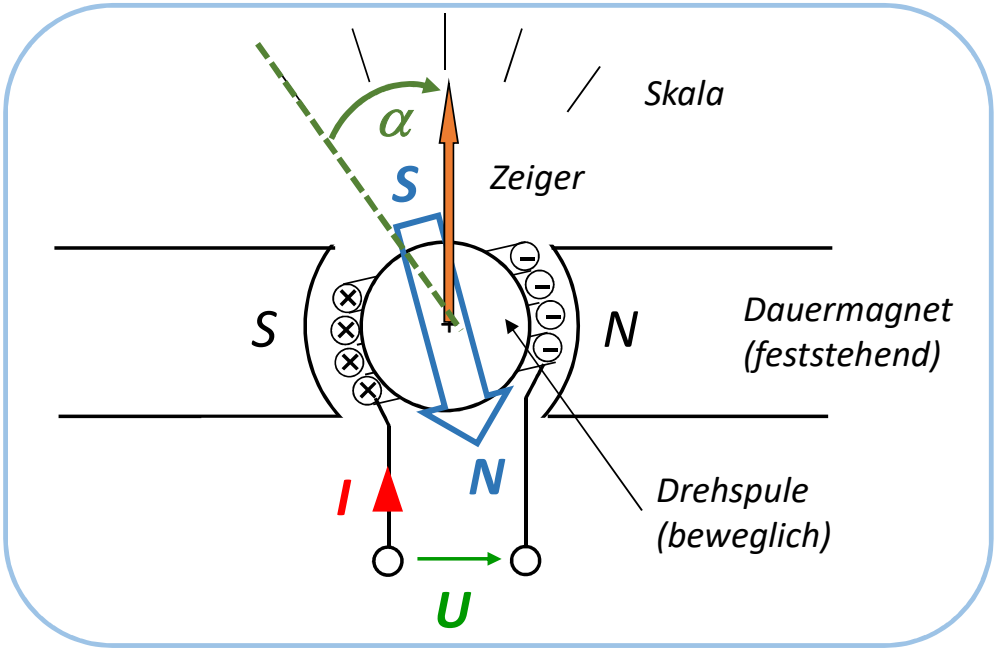
$$M_{mech} = k \cdot \alpha$$

$$M_{mech} = M_{mag}$$

$$k \cdot \alpha = \mu \cdot B = n \cdot I \cdot A \cdot B$$

$$\alpha = \frac{n \cdot A \cdot B}{k} \cdot I$$

$$I = const \cdot \alpha$$

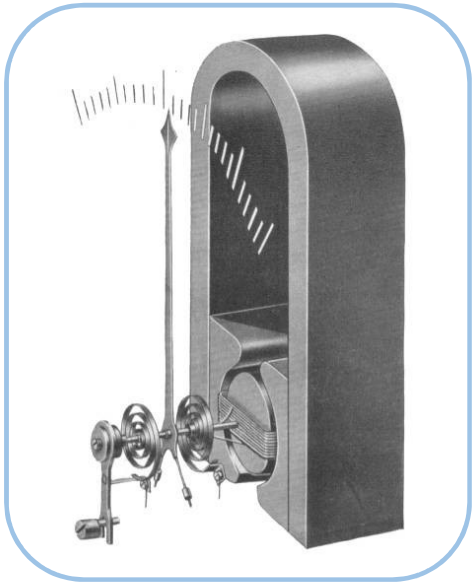


Fehlerfortpflanzung

Beispiel Drehspulmessgerät

Wir haben die folgenden wesentliche Einflussparameter ermittelt:

- **A Querschnittsfläche der Spule [m^2]**
- **n Anzahl der Wicklungen der Spule**
- **B Magnetfeld des Dauermagneten [Vs/m^2] = [N/(Am)]**
- **k Federkonstante [Nm/°]**



Der abgelesene Strom I ergibt sich dann aus dem Angezeigten Winkel:

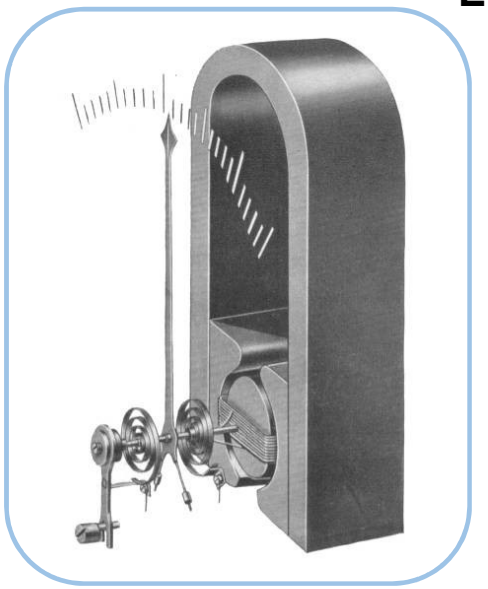
$$I = \frac{k}{n \cdot A \cdot B} \cdot \alpha$$

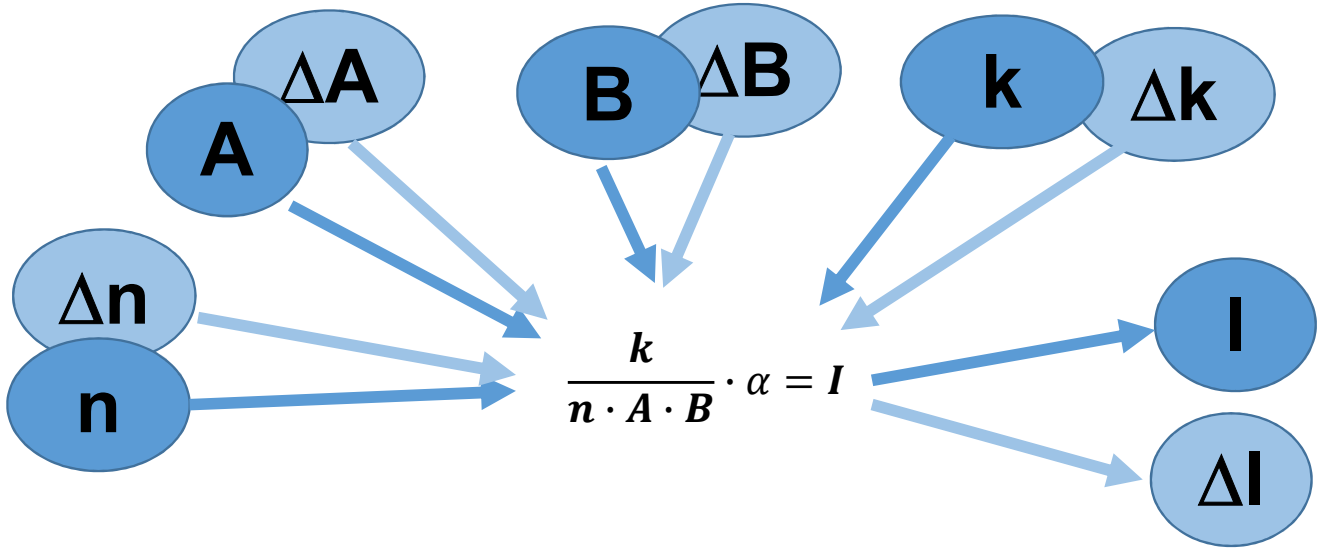
Fehlerfortpflanzung

Beispiel Drehspulmessgerät

Die Einflussparameter sind nicht unendlich genau bekannt, sondern mit einer Unsicherheit behaftet.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Unsicherheit jedes einzelnen Einflussparameters im Endergebnis niederschlägt.



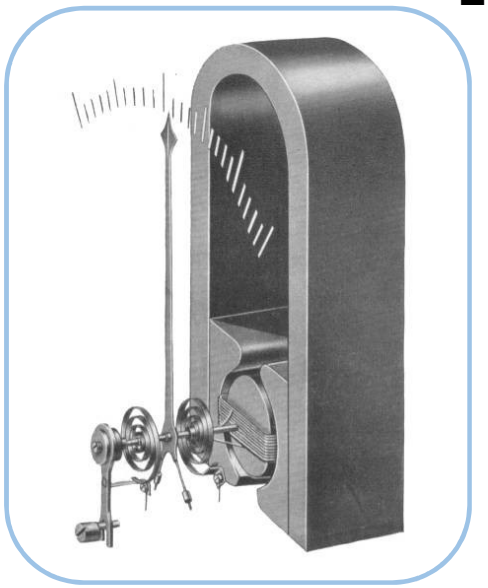


Fehlerfortpflanzung

Beispiel Drehspulmesswerk

Die Einflussparameter sind nicht unendlich genau bekannt, sondern mit einer Unsicherheit behaftet.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Unsicherheit jedes einzelnen Einflussparameters im Endergebnis niederschlägt.



$$\frac{k}{n \cdot A \cdot B} \cdot \alpha = I$$

$$const \cdot \alpha = I$$

Linearer Zusammenhang

Kalibrierung der Skala erforderlich

Fehlerfortpflanzung

Beispiel 1:
Ihr Fahrzeug bewegt sich mit exakt (!) v = 10 m/s.
Sie können indirekt über eine Zeitmessung die zurückgelegte Strecke bestimmen.
Nun ist die Zeitmessung mit einer Unsicherheit von Δt = +/-1 s behaftet.

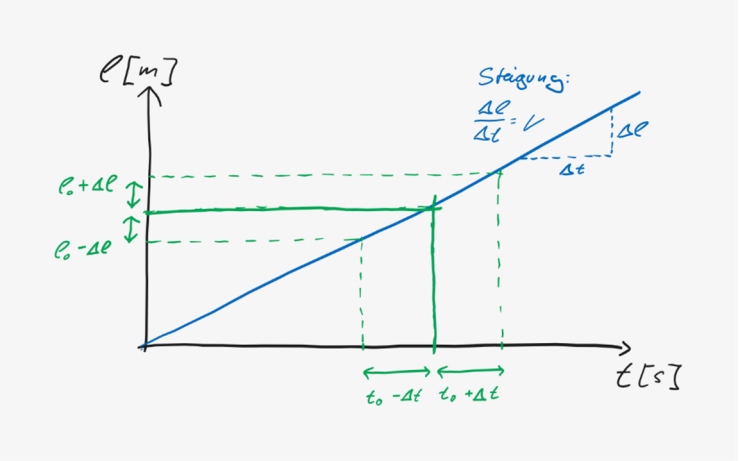
$$l = v \cdot t$$

Wenn Sie 10 s messen, haben Sie 100 m zurückgelegt.

Aufgrund der Unsicherheit kann es aber auch sein, dass nur 9 oder schon 11 Sekunden verstrichen sind.
Ihre zurückgelegte Strecke kann demnach zwischen 90 m und 110 m liegen.

Aus der Unsicherheit der Eingangsgröße Zeit von Δt = 1 s
ergibt sich eine Unsicherheit der Ausgangsgröße Strecke von Δl =10 m.

$$\Delta l = v \cdot \Delta t$$



Fehlerfortpflanzung

Beispiel 2:
Ihr Körper fällt von einer Klippe. Er wird beschleunigt.
Seine Geschwindigkeit ist veränderlich, aber immer noch zu jedem Zeitpunkt exakt bekannt (skizzierte Kurve).
Auch hier können Sie dann indirekt über eine Zeitmessung die zurückgelegte Strecke bestimmen.
Die Unsicherheit der Zeitmessung ist wieder Δt = +/-1 s.

$$l(t) = v(t) \cdot t$$

Nun erzeugt die gleiche Abweichung der Zeitmessung Δt nicht, wie im linearen Beispiel zuvor, immer die gleiche Abweichung Δl.

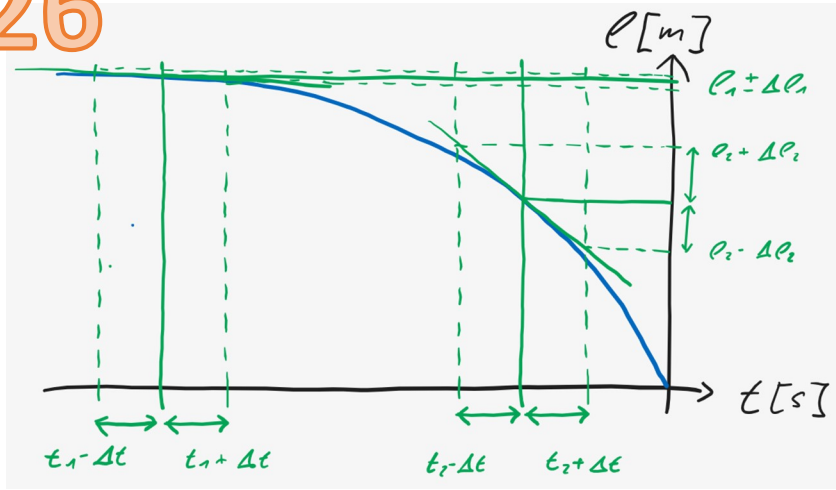
04.11.2026

Vielmehr erzeugt die Abweichung Δt zu unterschiedlichen Zeiten entlang der Bewegung unterschiedliche Abweichungen Δl.

$$\Delta l = \Delta l(t)$$

Man erkennt, dass die Abweichung Δl an jedem Punkt der Kurve von der dortigen Steigung abhängt.

Die Funktion, die jedem Punkt seine Steigung zuordnet, ist die Ableitung.



Fehlerfortpflanzung

Allgemeiner Fall der Fortpflanzung einer Unsicherheit:
Aus dem Spezialfall bei linearen Zusammenhängen

$$\Delta l(t) = v(t) \cdot \Delta t$$

folgt die Näherung für nichtlineare Zusammenhänge

$$\Delta l = \text{Steigung} \cdot \Delta t = \frac{dl}{dt} \cdot \Delta t$$

Ableitung

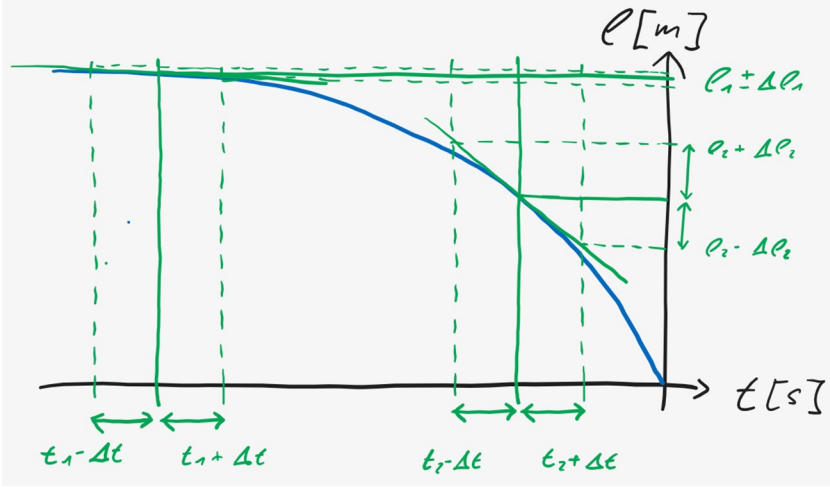
Das können wir verallgemeinern für alle Arten von Funktionen

$$y = f(x)$$

Dann ist die Messunsicherheit der berechneten Größe y:

$$\Delta y = \frac{df(x)}{dx} \cdot \Delta x$$

Wichtige Annahme:
Messunsicherheiten sind kleine Abweichungen und können daher durch die Tangente angenähert werden!



Fehlerfortpflanzung

Beispiel 3:
Wie Beispiel 1, aber nun ist die Fahrzeuggeschwindigkeit v ebenfalls eine Messgröße.
Die Geschwindigkeit v sei dann mit einer Messunsicherheit Δv = 0,5 m/s behaftet.
In der Gleichung für die zurückgelegte Strecke kommen also zwei mit Unsicherheiten behaftete Größen vor.

Angenommen, Sie messen t = 10,0 s (±1,0 s) und v = 10,0 m/s (±0,5 m/s).

In welchem Bereich liegt dann möglicherweise Ihre zurückgelegte Strecke?

$$l_{min} = v_{min} \cdot t_{min} = 9{,}5\,\frac{m}{s} \cdot 9{,}0s = 86\ m$$

$$l_{max} = v_{max} \cdot t_{max} = 10{,}5\,\frac{m}{s} \cdot 11{,}0s = 115\ m$$

Zwei mit Unsicherheiten behaftete Größen:

$$l = v \cdot t = f(v, t)$$

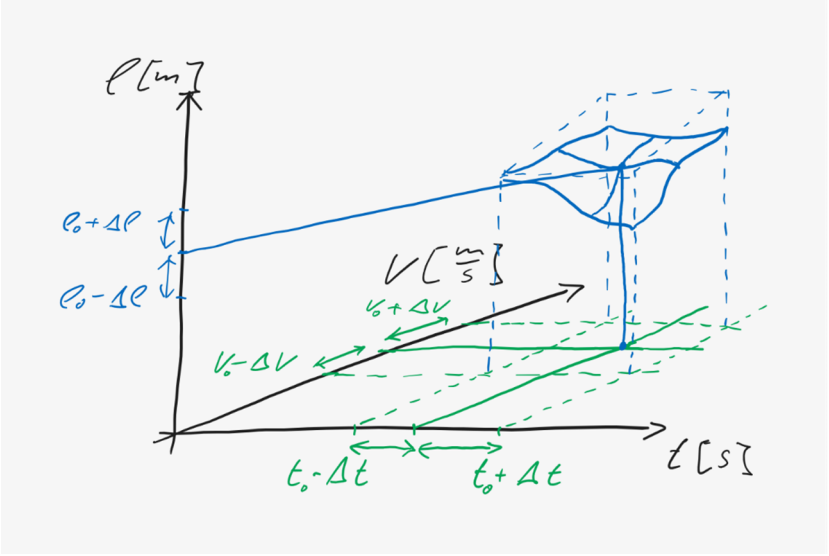
Fehlerfortpflanzung

Fehlerfortpflanzung mit zwei Einflussgrößen

- Sie bilden die 2-dimensionale Ebene (v,t) in die dritte Raumrichtung (l) ab.
- Ihre Funktion $f(v,t)$ bildet eine Fläche im Raum.
- In einem bestimmten Punkt (v_0,t_0) können Sie nun eine Tangentialebene an die Fläche $f(v,t)$ legen.
- Das tun Sie durch Bildung der partiellen Ableitungen in die beiden Richtungen v und t.
- Schließlich betrachten sie (wie im 1-dim. Fall), was die kleinen Änderungen Δv und Δt für Änderungen in dieser Tangential ebene bewirken.
- Das arithmetische Mittel liefert Ihnen dann eine Abschätzung für die zu erwartenden Schwankungen von l.

$$l = v \cdot t = f(v,t)$$

$$\Delta \mathrm{l}\,(\mathrm{v},\mathrm{t},\Delta\mathrm{v},\Delta\mathrm{t}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{l}(\mathrm{v},\mathrm{t})}{\partial v}\Delta\mathrm{v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{l}(\mathrm{v},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}\Delta\mathrm{t}\right)^2}$$



Fehlerfortpflanzung

Allgemein betrachtet man eine zu berechnende Größe (Funktion) f, die von mehreren (N vielen) fehlerbehafteten Eingangsgrößen (Variablen) abhängt:

$$f\ (x_1, \Delta x_1, x_2, \Delta x_2, \dots xN, \Delta xN)$$

- Die N Variablen und die zu berechnende Größe f spannen einen mathematischen (N+1)-dimensionalen Raum auf, in dem die Funktion f eine N-dimensionale wellige Fläche darstellt.
- Im vorangegangenen Beispiel war dieser Raum anschaulich dreidimensional, nämlich aufgespannt von der Zeit t (x_1), der Geschwindigkeit v (x_2) und der Strecke l (x_3).
- Da unsere Vorstellungskraft an Dimensionen größer 3 scheitert, müssen wir uns an dem mathematischen Formalismus entlanghangeln. Das zuvor gesehene wird konsequent weitergeführt:

$$\Delta f\ (x_1, \Delta x_1, x_2, \Delta x_2, \dots xN, \Delta xN) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial xN}\Delta xN\right)^2}$$

Fehlerfortpflanzung

Am Beispiel der einfachen Addition zweier Messwerte:

$$\mathrm{m} = m_1(\pm\Delta m_1)+m_2(\pm\Delta m_2)$$

$$\mathrm{m} = 10{,}30\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}21\ \mathrm{kg}) + 3{,}470\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}052\mathrm{kg}) \rightarrow m = 10{,}30\ \mathrm{kg} + 3{,}470\ \mathrm{kg} = 13{,}77\ \mathrm{kg}$$

$$m_{min} = 10{,}09\ \mathrm{kg} + 3{,}418\ \mathrm{kg} = 13{,}51\ \mathrm{kg}$$

$$m_{max} = 10{,}51\ \mathrm{kg} + 3{,}522\ \mathrm{kg} = 14{,}03\ \mathrm{kg}$$

$$\rightarrow m_\Delta = 14{,}032\ \mathrm{kg} - 13{,}508\ \mathrm{kg} = 0{,}524\ \mathrm{kg}$$

$$\Delta\mathrm{m} = \sqrt{\left(\frac{\partial(m_1+m_2)}{\partial m_1}\Delta m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial(m_1+m_2)}{\partial m_2}\Delta m_2\right)^2} = \sqrt{(1\cdot\Delta m_1)^2 + (1\cdot\Delta m_2)^2} = \sqrt{(0{,}21\ \mathrm{kg})^2 + (0{,}052\mathrm{kg})^2}$$

$$\Delta\mathrm{m} = 0{,}21634\ \mathrm{kg} = 0{,}22\ \mathrm{kg}$$

$$\mathrm{m} = 13{,}770\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}22\ \mathrm{kg})$$

$$m_\Delta = 2\cdot\Delta\mathrm{m} = 0{,}44\ \mathrm{kg}$$

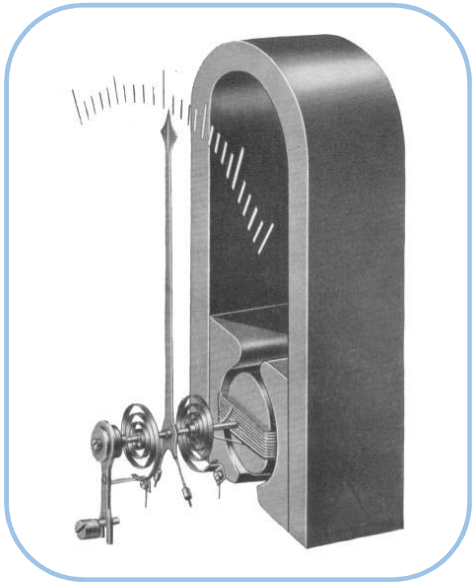
Merke: Die so berechnete Messunsicherheit ist kleiner, als die „worst case“ Abschätzung zuvor (siehe oben).

Fehlerfortpflanzung

Beispiel Drehspulmesswerk

$$\frac{k}{n \cdot A \cdot B} \cdot \alpha = I$$

Konkretes Rechenbeispiel



• Querschnittsfläche der Spule [mm²]:	A = 90,0 mm²	(± 5,0 %)
• Anzahl der Wicklungen der Spule:	N = 10	(± 0 %)
• Magnetfeld [Vs/m2] = [N/(Am)] = [T]:	B = 1,00 T	(± 5,0 %)
• Federkonstante [Nm/°]:	k = 1,00 10^{-6} Nm/°	(± 3,0 %)
• Winkel:	α = 90°	(± 1 %)

Berechnen Sie „von Hand“ unter Berücksichtigung der Regeln hinsichtlich gültiger bzw. Nachkommastellen:

a) **Den Sollwert, also den Wert, der sich ohne Messunsicherheiten ergibt.**
b) **Die obere Grenze bei Ausnutzung der angegebenen Messunsicherheiten.**
c) **Die untere Grenze bei Ausnutzung der angegebenen Messunsicherheiten.**
d) **Die aus den beiden Grenzen resultierende Mittellage.**
e) **Die Messunsicherheit der Stromstärke I mithilfe der differentiellen Fehlerfortpflanzung.**