

Elektrische Messtechnik

Vorlesung 2

Prof. Dr. Peter Weber

Wintersemester 2025/26

Im Studiengang Elektro- und Informationstechnik (B.Eng.)

Spielregeln in der Präsenz-Vorlesung

- Besuch der Vorlesungen erhöht die Chance auf eine Gute Note bzw. Klausurbestehen
- Ihre Fragen und Anmerkungen gehen vor - Unterbrechen Sie mich gerne, wenn ich Ihre Meldung übersehen sollte
- Keine „Side Meetings“ in der Vorlesung - Paralleldiskussionen zu zweit verbreiten zu viel Unruhe
 - ➔ Fragen, Ideen oder Anmerkungen bitte immer in die große Runde – keine Hemmungen
 - ➔ Es gibt keine dummen Fragen - Niemand wird für eine Wortmeldung „augebuht“!
- Pünktlich erscheinen - Später hereintröpfelnde Teilnehmer verbreiten Unruhe
- Verlassen der Vorlesung bitte nur zur Pause oder zum Ende (logischerweise ausgenommen Toilettengänge)
- Am Ende der Vorlesung meinen letzten Satz vor dem Aufstehen abwarten.
- Telefone auf „leise“
- Ich wünsche mir immer Ihr Feedback – sofort in der Vorlesung oder gerne auch z.B. per mail

Organisation

Vorlesung:

Montag 08:15 h bis 11:30 h Raum: Hung C-101

Start 13.07.2025 - Ende 26.01.2026

Labor (Herr Michalik):

Montag 11:45 h bis 15:45 h Raum: 8-205

Terminorganisation bei Herrn Michalik

CampUAS – Vorlesung (P. Weber):

<https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4525>

Weber: Elektrische Messtechnik - WiSe 25/26

Enrollment Key: alessandrovolta

CampUAS – Labor (R. Michalik):

<https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4433>

Michalik: Labor Elektrische Messtechnik - WiSe 25

Enrollment Key: MTLAB-WiSe2025

Wichtig: Vorbesprechung Labor – Termin Kommt von Herrn Michalik

Bitte unbedingt in beiden Kursen einschreiben (auch bei Herrn Michalik).

Sie verpassen sonst wichtige Infos bzw. werden bei der Laborterminvergabe nicht berücksichtigt

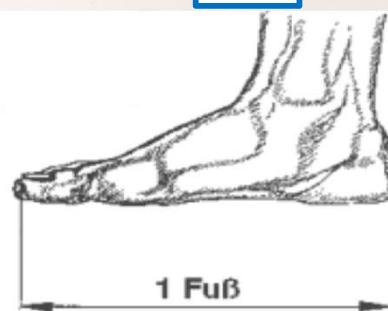
Ursprünge des Messens

Nippur- „Elle“: Ältester physisch überliefelter **Maßstab**,

Sumerer, fast 7000 Jahre alt, Kupfer



Von Aeroid - Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39514098>



1 Finger	=	1,72 cm
1 Fuß	=	27,65 cm
1 Arm	=	51,80 cm

1 Fuß	=	16,08	Finger
1 Arm	=	1,87	Fuß
1 Arm	=	30,12	Finger

Ursprünge des Messens



Von Andrew Dunn - Eigenes Werk, CC BY-SA 2.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=196078>



Von Operarius - File:Stonehenge, Salisbury.JPG, CC BY 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4493066>

Begriffe der Messtechnik

Messtechnik	Überbegriff aller technischen Verfahren, Mittel und Tätigkeiten zum Zweck des Messens
Messen	Tätigkeiten zum quantitativen Vergleich von Messgrößen mit einer Einheit an einem Messobjekt
Messobjekt	Träger der Messgröße
Messgröße	Physikalische Größe, die durch Messung erfasst werden soll
Messwert	Der gemessene Wert der Messgröße . Ein Vielfaches der Maßeinheit.
(Maß-)einheit	Der Bezugswert zum gemessenen Wert der Messgröße

Zum Beispiel: Die Länge
Zum Beispiel: 5
Zum Beispiel: 1 Meter

Begriffe um das Mess-Equipment

Messgerät	Gerät zur Bestimmung von Messgrößen (auch: Messmittel)	Zum Beispiel Thermometer: Wärmeausdehnung
Messprinzip	Beschreibung der ausgenutzten physikalischen Zusammenhänge	Zum Beispiel: Digital, analog, per Nullabgleich, per Differenzmessung
Messmethode	Spezielle, vom Messprinzip unabhängige Art des Vorgehens bei der Messung	

Begriffe um das Messverfahren

Messverfahren

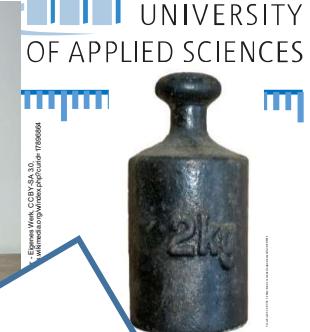
Praktische Anwendung eines Messprinzips und einer Messmethode

Direktes Messverfahren

Messwert einer Messgröße wird durch unmittelbaren Vergleich mit einem Bezugswert derselben Messgröße gewonnen

Indirektes Messverfahren

Messwert einer Messgröße wird über eine andere physikalische Größe indirekt ermittelt



Zum Beispiel:
Längenmessung, Wiegen



Zum Beispiel:
Flüssigkeitsthermometer



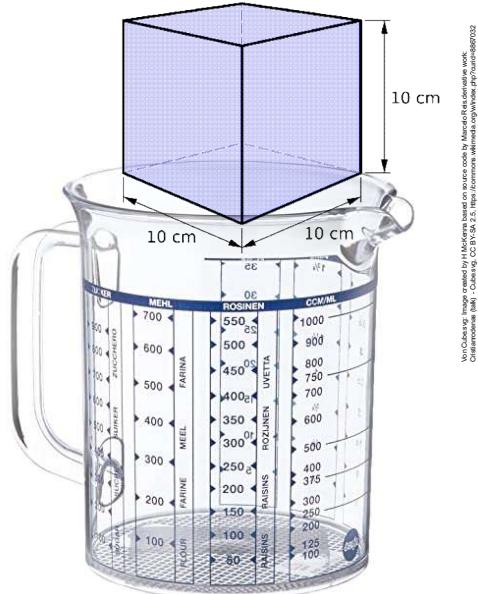
Begriffe - Illustriert



Von Openlther - Eigene Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1786864>



Von Lohfisch - CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=109282>



Von Cholewiak - Image created by MANDIform based on image made by Marcus Reichenauer (relic). CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=369002>

Messen heißt vergleichen

Eine (physikalische) Größe wird als Vielfaches oder Bruchteil einer Vergleichsgröße angegeben.

Messen quantifiziert eine Eigenschaft eines physikalischen Objektes (= in Zahlen darstellen)

Maßzahl

12 Fuß

Maßeinheit



Messen - Direkt oder indirekt

Beispiel Lufttemperatur – Messprinzip:

→ Wärmeübertragung

→ Wärmeausdehnung

→ Längenänderung

Maßverkörperung – Beispiel Länge

Verwendung menschlicher Körperteile → Probleme bei der Reproduzierbarkeit

→ Schon die Sumerer erkannten das offenbar und definierten einen
Vergleichs- bzw. Referenzmaßstab, die sog. Nippur-Elle

Dennoch gab es in Laufe der Zeit überall ständig neue, andere Definitionen von Maßstäben.

Schließlich entstand Ende des 18. Jahrhunderts eine neue Einheit, das Meter, welche sich innerhalb von 100 Jahren weltweit durchsetzt.

Ausnahme bleibt der angelsächsische Sprachraum, wo jedoch letztendlich die Einheiten Yard und Pound auch auf das Meter und das kg des internationalen Systems (SI) zurückgeführt werden.



Das Internationale Einheitensystem

Meter m

Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von (1/ 299 792 458) Sekunden durchläuft.

Kilogramm kg

Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

Sekunde s

Die Sekunde ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids 133 Cs entsprechenden Strahlung.

Ampere A

Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je einem Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.

Kelvin K

Das Kelvin, die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

Mol mol

Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 0,012 Kilogramm des Kohlenstoffnuklids 12 C enthalten sind. Bei Benutzung des Mol müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.

Candela cd

Die Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hertz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung ($1/ 683$) Watt durch Steradian beträgt.

Das Internationale Einheitensystem

Basisgrößen

Haben keine Definition im Sinne einer Rückführung auf schon bekannte Größen

Abgeleiteten Größen

Lassen sich aus den Basisgrößen entwickeln

Für die Basisgrößen sind **Basiseinheiten** definiert, aus denen sich die für die abgeleiteten Größen geltenden abgeleiteten Einheiten ergeben.

Beispiele hergeleiteter Größen

Physikalische Größe		Name der Einheit		Definition bzw.
Formelzeichen		nach SI		Umrechnung aus den SI Basiseinheiten
Kraft	F	Newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$
Energie	W	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$
Leistung	P	Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ Nm/s} = 1 \text{ J/s}$
Druck	p	Pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
Ladung	Q	Coulomb	C	$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$
Spannung	U	Volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W/A} = 1 \text{ Nm/As}$
Widerstand	R	Ohm	Ω	$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$
Kapazität	C	Farad	F	$1 \text{ F} = 1 \text{ As/V} = 1 \text{ C/V}$
Induktivität	L	Henry	H	$1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/A}$
mag. Fluss	Φ	Weber	Wb	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$
mag. Flussdichte	B	Tesla	T	$1 \text{ T} = 1 \text{ Vs/m}^2 = 1 \text{ Wb/m}^2$

Größenordnungen

1	1×10^0		
10	1×10^1	Deka [da]	
100	1×10^2	Hekto [h]	
1.000	1×10^3	Tausend	Kilo [k]
10.000	1×10^4		
100.000	1×10^5		
1.000.000	1×10^6	Million	Mega [M]
10.000.000	1×10^7		
100.000.000	1×10^8		
1.000.000.000	1×10^9	Milliarde	Giga [G]
10.000.000.000	1×10^{10}		
100.000.000.000	1×10^{11}		
1.000.000.000.000	1×10^{12}	Billion	Terra [T]
10.000.000.000.000	1×10^{13}		
100.000.000.000.000	1×10^{14}		
1.000.000.000.000.000	1×10^{15}	Billiarde	Peta [P]

1	1×10^0		
0,1	1×10^{-1}	Dezi [d]	
0,01	1×10^{-2}	Zenti [c]	
0,001	1×10^{-3}	Milli [m]	
0,0001	1×10^{-4}		
0,00001	1×10^{-5}		
0,000001	1×10^{-6}	Mikro [μ]	
0,0000001	1×10^{-7}		
0,00000001	1×10^{-8}		
0,000000001	1×10^{-9}	Nano [n]	
0,0000000001	1×10^{-10}		
0,00000000001	1×10^{-11}		
0,000000000001	1×10^{-12}	Piko [p]	
0,0000000000001	1×10^{-13}		
0,00000000000001	1×10^{-14}		
0,000000000000001	1×10^{-15}	Femto [f]	

Rückführbarkeit von Maßstäben

Physikalisch Technische Bundesanstalt (PTB):

- Zentrale Organisation in Deutschland
- Sicherstellung einheitlicher Messstandards

Eichen (Hoheitliche Aufgabe)

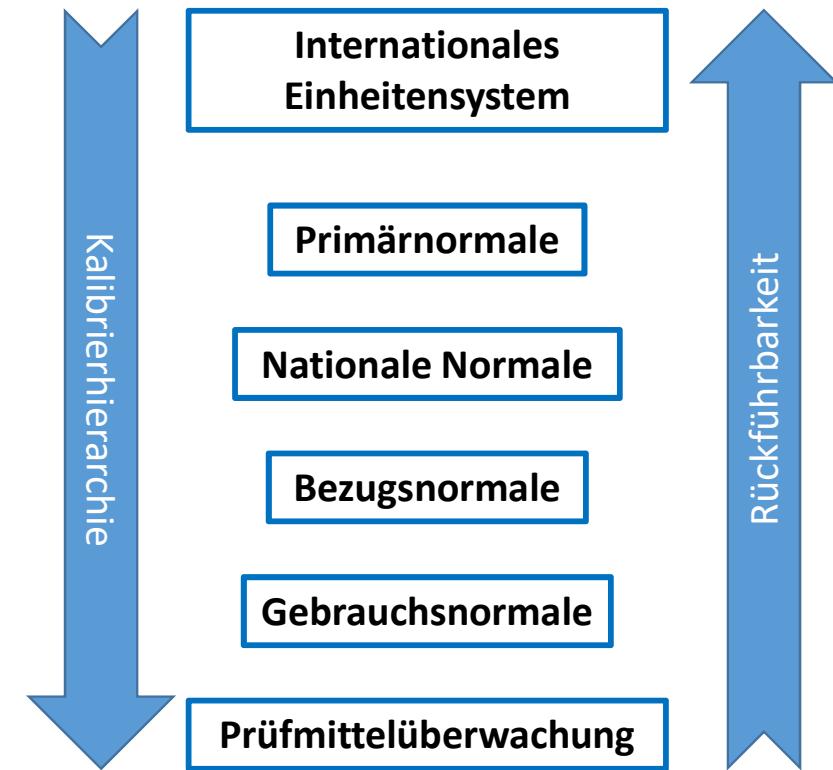
- Darf nur von öffentlichen bzw. benannten Stellen durchgeführt werden
- Überall da, wo das öffentliche Interesse an der Messung hängt, z.B.
 - Handel
 - Verbraucherschutz
 - Medizin

Kalibrieren (z.B. durch staatlich akkreditierte K.-Labore):

- Messprozess zur Feststellung der Abweichung eines Messgerätes oder einer Maßverkörperung gegenüber einem anderen Gerät oder einer anderen Maßverkörperung (Normal)

Justieren (durch den Anwender):

- Einstellen oder Abgleichen eines Messgerätes, um systematische Abweichungen so weit zu beseitigen, wie es für die vorgesehene Anwendung erforderlich ist.



Begriffe der Messtechnik

Maßverkörperung

Träger einer definierten physikalischen Größe.

Normal

Maßverkörperung, das als Referenzmittel dient, um Messgeräte zu **kalibrieren** oder zu **eichen**

Kalibrierung

Zuordnung einer Skala eines Messgerätes, die das Ablesen der gesuchten Messgröße erlaubt

Feststellung und Dokumentation der Abweichung von Anzeigewerten eines **Messgerätes**

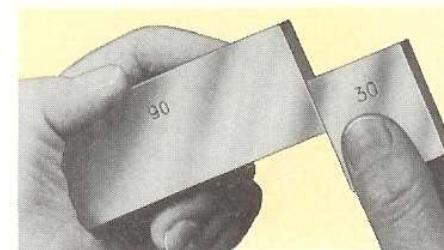
Maßverkörperungen - Längenmessung

Maßverkörperungen

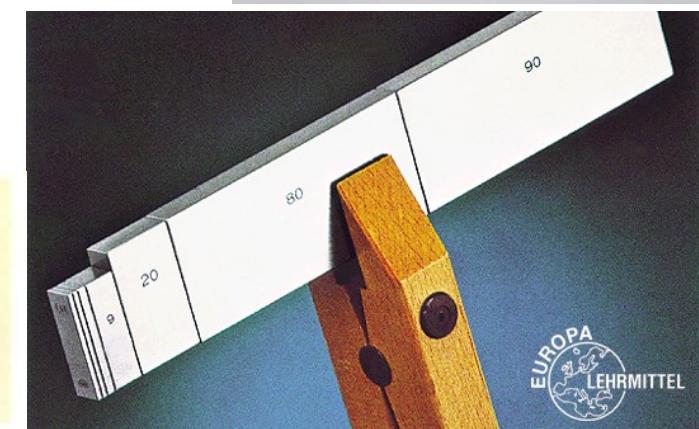
- Grundlage jeder Längenmessung ist der direkte oder indirekte Vergleich mit einer Maßverkörperung.
- Akkreditierte Kalibrierlabore stellen sicher, dass eine Maßverkörperung korrekt auf ein „nationales Normal“ rückführbar ist.

Beispiel Parallelendmaß

- Allrounder unter den Maßverkörperungen
- Zweck: Messung durch direkten Vergleich (z.B. Kalibrieren anderer Messmittel)
- Maßübertragung mittels hochwertig bearbeiteter paralleler Endflächen
- Parallelendmaße lassen sich beliebig kombinieren
- Anforderung an die Flächen:
 - Geringe Parallelitätsabweichung
 - Geringe Welligkeit und Rauheit
 - Sauberkeit
 - Beschädigungsfrei



Anschieben von Parallelendmaßen



Kombination von Parallelendmaßen

Maßverkörperungen - Längenmessung

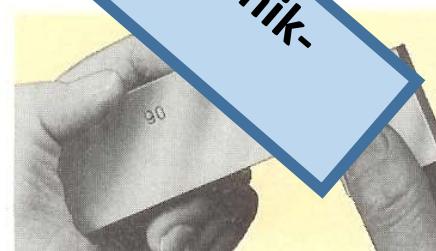
Maßverkörperungen

- Grundlage jeder Längenmessung ist der direkte oder indirekte Vergleich mit einer Maßverkörperung.
- Akkreditierte Kalibrierlaboratorien garantieren, dass eine Maßverkörperung korrekt auf ein „nationales Normal“ rückgeführt ist.

Beispiel Parallelendmaß

- Allrounder unter den Maßverkörperungen
- Zweck: Messung durch direkten Vergleich (nicht über Zähler oder andere Messmittel)
- Maßübertragung mittels hochwertig bearbeiteter und abgerundeter Endflächen
- Parallelendmaße lassen sich beliebig kombinieren
- Anforderung an die Flächen:
 - Geringe Parallelitätsabweichung
 - Geringe Welligkeit und Rauheit
 - Sauberkeit
 - Beschädigungsfrei

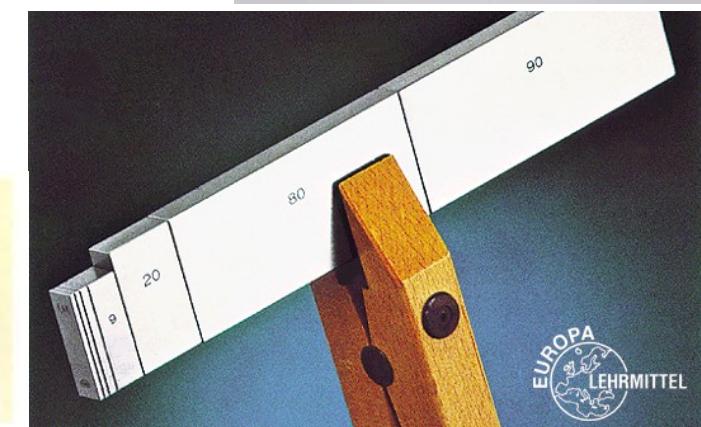
Maßverkörperung im Elektrotechnik-Bereich?



Anschieben von Parallelendmaßen



Von Speer 1910 - Eigens Werk, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=83190065>

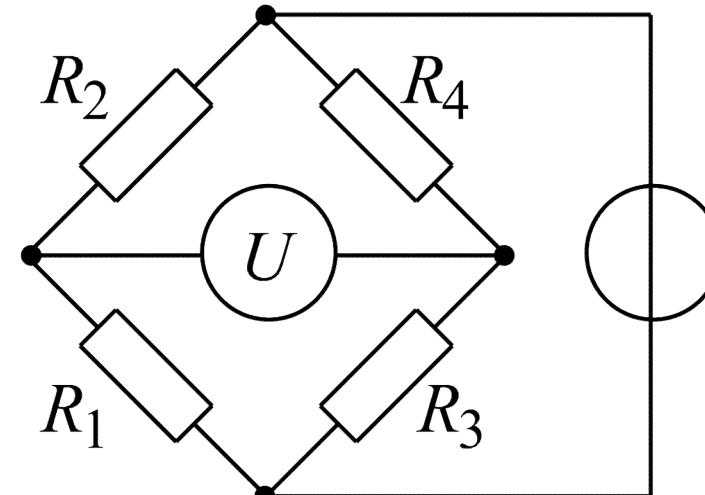


Kombination von Parallelendmaßen

Maßverkörperungen - Widerstandsmessung



Normalwiderstand, 1 Ohm +/- 0,001%,
Siemens & Halske, 1897



Wheatstone Brücke

<https://www.historische-messtechnik.de/hisgeriete-ind-zubehoer/zubehoer/normalwiderstaende/index.html>

Begriffe um das Messergebnis

Messergebnis

Aus den **Messungen** gewonnener Schätzwert für den **wahren Wert** einer **Messgröße**

Wahrer Wert

Der **wahren Wert** einer **Messgröße** ist eine unbekannte Größe, die man nur mit einer gewissen **Messunsicherheit** bestimmen kann.

Mess- unsicherheit

Bereich, innerhalb dessen der **wahre Wert** der **Messgröße** mit einer anzugebenden Wahrscheinlichkeit liegt (unterscheide: **Messabweichung**)

Mess- abweichung

Differenz zwischen einem **Messwert** und einem **Referenzwert**

Referenzwert

Sehr genau bekannter **Messwert** einer **Messgröße** (z.B. mit einem hochgenauen **Messgerät** bestimmt)

Begriffe um das Messergebnis

**Auflösung
(Ablesegenauigkeit)**

Kleinster Abstand zweier gemessener Größen, bei dem die beiden Größen vom Messsystem noch unterschieden werden können

Bei einer Skala in der Regel:
 $\frac{1}{2}$ des Skalenteilungswertes

**Skalen- (teilungs)
wert**

Differenz der Messgrößen zweier benachbarter Skalenstriche

**Genauigkeit
(Accuracy)**

Präzision (precision) = Wiederholgenauigkeit
Richtigkeit (trueness) = Systematische Abweichung

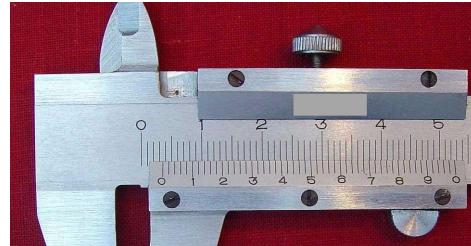
Kleine Übung



Von Simon A. Egster - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7892806>

Auflösung: 0,5 mm

Skalenwert: 1 mm



Von I_ArtMechanic, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=204558>



Von Ulfbastel - Eigenes Werk, Gemeinfrei,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2880165>

Auflösung: 0,1 A

Skalenwert: 0,2 A



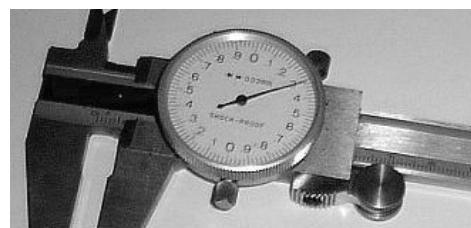
Von Photograph taken by Glenn McKechnie - Eigenes Werk, CC BY-SA 2.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=511799>



Von Saure - Selbst fotografiert, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9691280>

Auflösung: 0,01 V

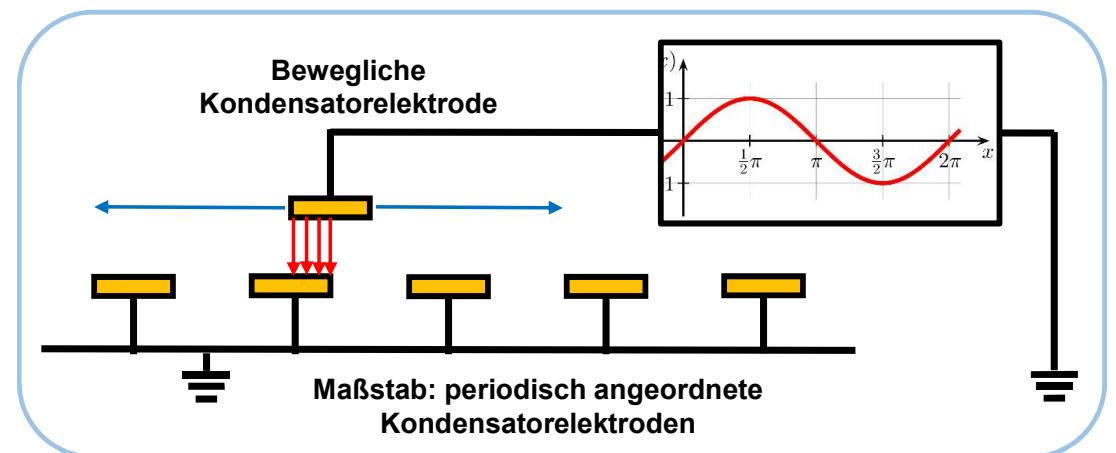
Skalenwert: 0,5 V



Beispiel: Digitalisierung von Messwerten

Zum Beispiel Messschieber der Firma Mitutoyo:

- Kapazitives Auslesen eines Vergleichsmaßstabes
- Die obere Kondensatorelektrode bewegt sich relativ zum periodischen Maßstab.
- Die Elektronik zählt die Durchgänge des Sinus-Signals.
- Dann ist die Periode der Struktur (unten) des Maßstabs ausschlaggebend für die Anzeigegenauigkeit.
- Wird die bewegliche Kondensatorelektrode (oben) mit einer „nonius-artigen“ Struktur versehen, erhöht sich die Genauigkeit entsprechend



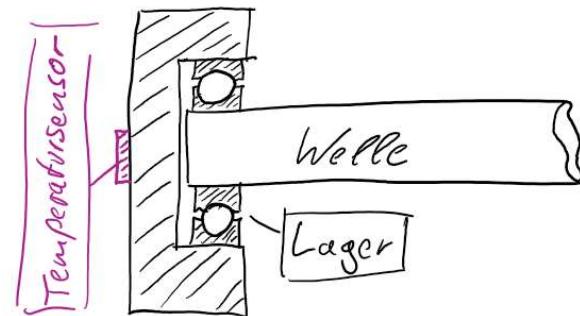
Messabweichungen

Arten von Messabweichungen

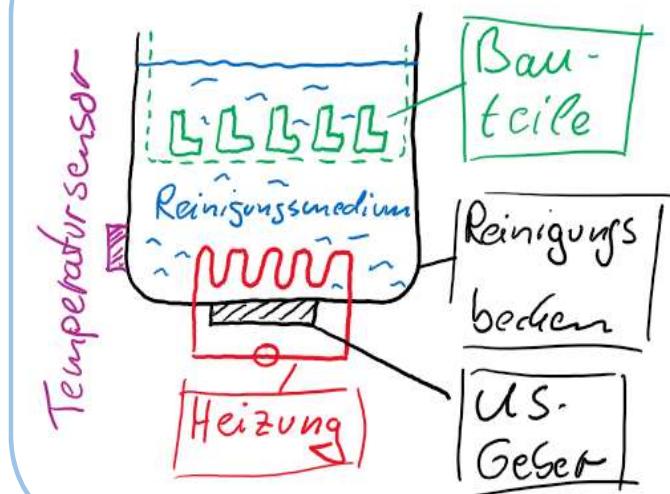
- Zu vereinfachtes Modell des zu messenden Systems
- Innere Störgrößen, z.B. Alterung von Teilen des Messsystems
- Äußere Störgrößen, z.B. Veränderliche Klimaeinflüsse
- Rückwirkung, z. B. Wärmeeintrag durch einen Temperatursensor
- Einflüsse des Bedieners, z.B. ungenaue Ablesung, Justage
- Dynamische Fehler, bei schnell veränderlichen Messgrößen
- Digitalisierung
- Und weitere...

20.10.2025

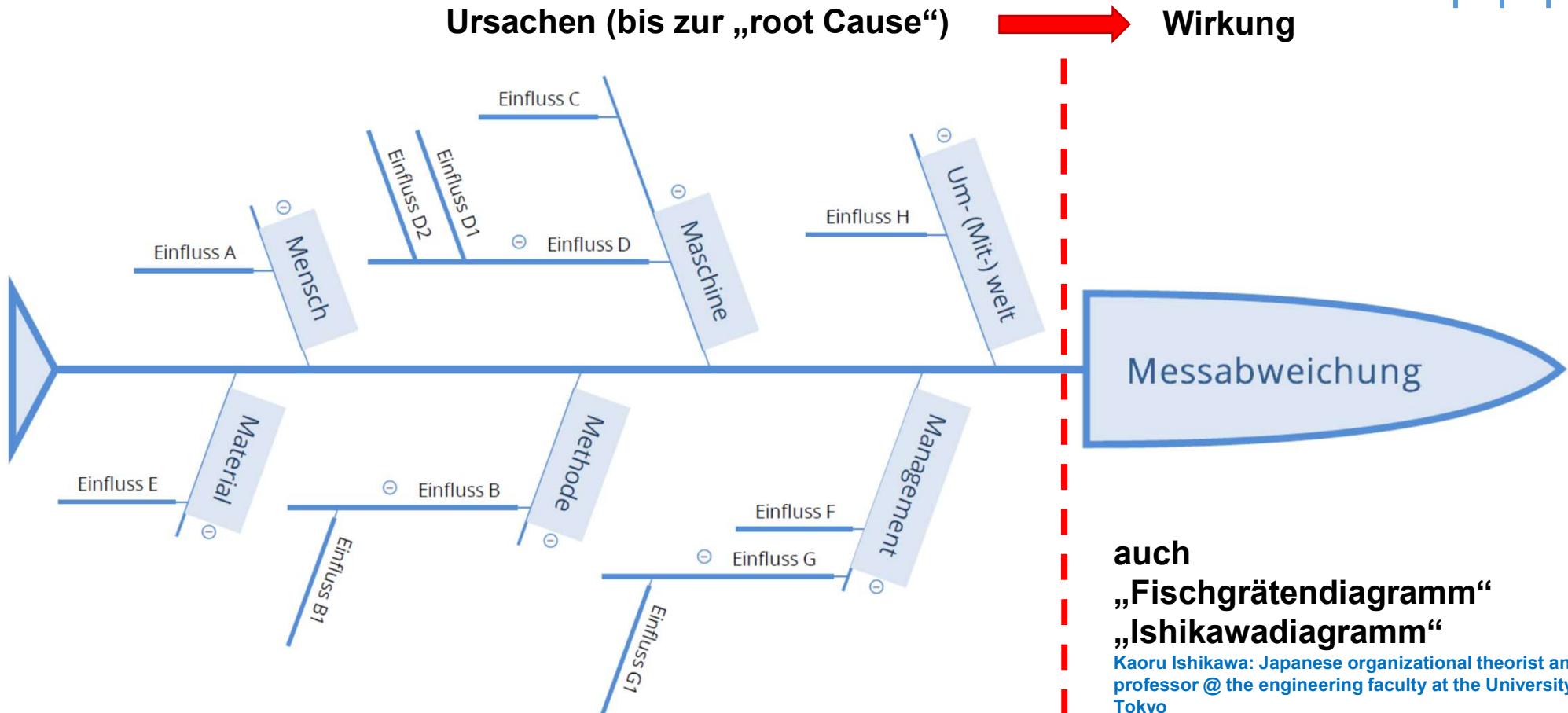
Beispiel Lagertemperatur



Beispiel Reinigungsprozess



Ursache-Wirkung-Diagramm



Messabweichungen

Man unterscheidet

Systematische Messabweichungen

- Ursache und Art der Einwirkung bekannt
- Prinzipiell durch erhöhter Aufwand im Messsystem kompensierbar

Zufällige Messabweichungen

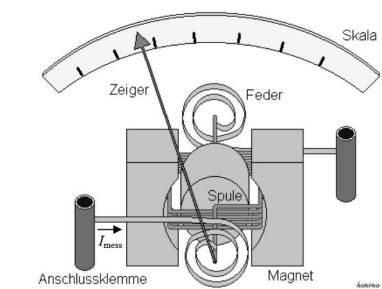
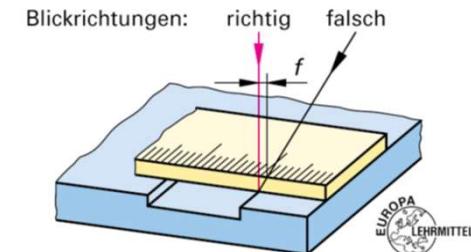
- Zufällig
- Überlagerung vieler unbekannte Einwirkung

Beispiel zufälliger Messabweichungen

Prozessmessung mit dem Messschieber im Dreischichtbetrieb:

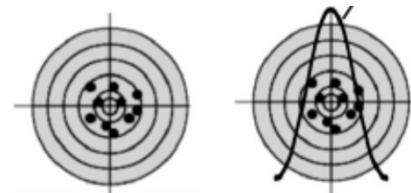
- 40 verschiedene MA
- Alle machen unterschiedliche kleine systematische Fehler
- Die resultierenden Abweichungen sind zufällig

Beispiele systematischer Messabweichungen

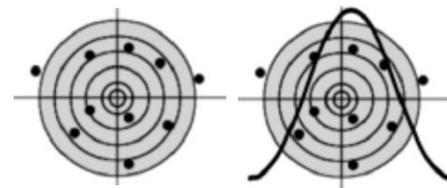


Genauigkeit

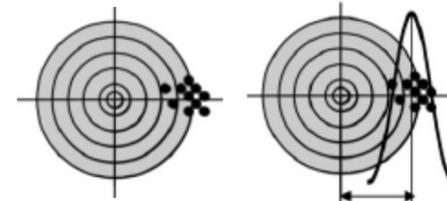
**Hohe Präzision
Hohe Genauigkeit**



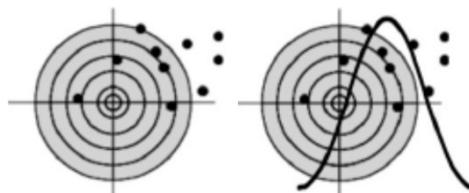
**Geringe Präzision
Hohe Genauigkeit**



**Hohe Präzision
Geringe Genauigkeit**



**Geringe Präzision
Geringe Genauigkeit**



Zufälliger Fehler = Statistische Streuung

Systematische Abweichung = Offset

Gültige Stellen – Genauigkeit Arithmetisch

Die Anzahl der angegebenen Nachkommastellen physikalischer Größen ist NICHT beliebig!

Multiplikation und Division:

Im Ergebnis ist die Zahl gültiger Stellen die kleinste Zahl gültiger Stellen der Faktoren.

Addition und Subtraktion

Im Ergebnis nicht mehr Nachkommastellen, als Nachkommastellen beim Summanden mit der kleinsten Anzahl Nachkommastellen.

„Kaufmännisches“ Runden

Ist die erste gestrichene Stelle eine 1...4, dann bleibt die erste angegebene Stelle stehen

Ist die erste gestrichene Stelle eine 5...9, dann wird die erste angegebene Stelle um 1 erhöht

$$\begin{aligned} 0,24 &\rightarrow 0,2 \\ 0,25 &\rightarrow 0,3 \end{aligned}$$

10,7 kg
→ Masse zwischen
10,65 kg und 10,74 kg.

10,77 kg
→ Masse zwischen
10,765 kg und 10,774 kg.

Gültige Stellen – Genauigkeit Arithmetisch

Bestimmen Sie das Ergebnis und beachten Sie die Regeln zu den gültigen Stellen

$$m = 7,874 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,12 \text{ m}^3$$

$$\rho = \frac{15,67 \cdot 10^3 \text{ kg}}{3,25 \text{ m}^3}$$

$$m = 10 \text{ kg} + 3 \text{ kg}$$

$$m = 10 \text{ kg} - 3 \text{ kg}$$

$$m = 1,003 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,02 \text{ m}^3$$

$$\rho = \frac{20,01 \cdot 10^3 \text{ kg}}{0,02 \cdot 10^2 \text{ m}^2}$$

$$m = 10,3 \text{ kg} + 3,47 \text{ kg}$$

$$m = 10,3 \text{ kg} - 3,47 \text{ kg}$$

$$m = 20 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 300 \text{ m}^3$$

$$\rho = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ kg}}{300 \text{ m}^3}$$

$$m = 0,003 \text{ kg} + 0,0005 \text{ kg}$$

$$m = 0,003 \text{ kg} - 0,0005 \text{ kg}$$

Gültige Stellen – Genauigkeit Arithmetisch

Multiplication & Division:
kleinste Zahl signifikante Stellen

$$m = \underbrace{7,874}_{4 \text{ signifikante Stellen}} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \underbrace{0,12}_{2 \text{ signifikante Stellen}} \text{ m}^3$$

$$= 0,94488 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

2 signifikante Stellen

$$\rho = \frac{\overbrace{15,67}^4 \cdot 10^3 \text{ kg}}{\underbrace{3,25}_{3} \text{ m}^3}$$

$$= \underbrace{4,82}_{3} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$m = \underbrace{1,003}_{1} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \underbrace{0,02}_{1} \text{ m}^3$$

$$= 0,02006 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{\overbrace{20,01}^4 \cdot 10^3 \text{ kg}}{\underbrace{0,02}_{1} \cdot 10^2 \text{ m}^2}$$

$$= \underbrace{1000,5}_{1} \cdot 10^1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$m = \underbrace{20}_{2} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \underbrace{300}_{3} \text{ m}^3$$

$$= 6000 \cdot 10^3 \text{ kg} = 60 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{\overbrace{20}^2 \cdot 10^3 \text{ kg}}{\underbrace{300}_{3} \text{ m}^3}$$

$$= \underbrace{0,06667}_{2} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 67 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Addition & Subtraktion
kleinste Zahl Nachkommastellen

$$m = \underbrace{10}_{0 \text{ Nachkommastellen}} \text{ kg} + \underbrace{3}_{0 \text{ Nachkommastellen}} \text{ kg}$$

$$= 13 \text{ kg}$$

0 Nachkommastellen

$$m = \underbrace{10,3}_{1} \text{ kg} + \underbrace{3,47}_{2} \text{ kg}$$

$$= 13,77 \text{ kg} = 13,8 \text{ kg}$$

$$m = \underbrace{0,003}_{3} \text{ kg} + \underbrace{0,0005}_{4} \text{ kg}$$

$$= 0,0035 \text{ kg} = 0,004 \text{ kg}$$

$$m = \underbrace{10}_{0 \text{ Nachkommastellen}} \text{ kg} - \underbrace{3}_{0 \text{ Nachkommastellen}} \text{ kg}$$

$$= 7 \text{ kg}$$

0 Nachkommastellen

$$m = \underbrace{10,3}_{1} \text{ kg} - \underbrace{3,47}_{2} \text{ kg}$$

$$= 6,83 \text{ kg} = 6,8 \text{ kg}$$

$$\frac{10,3}{-3,47} \overline{)6,83}$$

$$m = \underbrace{0,003}_{3} \text{ kg} - \underbrace{0,0005}_{4} \text{ kg}$$

$$= 0,0025 \text{ kg} = 0,003 \text{ kg}$$

Fazit zum Runden

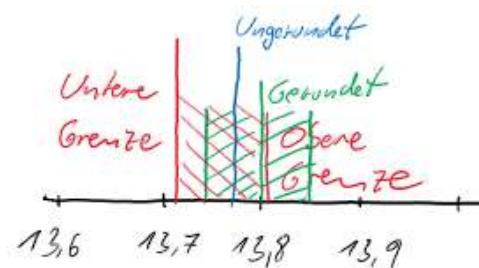
Die zuvor gelernten Daumenregeln für Multiplikation und Addition zu gültigen bzw. Nachkommastellen sind nur Näherungen.

Denn Rechnung mit den nach Rundungskonvention definierten oberen und unteren Grenzen der Einzelwerte zeigt, dass der Überlapp mit der nach Daumenregel bestimmten Spanne nicht 100 % gegeben ist.

Runden nach Daumenregel (grün)

$$m = 10,3 \text{ kg} + 3,47 \text{ kg} = 13,77 \text{ kg} = 13,8 \text{ kg}$$

Spanne: (13,75..13,84) kg



Rechnen mit gerundeten max. / min. (rot)

$$m_{\min} = 10,25 \text{ kg} + 3,465 \text{ kg} = 13,715 \text{ kg} = 13,72 \text{ kg}$$

$$m_{\max} = 10,34 \text{ kg} + 3,474 \text{ kg} = 13,814 \text{ kg} = 13,81 \text{ kg}$$

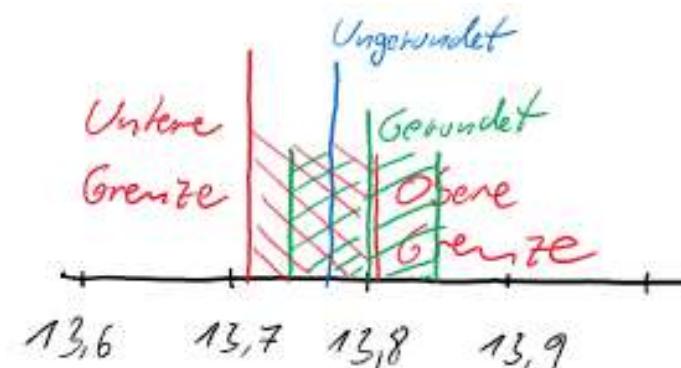
Spanne: (13,72..13,81) kg

Fazit zum Runden

Die Anfangs gegebenen Werte erlauben eine Genauigkeit im Rahmen der roten Grenzen.

Das nach Daumenregel gerundete Ergebnis erlaubt eine Spanne, die zumindest zum Teil Überlapp mit dem roten Bereich hat.

Das ungerundete Ergebnis liegt zwar innerhalb des roten Bereichs, ist also sicher ein richtiges Ergebnis. Es definiert aber nur einen minimalen Spanne, also ist der Überlapp seiner Lösungsmenge mit dem roten Bereich viel geringer. Es ist falsch, weil eine viel zu hohe Genauigkeit suggeriert wird.



Mit anderen Worten:

- Wenn keine detailliertere Betrachtung möglich ist, sind die Daumenregeln das Mittel der Wahl.
- **In der Messtechnik benötigen wir aber häufig eine noch bessere Methode:
Das ist die individuelle Angabe von Messunsicherheiten pro Wert.**

Umgang mit Messunsicherheiten

In der Messtechnik geben wir zu jedem gemessenen Wert eine Messunsicherheit an.

Beispiel: Addition zweier gemessener Massen:

$$m = m_1 + m_2 = 10,30 \text{ kg} + 3,47 \text{ kg}$$

Zum Beispiel: $m = 10,30 \text{ kg} (\pm 2,0\%) + 3,47 \text{ kg} (\pm 1,5\%)$ relativ

$$m = 10,30 \text{ kg} (\pm 0,206 \text{ kg}) + 3,47 \text{ kg} (\pm 0,05205 \text{ kg})$$
 absolut

$$m = 10,30 \text{ kg} (\pm 0,21 \text{ kg}) + 3,47 \text{ kg} (\pm 0,05 \text{ kg})$$
 Messunsicherheit gerundet

Messunsicherheiten werden mit
ein oder zwei gültigen Stellen
angegeben (nicht mehr)

Umgang mit Messunsicherheiten

In der Messtechnik geben wir zu jedem gemessenen Wert eine Messunsicherheit an.

$$m = m_1(\pm \Delta m_1) + m_2(\pm \Delta m_2)$$

$$m = 10,30 \text{ kg } (\pm 0,21 \text{ kg}) + 3,47 \text{ kg } (\pm 0,05 \text{ kg})$$

$$\longrightarrow m_{nenn} = 10,30 \text{ kg} + 3,47 \text{ kg} = 13,77 \text{ kg}$$

$$m_{min} = 10,09 \text{ kg} + 3,42 \text{ kg} = 13,51 \text{ kg}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} m_{\Delta} = \frac{1}{2} (14,03 \text{ kg} - 13,51 \text{ kg}) = 0,26 \text{ kg}$$

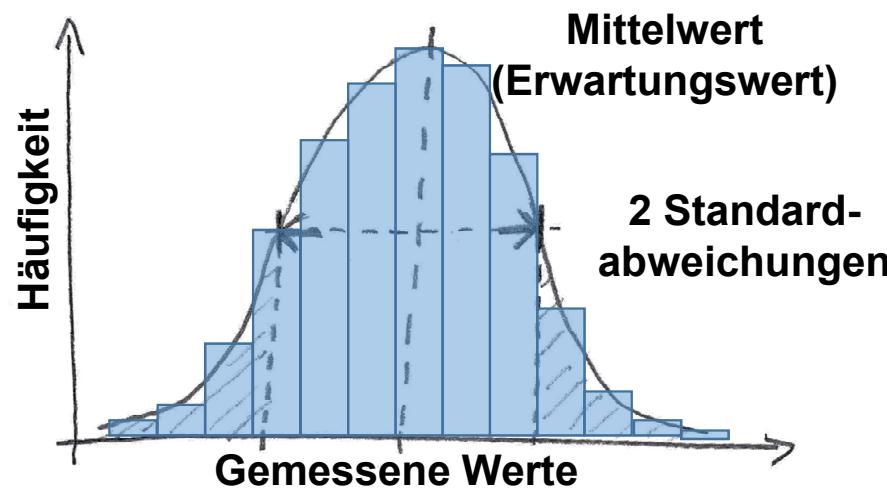
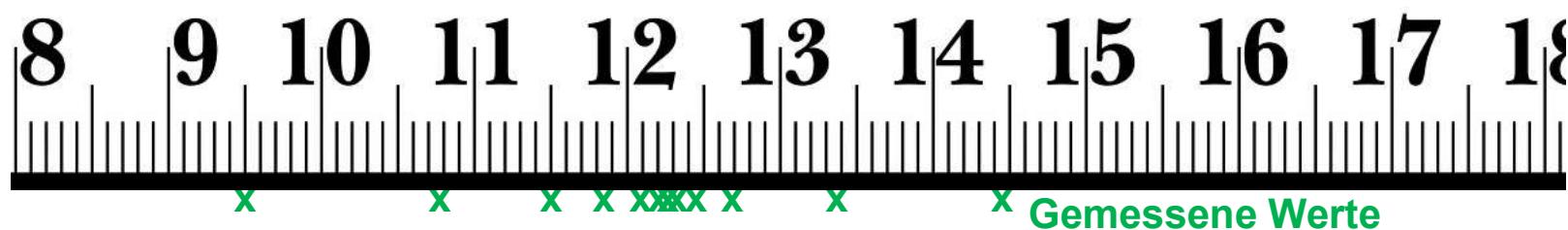
$$m_{max} = 10,51 \text{ kg} + 3,52 \text{ kg} = 14,03 \text{ kg}$$

$$m = 13,77 \text{ kg } (\pm 0,26 \text{ kg})$$

$$m = 13,77 \text{ kg } (\pm 1,9 \%)$$

- **Bedenken Sie, dass die Messunsicherheit statistisch ist: Der „wahre“ Wert kann auch jenseits der „Grenze“ liegen, es ist nur weniger wahrscheinlich.**
- **Das führt zu Abweichungen von der min./max. Betrachtung.**
- **Wie wir damit umgehen, sehen wir später.**

Streuung



Die Gaußsche Normalverteilung

Erwartungswert (Mittelwert)

$$\mu = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_N)}{N}$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Standardabweichung

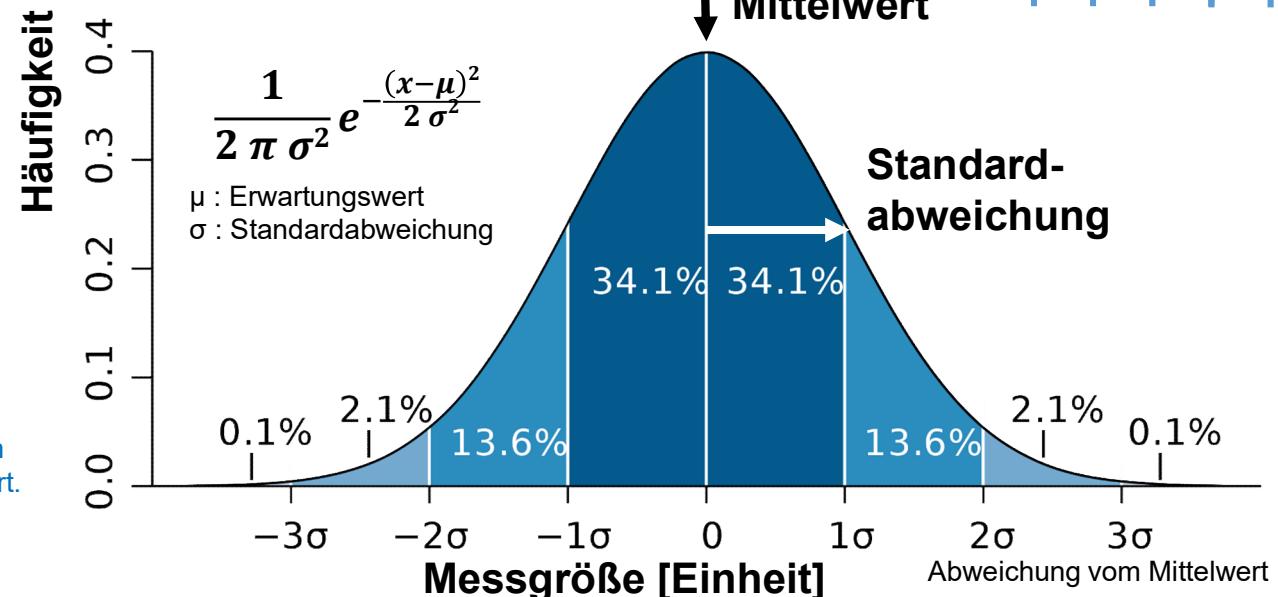
der Einzelmessung vom Mittelwert

Abschätzung für die Grundgesamtheit aus der Stichprobe

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{N - 1}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (xi - \mu)^2}{N - 1}}$$

Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit
liegt ein einzelner Messwert im
 σ -Intervall um den wahren Wert.



Von M. W. Toews - Eigenes Werk, based (in concept) on figure by Jeremy Kemp, on 2005-02-09, CC BY 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1903871>

Messunsicherheit
des Mittelwertes vom wahren Wert

$$u = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (xi - \mu)^2}{N \cdot (N - 1)}}$$

Vertrauensniveau 68,2 %:
Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit
liegt der Mittelwert im u-Intervall
um den wahren Wert.

Korrekturen

Erwartungswert (Mittelwert)

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Standardabweichung

der Einzelmessung vom Mittelwert

Abschätzung für die Grundgesamtheit aus der Stichprobe

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N - 1}}$$

Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt ein einzelner Messwert im σ -Intervall um den wahren Wert.

Messunsicherheit des Mittelwertes vom wahren Wert

$$u = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N \cdot (N - 1)}}$$

Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt der Mittelwert im u -Intervall um den wahren Wert.

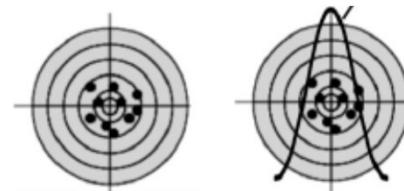
Anzahl Messungen in der Messreihe n	Vertrauensfaktor t						
	$(1 - \alpha) = 68,27\%$	$(1 - \alpha) = 90,00\%$	$(1 - \alpha) = 95,00\%$	$(1 - \alpha) = 95,45\%$	$(1 - \alpha) = 99,00\%$	$(1 - \alpha) = 99,73\%$	$(1 - \alpha) = 99,98\%$
2	1,84	6,31	12,71	18,44	63,66	235,80	761,40
3	1,32	2,92	4,30	4,93	9,93	19,21	42,30
4	1,20	2,35	3,18	3,48	5,84	9,22	19,77
5	1,15	2,13	2,78	2,98	4,60	6,62	12,48
6	1,11	2,02	2,57	2,73	4,03	5,51	9,77
7	1,09	1,94	2,45	2,61	3,71	4,90	7,51
8	1,08	1,90	2,37	2,50	3,50	4,53	6,78
9	1,07	1,86	2,31	2,42	3,37	4,28	6,22
10	1,06	1,83	2,26	2,37	3,25	4,09	5,89
20	1,03	1,73	2,09	2,18	2,86	3,45	4,76
30	1,02	1,70	2,05	2,13	2,76	3,28	4,47
50	1,01	1,68	2,01	2,08	2,68	3,16	4,23
100	1,00	1,66	1,98	2,04	2,63	3,08	4,12
200	1,00	1,65	1,97	2,02	2,60	3,04	4,06
$n \rightarrow \infty$	1,00	1,65	1,96	2,00	2,58	3,00	4,00

Ggf. zusätzliche Korrektur durch Vertrauensfaktor t

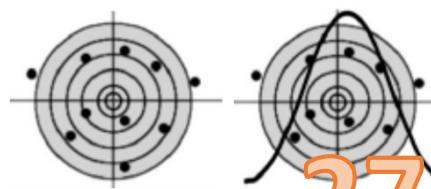
$$u = t \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Genauigkeit

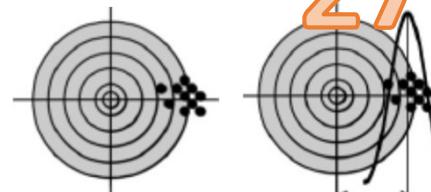
Hohe Präzision
Hohe Genauigkeit



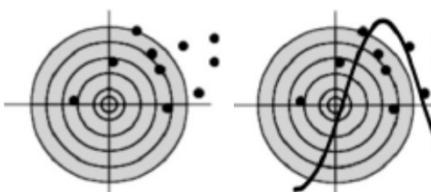
Geringe Präzision
Hohe Genauigkeit



Hohe Präzision
Geringe Genauigkeit



Geringe Präzision
Geringe Genauigkeit



Zufälliger Fehler = Statistische Streuung

Systematische Abweichung = Offset

