FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Elektrische Messtechnik

Vorlesung 2

Prof. Dr. Peter Weber

Wintersemester 2026/27

Im Studiengang Elektro- und Informationstechnik (B.Eng.)

Spielregeln in der Präsenz-Vorlesung

- Besuch der Vorlesungen erhöht die Chance auf eine Gute Note bzw. Klausurbestehen
- Ihre Fragen und Anmerkungen gehen vor - Unterbrechen Sie mich gerne, wenn ich Ihre Meldung übersehen sollte
- Keine „Side Meetings“ in der Vorlesung - Paralleldiskussionen zu zweit verbreiten zu viel Unruhe
  - ➔ Fragen, Ideen oder Anmerkungen bitte immer in die große Runde – keine Hemmungen
  - ➔ Es gibt keine dummen Fragen - Niemand wird für eine Wortmeldung „augebuht“!
- Pünktlich erscheinen - Später hereintröpfelnde Teilnehmer verbreiten Unruhe
- Verlassen der Vorlesung bitte nur zur Pause oder zum Ende (logischerweise ausgenommen Toilettengänge)
- Am Ende der Vorlesung meinen letzten Satz vor dem Aufstehen abwarten.
- Telefone auf „leise“
- Ich wünsche mir immer Ihr Feedback – sofort in der Vorlesung oder gerne auch z.B. per mail

Organisation

Vorlesung:

Mittwochs 08:15 h bis 09:45 h, Raum: Hung C 101

Donnerstags 08:15 h bis 09:45 h, Raum: Hung C 101

Start 12.10.2026

Ende 25.01.2027

CampUAS – Vorlesung (P. Weber):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4525

Weber: Elektrische Messtechnik - WiSe 26/27

Enrollment Key: alessandrovolta

CampUAS – Labor (R. Michalik):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4433

Michalik: Labor Elektrische Messtechnik - WiSe 26

Enrollment Key: MTLAB-2026

Labor (Herr Michalik):

Wichtig: Vorbesprechung Labor – Termin Kommt von Herrn Michalik

2. Semester TBD Raum: 8-205

3. Semester Montag 08:15 h bis 11:30 h Raum: 8-205

Terminorganisation bei Herrn Michalik

Bitte unbedingt in beiden Kursen einschreiben (auch bei Herrn Michalik).

Sie verpassen sonst wichtige Infos bzw. werden bei der Laborterminvergabe nicht berücksichtigt

Ursprünge des Messens

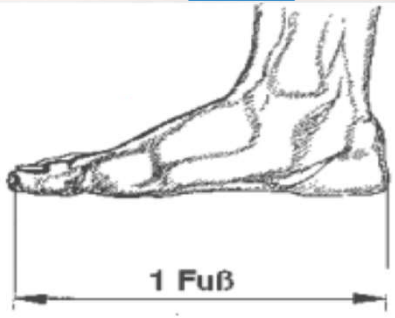


Nippur- „Elle“: Ältester physisch überlieferter **Maßstab**,

Sumerer, fast 7000 Jahre alt, Kupfer



Von Aeroid - Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39514098



1	Finger	=	1,72	cm
1	Fuß	=	27,65	cm
1	Arm	=	51,80	cm

1	Fuß	=	16,08	Finger
1	Arm	=	1,87	Fuß
1	Arm	=	30,12	Finger

Ursprünge des Messens



Von Andrew Dunn - Eigenes Werk, CC BY-SA 2.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=196078



Von Operarius - File:Stonehenge, Salisbury.JPG, CC BY 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4493066

Begriffe der Messtechnik

Messtechnik	Überbegriff aller technischen Verfahren, Mittel und Tätigkeiten zum Zweck des Messens
Messen	Tätigkeiten zum quantitativen Vergleich von Messgrößen mit einer Einheit an einem Messobjekt
Messobjekt	Träger der Messgröße
Messgröße	Physikalische Größe, die durch Messung erfasst werden soll
Messwert	Der gemessene Wert der Messgröße. Ein Vielfaches der Maßeinheit.
(Maß-)einheit	Der Bezugswert zum gemessenen Wert der Messgröße

Zum Beispiel: Die Länge

Zum Beispiel: 5

Zum Beispiel: 1 Meter

Begriffe um das Mess-Equipment

Messgerät	**Gerät zur Bestimmung von Messgrößen (auch: Messmittel)**
Messprinzip	**Beschreibung der ausgenutzten physikalischen Zusammenhänge**
Messmethode	**Spezielle, vom Messprinzip unabhängige Art des Vorgehens bei der Messung**

Zum Beispiel Thermometer: Wärmeausdehnung

Zum Beispiel: Digital, analog, per Nullabgleich, per Differenzmessung

Begriffe um das Messverfahren



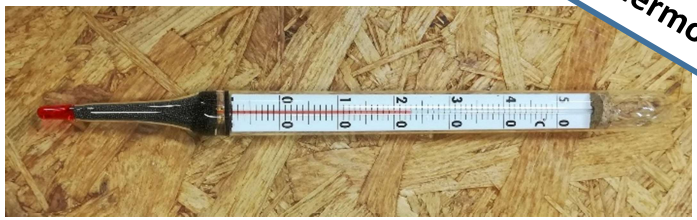


Messverfahren	**Praktische Anwendung eines Messprinzips und einer Messmethode**
Direktes Messverfahren	**Messwert einer Messgröße wird durch unmittelbaren Vergleich mit einem Bezugswert derselben Messgröße gewonnen**
Indirektes Messverfahren	**Messwert einer Messgröße wird über eine andere physikalische Größe indirekt ermittelt**

Zum Beispiel: Längenmessung, Wiegen



Zum Beispiel: Flüssigkeitsthermometer

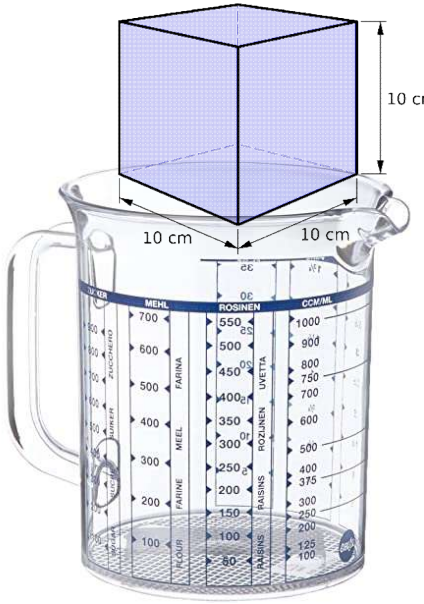


Begriffe - Illustriert









Messen heißt vergleichen

Eine (physikalische) Größe wird als Vielfaches oder Bruchteil einer Vergleichsgröße angegeben.

Messen quantifiziert eine Eigenschaft eines physikalischen Objektes (= in Zahlen darstellen)

Maßzahl 12 Maßeinheit Fuß

Messen - Direkt oder indirekt

Beispiel Lufttemperatur – Messprinzip:

➔Wärmeübertragung

➔Wärmeausdehnung

➔Längenänderung



Maßverkörperung – Beispiel Länge

Verwendung menschlicher Körperteile ➔ Probleme bei der Reproduzierbarkeit

➔Schon die Sumerer erkannten das offenbar und definierten einen

Vergleichs- bzw. Referenzmaßstab, die sog. Nippur-Elle

Dennoch gab es in Laufe der Zeit überall ständig neue, andere Definitionen von Maßstäben.

Schließlich entstand Ende des 18. Jahrhunderts eine neue Einheit, das Meter, welche sich innerhalb von 100 Jahren weltweit durchsetzt.

Ausnahme bleibt der angelsächsische Sprachraum, wo jedoch letztendlich die Einheiten Yard und Pound auch auf das Meter und das kg des internationalen Systems (SI) zurückgeführt werden.



Das Internationale Einheitensystem

Meter m

Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von (1/ 299 792 458) Sekunden durchläuft.

Kilogramm kg

Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

Sekunde s

Die Sekunde ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids 133 Cs entsprechenden Strahlung.

Ampere A

Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je einem Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.

Kelvin K

Das Kelvin, die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

Mol mol

Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 0,012 Kilogramm des Kohlenstoffnuklids 12 C enthalten sind. Bei Benutzung des Mol müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.

Candela cd

Die Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hertz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung (1/ 683) Watt durch Steradiant beträgt.

Das Internationale Einheitensystem

Basisgrößen
Haben keine Definition im Sinne einer Rückführung auf schon bekannte Größen

Abgeleiteten Größen
Lassen sich aus den Basisgrößen entwickeln

Für die Basisgrößen sind **Basiseinheiten** definiert, aus denen sich die für die abgeleiteten Größen geltenden abgeleiteten Einheiten ergeben.

Beispiele hergeleiteter Größen

Physikalische Größe	Formelzeichen	Name der Einheit	nach SI	Definition bzw. Umrechnung aus den SI Basiseinheiten
Kraft	F	Newton	N	1 N = 1 kg m/s²
Energie	W	Joule	J	1 J = 1 Nm
Leistung	P	Watt	W	1 W = 1Nm/s=1 J/s
Druck	p	Pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m²
Ladung	Q	Coulomb	C	1 C = 1 As
Spannung	U	Volt	V	1 V = 1 W/A = 1 Nm/As
Widerstand	R	Ohm	Ω	1 Ω = 1 V/A
Kapazität	C	Farad	F	1 F = 1 As/V =1C/V
Induktivität	L	Henry	H	1 H = 1 Vs/A
mag. Fluss	Φ	Weber	Wb	1 Wb = 1 Vs
mag. Flussdichte	B	Tesla	T	1 T = 1 Vs/m²= 1 Wb/m²

Größenordnungen

1	$1x10^{0}$		
10	$1x10^{1}$		Deka [da]
100	$1x10^{2}$		Hekto [h]
1.000	$1x10^{3}$	Tausend	Kilo [k]
10.000	$1x10^{4}$		
100.000	$1x10^{5}$		
1.000.000	$1x10^{6}$	Million	Mega [M]
10.000.000	$1x10^{7}$		
100.000.000	$1x10^{8}$		
1.000.000.000	$1x10^{9}$	Milliarde	Giga [G]
10.000.000.000	$1x10^{10}$		
100.000.000.000	$1x10^{11}$		
1.000.000.000.000	$1x10^{12}$	Billion	Terra [T]
10.000.000.000.000	$1x10^{13}$		
100.000.000.000.000	$1x10^{14}$		
1.000.000.000.000.000	$1x10^{15}$	Billiarde	Peta [P]

1	$1x10^{0}$	
0,1	$1x10^{-1}$	Dezi [d]
0,01	$1x10^{-2}$	Zenti [c]
0,001	$1x10^{-3}$	Milli [m]
0,0001	$1x10^{-4}$	
0,00001	$1x10^{-5}$	
0,000001	$1x10^{-6}$	Mikro [µ]
0,0000001	$1x10^{-7}$	
0,00000001	$1x10^{-8}$	
0,000000001	$1x10^{-9}$	Nano [n]
0,0000000001	$1x10^{-10}$	
0,00000000001	$1x10^{-11}$	
0,000000000001	$1x10^{-12}$	Piko [p]
0,0000000000001	$1x10^{-13}$	
0,00000000000001	$1x10^{-14}$	
0,000000000000001	$1x10^{-15}$	Femto [f]

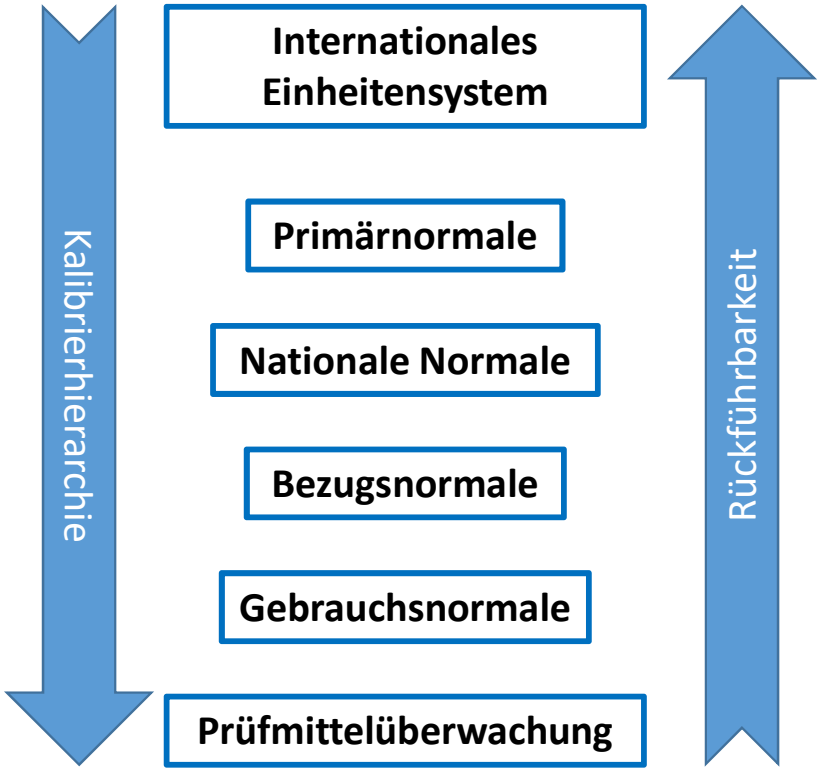
Rückführbarkeit von Maßstäben

Physikalisch Technische Bundesanstalt (PTB):
- Zentrale Organisation in Deutschland
- Sicherstellung einheitlicher Messstandards

Eichen (Hoheitliche Aufgabe)
- Darf nur von öffentlichen bzw. benannten Stellen durchgeführt werden
- Überall da, wo das öffentliche Interesse an der Messung hängt, z.B.
  - Handel
  - Verbraucherschutz
  - Medizin

Kalibrieren (z.B. durch staatlich akkreditierte K.-Labore):
- Messprozess zur Feststellung der Abweichung eines Messgerätes oder einer Maßverkörperung gegenüber einem anderen Gerät oder einer anderen Maßverkörperung (Normal)

Justieren (durch den Anwender):
- Einstellen oder Abgleichen eines Messgerätes, um systematische Abweichungen so weit zu beseitigen, wie es für die vorgesehene Anwendung erforderlich ist.



Begriffe der Messtechnik

Maß-verkörperung	**Träger einer definierten physikalischen Größe.**
Normal	**Maßverkörperung, das als Referenzmittel dient, um Messgeräte zu kalibrieren oder zu eichen**
Kalibrierung	**Zuordnung einer Skala eines Messgerätes, die das Ablesen der gesuchten Messgröße erlaubt**
	Feststellung und Dokumentation der Abweichung von Anzeigewerten eines Messgerätes

Maßverkörperungen - Längenmessung

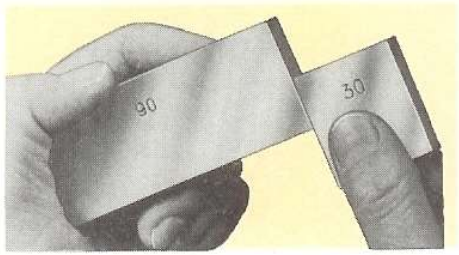
Maßverkörperungen

- Grundlage jeder Längenmessung ist der direkte oder indirekte Vergleich mit einer Maßverkörperung.
- Akkreditierte Kalibrierlabore stellen sicher, dass eine Maßverkörperung korrekt auf ein „nationales Normal“ rückführbar ist.

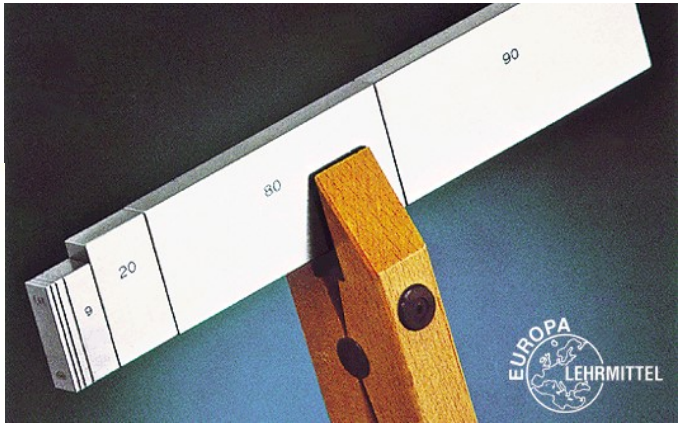


Beispiel Parallelendmaß

- Allrounder unter den Maßverkörperungen
- Zweck: Messung durch direkten Vergleich (z.B. Kalibrieren anderer Messmittel)
- Maßübertragung mittels hochwertig bearbeiteter paralleler Endflächen
- Parallelendmaße lassen sich beliebig kombinieren
- Anforderung an die Flächen:
  - Geringe Parallelitätsabweichung
  - Geringe Welligkeit und Rauheit
  - Sauberkeit
  - Beschädigungsfrei



Anschieben von Parallelendmaßen



Kombination von Parallelendmaßen

Maßverkörperungen - Längenmessung

Maßverkörperungen

- Grundlage jeder Längenm[illegible]g ist der direkte oder indirekte Vergleich mit einer Maßverkörperung.
- Akkreditierte Kalibrierlabo[illegible]cher, dass eine Maßverkörperung korrekt auf ein „nationales Normal“ rückf[illegible]

Maß-verkörperung im Elektrotechnik-Bereich?

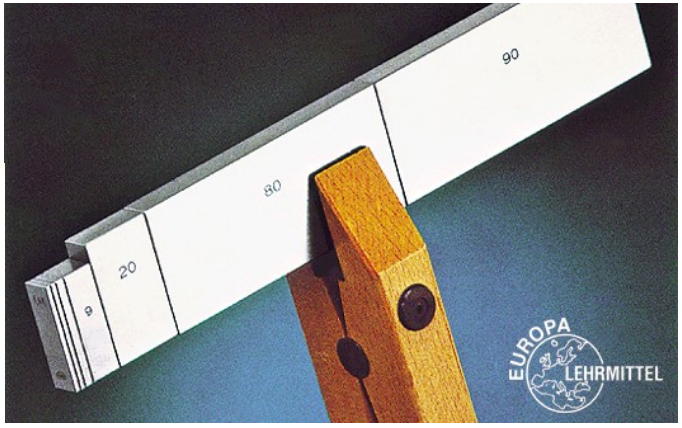
Beispiel Parallelendmaß

- Allrounder unter den Maßverkörperung[illegible]
- Zweck: Messung durch direkten Vergleich[illegible]ieren anderer Messmittel)
- Maßübertragung mittels hochwertig bearbeit[illegible]r Endflächen
- Parallelendmaße lassen sich beliebig kombinier[illegible]
- Anforderung an die Flächen:
  - Geringe Parallelitätsabweichung
  - Geringe Welligkeit und Rauheit
  - Sauberkeit
  - Beschädigungsfrei





Anschieben von Parallelendmaßen



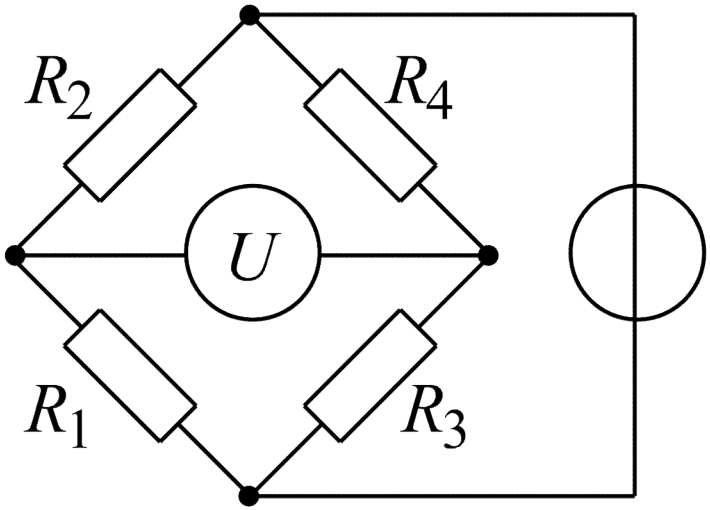
Kombination von Parallelendmaßen

Maßverkörperungen - Widerstandsmessung



https://www.historische-messtechnik.de/hilfsgeraete-und-zubehoer/zubehoer/normalwiderstaende/index.html

Normalwiderstand, 1 Ohm +/- 0,001%,
Siemens & Halske, 1897



Wheatstone Brücke

Begriffe um das Messergebnis

Messergebnis	Aus den Messungen gewonnener Schätzwert für den wahren Wert einer Messgröße
Wahrer Wert	Der wahren Wert einer Messgröße ist eine unbekannte Größe, die man nur mit einer gewissen Messunsicherheit bestimmen kann.
Mess-unsicherheit	Bereich, innerhalb dessen der wahre Wert der Messgröße mit einer anzugebenden Wahrschein-lichkeit liegt (unterscheide: Messabweichung)
Mess-abweichung	Differenz zwischen einem Messwert und einem Referenzwert
Referenzwert	Sehr genau bekannter Messwert einer Messgröße (z.B. mit einem hochgenauen Messgerät bestimmt)

Begriffe um das Messergebnis

Auflösung (Ablesegenauigkeit)	**Kleinster Abstand zweier gemessener Größen, bei dem die beiden Größen vom Messsystem noch unterschieden werden können**
Skalen- (teilungs) wert	**Differenz der Messgrößen zweier benachbarter Skalenstriche**
Genauigkeit (Accuracy)	**Präzision (precision) = Wiederholgenauigkeit Richtigkeit (trueness) = Systematische Abweichung**

Bei einer Skala in der Regel: ½ des Skalenteilungswertes

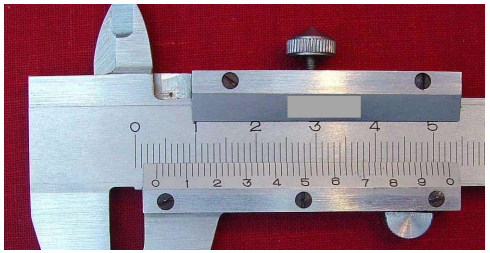
Kleine Übung



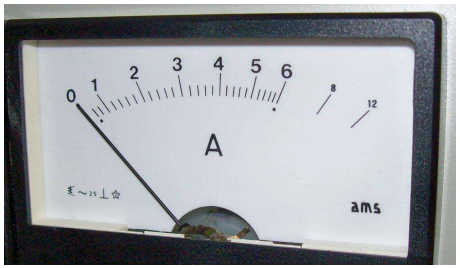
Von Simon A. Eugster - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7892806

Auflösung: 0,5 mm

Skalenwert: 1 mm



Von I, ArtMechanic, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=204558



Von Ulfbastel - Eigenes Werk, Gemeinfrei,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2880165

Auflösung: 0,1 A

Skalenwert: 0,2 A



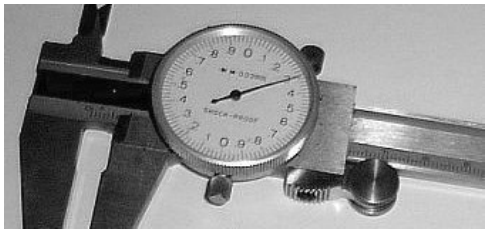
Von Photograph taken by Glenn McKechnie - Eigenes Werk, CC BY-SA 2.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=511799



Von Saure - Selbst fotografiert, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9691280

Auflösung: 0,01 V

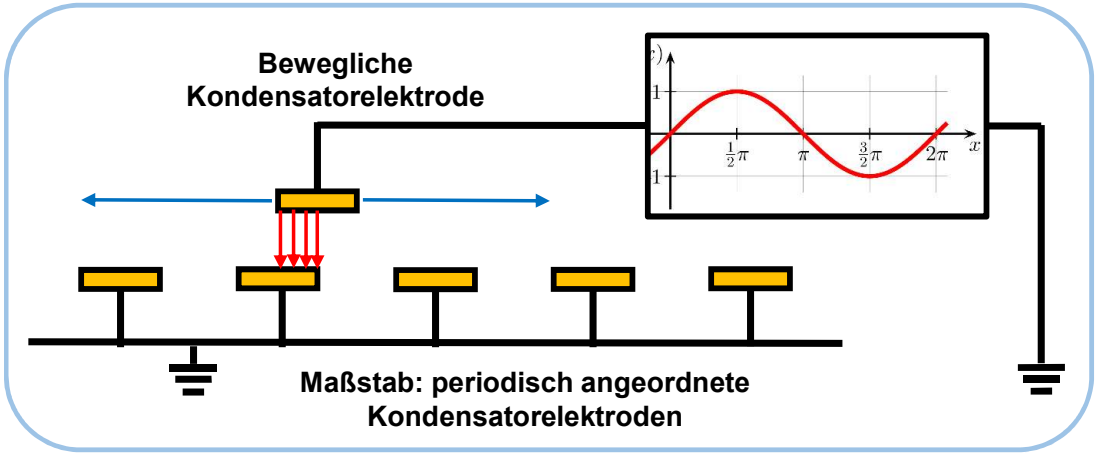
Skalenwert: 0,5 V



Beispiel: Digitalisierung von Messwerten

Zum Beispiel Messschieber der Firma Mitutoyo:

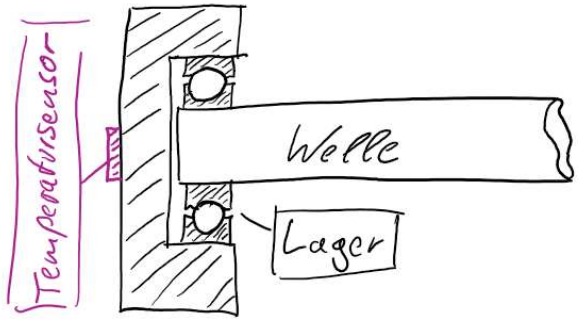
- Kapazitives Auslesen eines Vergleichsmaßstabes
- Die obere Kondensatorelektrode bewegt sich relativ zum periodischen Maßstab.
- Die Elektronik zählt die Durchgänge des Sinus-Signals.
- Dann ist die Periode der Struktur (unten) des Maßstabs ausschlaggebend für die Anzeigegenauigkeit.
- Wird die bewegliche Kondensatorelektrode (oben) mit einer „nonius-artigen“ Struktur versehen, erhöht sich die Genauigkeit enstsprechend



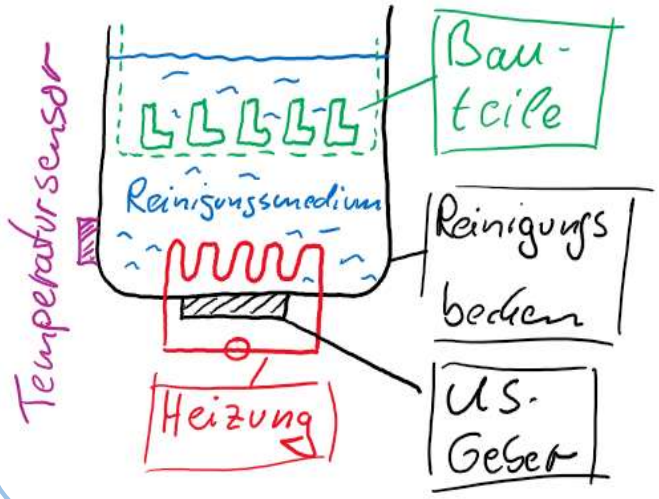


Messsysteme und Messabweichungen

Beispiel Lagertemperatur



Beispiel Reinigungsprozess



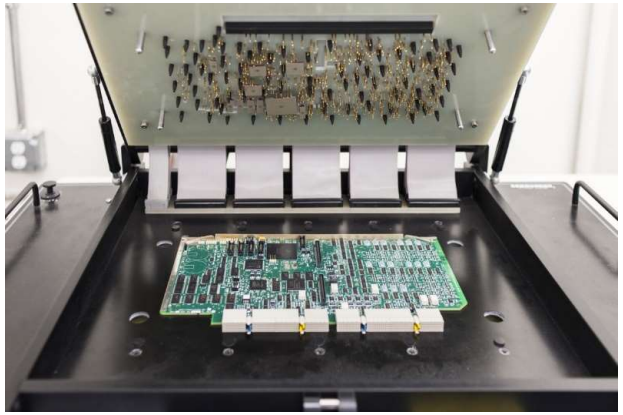
Messsysteme und Messabweichungen



Printed Cicuit Boards



In-Circuit-Prüfadapter



Nadelbettadapter (Pogo-Pins)



https://www.elecbee.com/de/blog/pogo-pins-explained-types-current-rating-applications-design-guide_2913?srsltid=AYCX9vJMYuoB1q_d8qFa8yqjow-RFbawZF_6DafLe7gTIFg7uaYXQ8i3

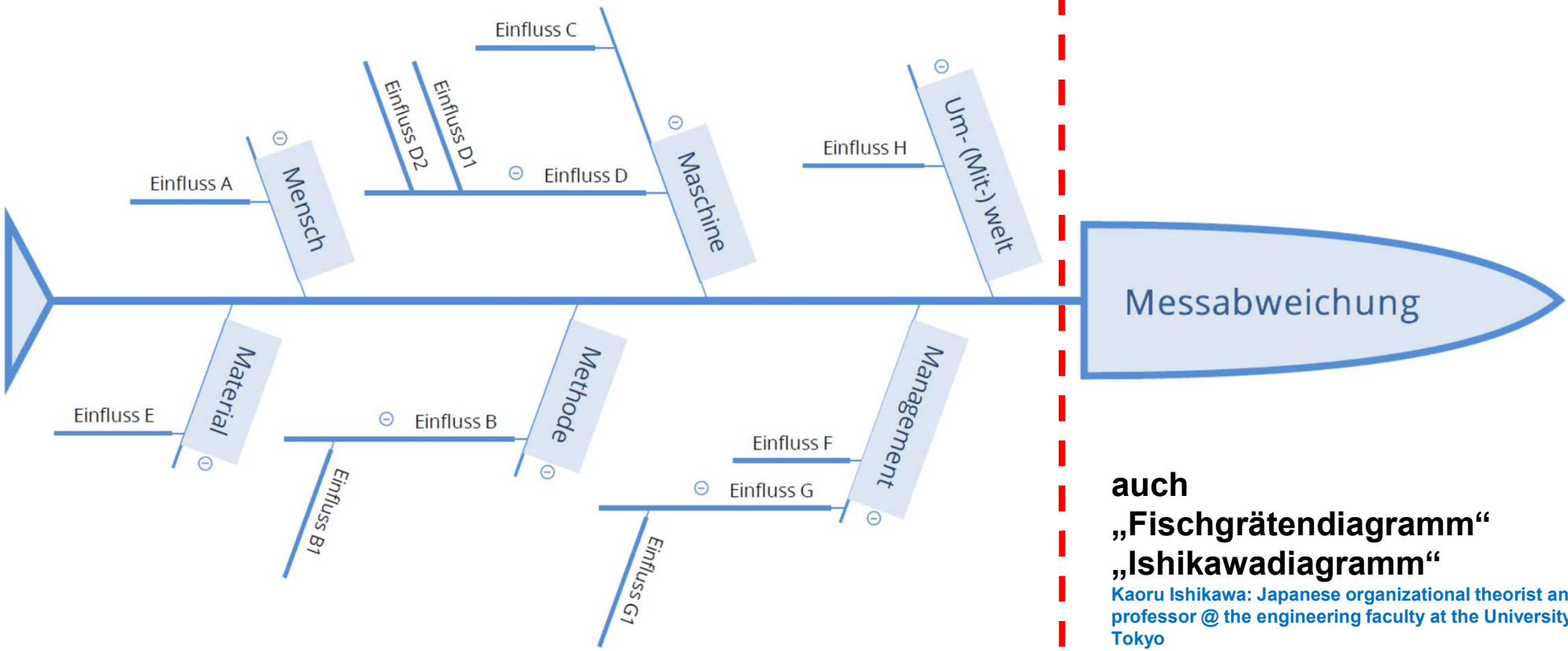
Messsysteme und Messabweichungen



https://www.elecbee.com/de/blog/pogo-pins-explained-types-current-rating-applications-design-guide_2913?srsltid=AYCX9vJMYuoB1q_d8qFa8yqjow-RFbawZF_6DafLe7gTIFg7uaYXQ8i3

Ursache-Wirkung-Diagramm

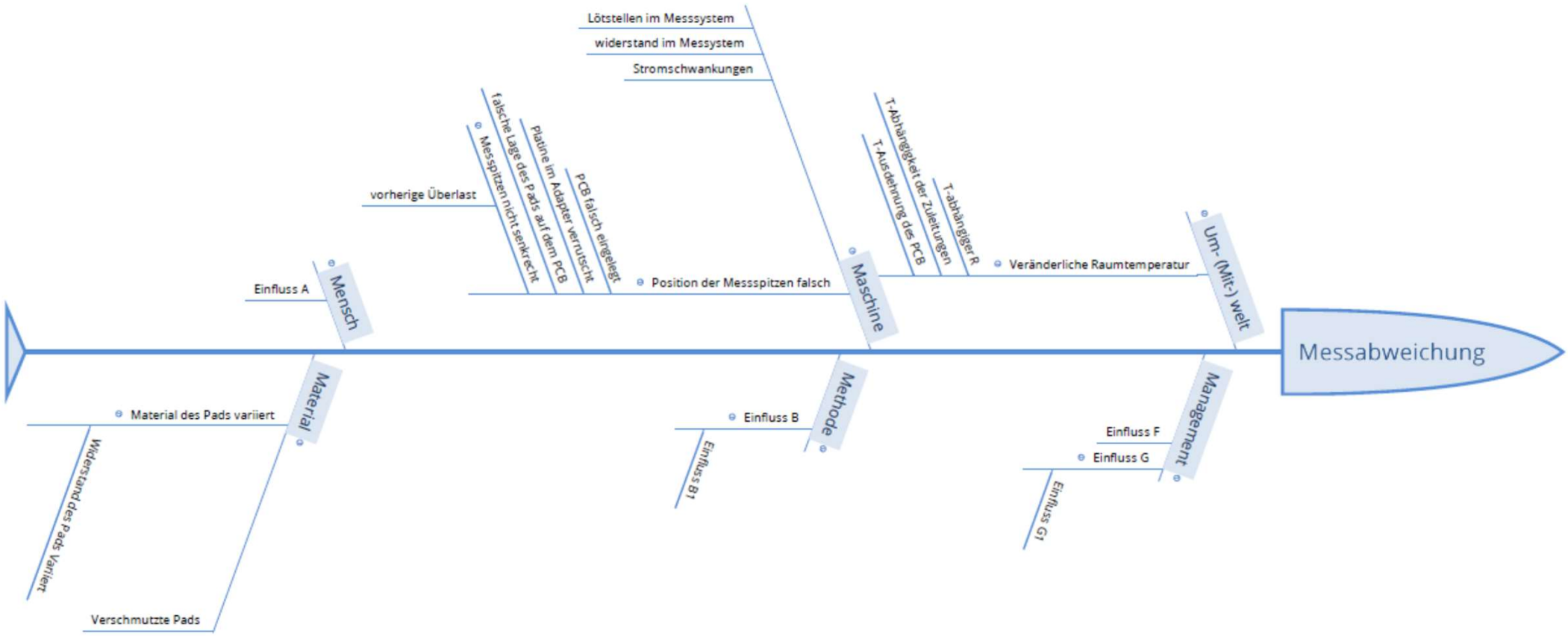
Ursachen (bis zur „root Cause“) → **Wirkung**



auch
„Fischgrätendiagramm“
„Ishikawadiagramm“

Kaoru Ishikawa: Japanese organizational theorist and a professor @ the engineering faculty at the University of Tokyo

Messsysteme und Messabweichungen



Messabweichungen

Arten von Messabweichungen (Check list)

- **Zu vereinfachtes Modell** des zu messenden Systems
- **Innere Störgrößen**, z.B. Alterung von Teilen des Messsystems
- **Äußere Störgrößen**, z.B. Veränderliche Klimaeinflüsse
- **Rückwirkung**, z. B. Wärmeeintrag durch einen Temperatursensor
- **Einflüsse des Bedieners**, z.B. ungenaue Ablesung, Justage
- **Dynamische Fehler**, bei schnell veränderlichen Messgrößen
- **Digitalisierung**
- Und weitere…

Messabweichungen

Man unterscheidet

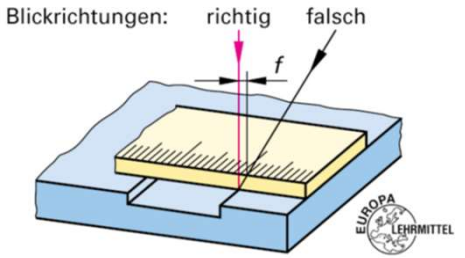
Systematische Messabweichungen
- Ursache und Art der Einwirkung bekannt
- Prinzipiell durch erhöhter Aufwand im Messsystem kompensierbar

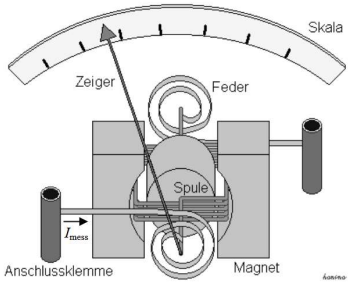
Zufällige Messabweichungen
- Zufällig
- Überlagerung vieler unbekannte Einwirkung

Beispiel zufälliger Messabweichungen

Prozessmessung mit dem Messschieber im Dreischichtbetrieb:
- 40 verschiedene MA
- Alle machen unterschiedliche kleine systematische Fehler
- Die resultierenden Abweichungen sind zufällig

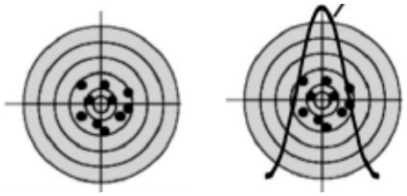
Beispiele systematischer Messabweichungen



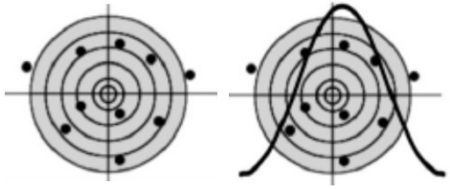


Genauigkeit

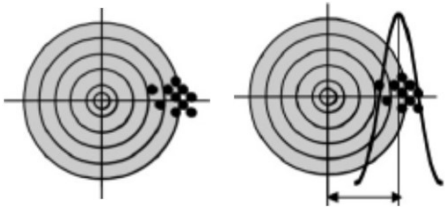
Hohe Präzision
Hohe Genauigkeit



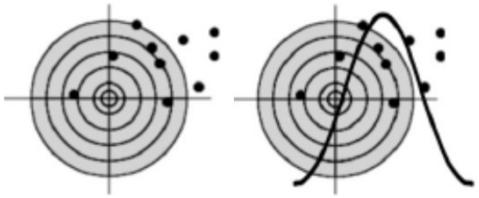
Geringe Präzision
Hohe Genauigkeit



Hohe Präzision
Geringe Genauigkeit



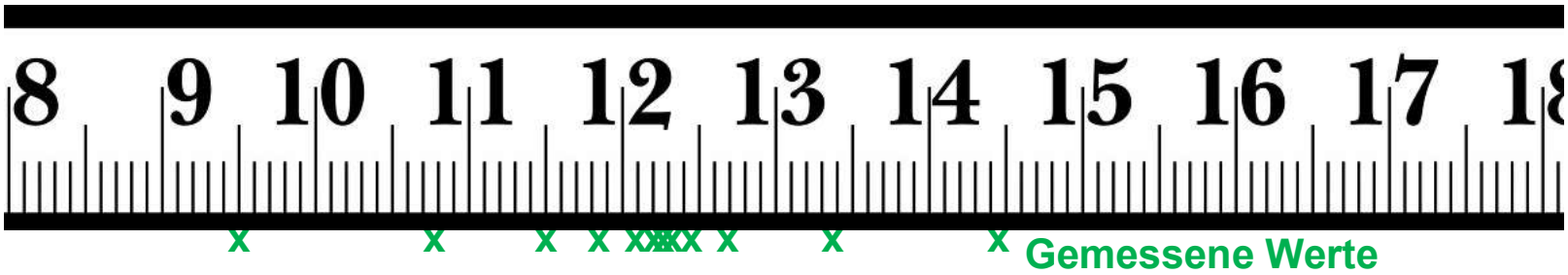
Geringe Präzision
Geringe Genauigkeit

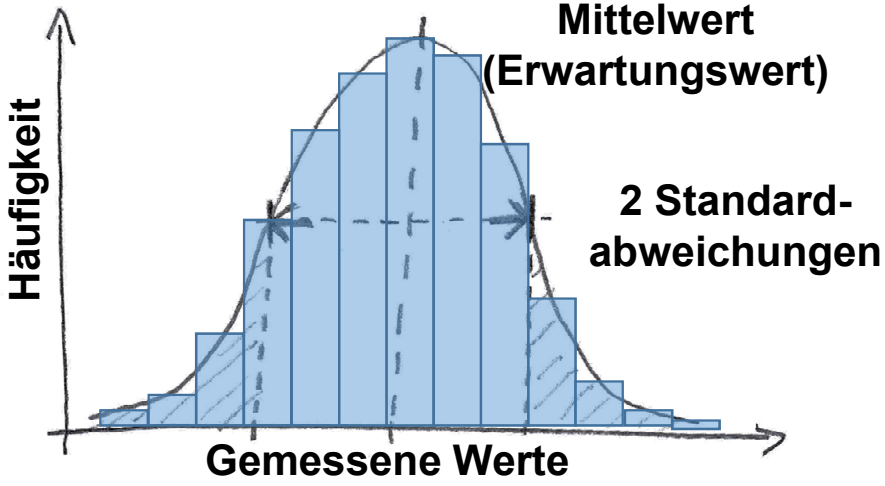


Zufälliger Fehler = Statistische Streuung

Systematische Abweichung = Offset

Streuung


8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
Gemessene Werte


Mittelwert
(Erwartungswert)
2 Standard-
abweichungen
Häufigkeit
Gemessene Werte

Die Gaußsche Normalverteilung

Erwartungswert (Mittelwert)

$$\mu = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots x_N)}{N}$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Standardabweichung

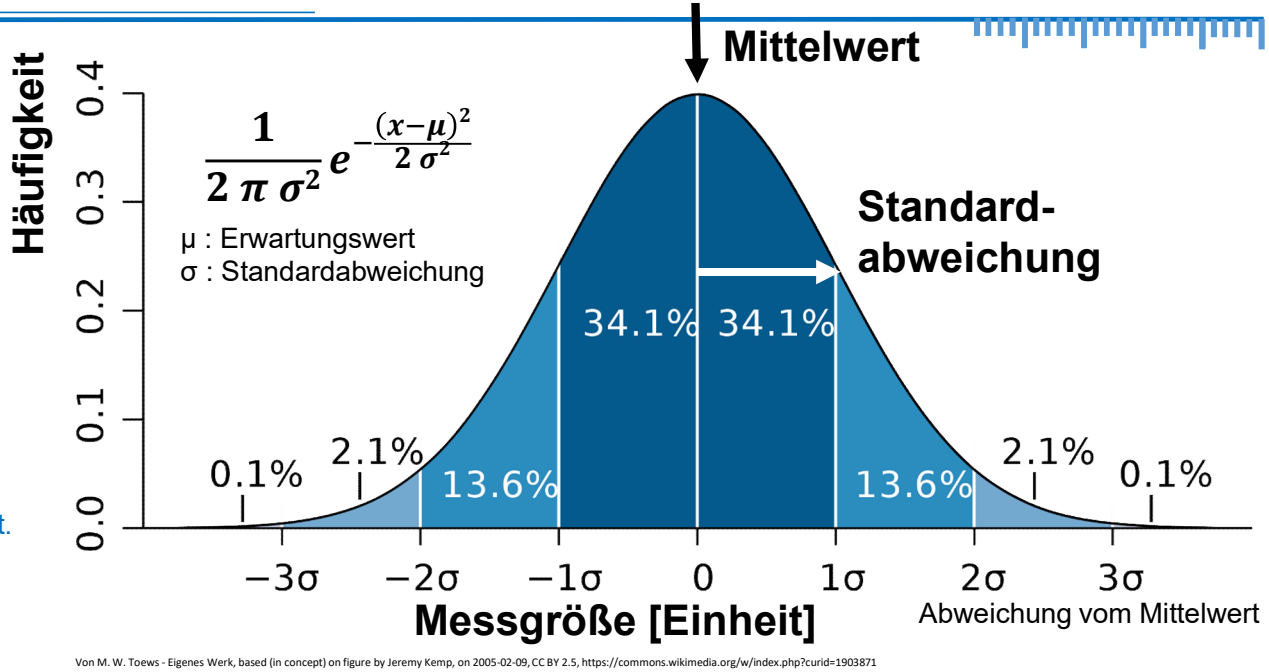
der Einzelmessung vom Mittelwert

Abschätzung für die Grundgesamtheit aus der Stichprobe

Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt ein einzelner Messwert im σ-Intervall um den wahren Wert.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (xn - \mu)^2}{N - 1}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (xi - \mu)^2}{N - 1}}$$



Von M. W. Toews - Eigenes Werk, based (in concept) on figure by Jeremy Kemp, on 2005-02-09, CC BY 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1903871

Messunsicherheit

des Mittelwertes vom wahren Wert

$$u = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (xi - \mu)^2}{N \cdot (N - 1)}}$$

Vertrauensniveau 68,2 %:
Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt der Mittelwert im u-Intervall um den wahren Wert.

Korrekturen

Erwartungswert (Mittelwert)

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Standardabweichung

der Einzelmessung vom Mittelwert

Abschätzung für die Grundgesamtheit aus der Stichprobe

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(xi - \mu)^2}{N-1}}$$

Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt ein einzelner Messwert im σ-Intervall um den wahren Wert.

Messunsicherheit

des Mittelwertes vom wahren Wert

$$u = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(xi - \mu)^2}{N \cdot (N-1)}}$$

Zu 68,2 % Wahrscheinlichkeit liegt der Mittelwert im u-Intervall um den wahren Wert.

Anzahl Messungen in der Messreihe n	Vertrauensfaktor t						
	(1 – α) = 68,27 %	(1 – α) = 90,00 %	(1 – α) = 95,00 %	(1 – α) = 95,45 %	(1 – α) = 99,00 %	(1 – α) = 99,73 %	(1 – α) = 99,98 %
2	1,84	6,31	12,71	18,44	63,66	235,80	761,40
3	1,32	2,92	4,30	4,93	9,93	19,21	42,30
4	1,20	2,35	3,18	3,48	5,84	9,22	19,77
5	1,15	2,13	2,78	2,98	4,60	6,62	12,48
6	1,11	2,02	2,57	2,73	4,03	5,51	9,77
7	1,09	1,94	2,45	2,61	3,71	4,90	7,51
8	1,08	1,90	2,37	2,50	3,50	4,53	6,78
9	1,07	1,86	2,31	2,42	3,37	4,28	6,22
10	1,06	1,83	2,26	2,37	3,25	4,09	5,89
20	1,03	1,73	2,09	2,18	2,86	3,45	4,76
30	1,02	1,70	2,05	2,13	2,76	3,28	4,47
50	1,01	1,68	2,01	2,08	2,68	3,16	4,23
100	1,00	1,66	1,98	2,04	2,63	3,08	4,12
200	1,00	1,65	1,97	2,02	2,60	3,04	4,06
n → ∞	1,00	1,65	1,96	2,00	2,58	3,00	4,00

Ggf. zusätzliche Korrektur durch Vertrauensfaktor t

$$u = t\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

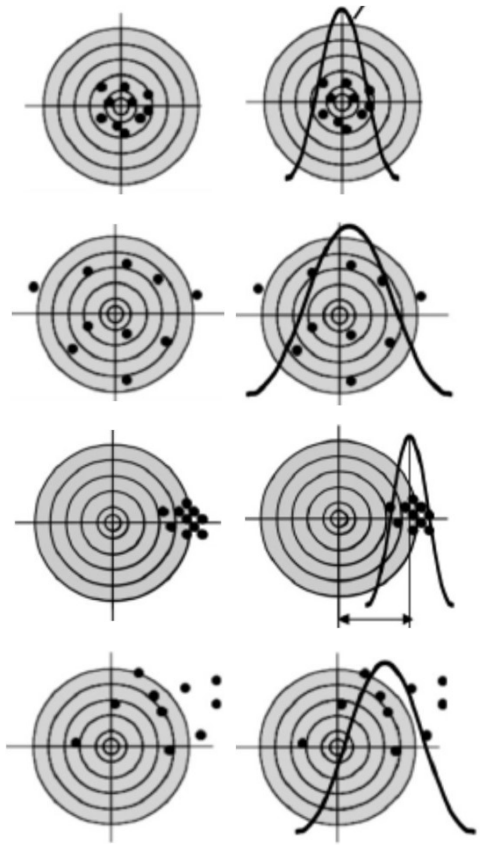
Genauigkeit

Hohe Präzision
Hohe Genauigkeit

Geringe Präzision
Hohe Genauigkeit

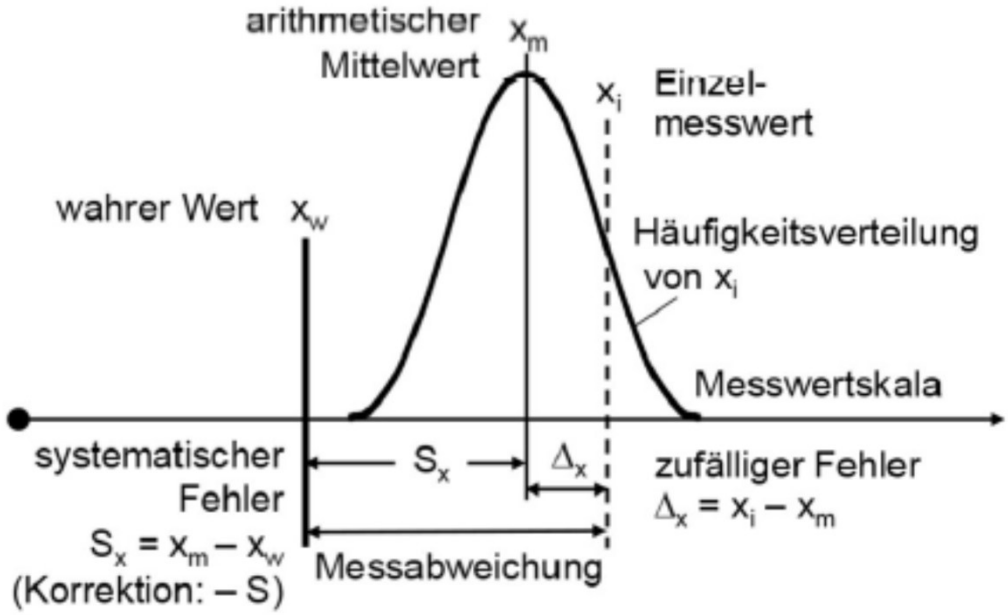
Hohe Präzision
Geringe Genauigkeit

Geringe Präzision
Geringe Genauigkeit



Zufälliger Fehler = Statistische Streuung

Systematische Abweichung = Offset



Gültige Stellen – Genauigkeit Arithmetisch

Die Anzahl der angegebenen Nachkommastellen physikalischer Größen ist NICHT beliebig!

Multiplikation und Division:
Im Ergebnis ist die Zahl gültiger Stellen die kleinste Zahl gültiger Stellen der Faktoren.

Addition und Subtraktion
Im Ergebnis nicht mehr Nachkommastellen, als Nachkommastellen beim Summanden mit der kleinsten Anzahl Nachkommastellen.

„Kaufmännisches“ Runden
Ist die erste gestrichene Stelle eine 1...4, dann bleibt die erste angegebene Stelle stehen
Ist die erste gestrichene Stelle eine 5...9, dann wird die erste angegebene Stelle um 1 erhöht

0,24 ➔ 0,2
0,25 ➔ 0,3

10,7 kg
➔ Masse zwischen
10,65 kg und 10,74 kg.

10,77 kg
➔ Masse zwischen
10,765 kg und 10,774 kg.

Gültige Stellen – Genauigkeit Arithmetisch

Bestimmen Sie das Ergebnis und beachten Sie die Regeln zu den gültigen Stellen

$m = 7{,}874 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}12\ m^3$

$m = 1{,}003 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}02\ m^3$

$m = 20 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}\ 300\ m^3$

$\rho = \frac{15{,}67 \cdot 10^3 kg}{3{,}25\ m^3}$

$\rho = \frac{20{,}01 \cdot 10^3 kg}{0{,}02 \cdot 10^2 m^2}$

$\rho = \frac{20 \cdot 10^3 kg}{300\ m^3}$

$m = 10\ kg + 3\ kg$

$m = 10{,}3\ kg + 3{,}47\ kg$

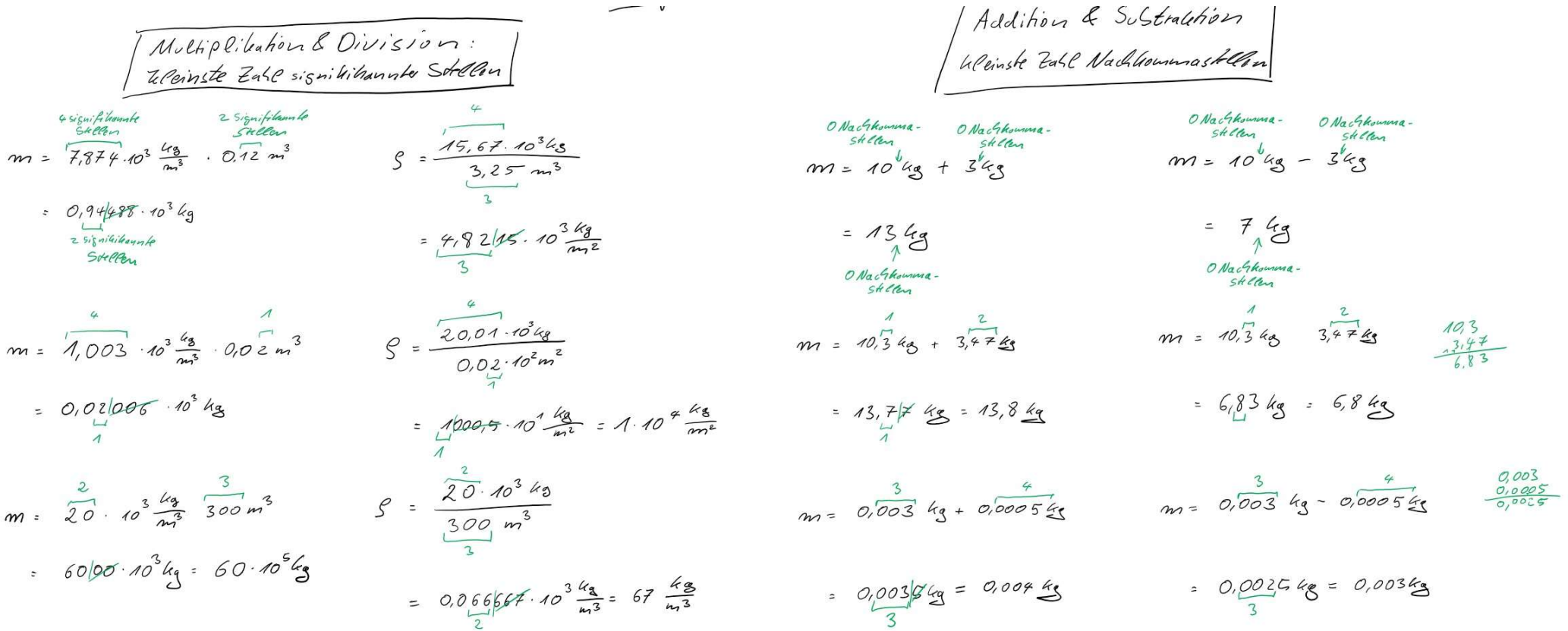
$m = 0{,}003\ kg + 0{,}0005\ kg$

$m = 10\ kg - 3\ kg$

$m = 10{,}3\ kg \quad 3{,}47\ kg$

$m = 0{,}003\ kg - 0{,}0005\ kg$

Gültige Stellen – Genauigkeit Arithmetisch



Fazit zum Runden

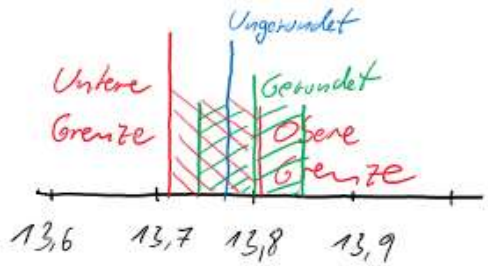
Die zuvor gelernten Daumenregeln für Multiplikation und Addition zu gültigen bzw. Nachkommastellen sind nur Näherungen.

Denn Rechnung mit den nach Rundungskonvention definierten oberen und unteren Grenzen der Einzelwerte zeigt, dass der Überlapp mit der nach Daumenregel bestimmten Spanne nicht 100 % gegeben ist.

Runden nach Daumenregel (grün)

$$m = 10{,}3\ \text{kg} + 3{,}47\ \text{kg} = 13{,}77\ \text{kg} = 13{,}8\ \text{kg}$$

Spanne: (13,75..13,84) kg



Rechnen mit gerundeten max. / min. (rot)

$$m_{min} = 10{,}25\ \text{kg} + 3{,}465\ \text{kg} = 13{,}715\ \text{kg} = 13{,}72\ \text{kg}$$

$$m_{max} = 10{,}34\ \text{kg} + 3{,}474\ \text{kg} = 13{,}814\ \text{kg} = 13{,}81\ \text{kg}$$

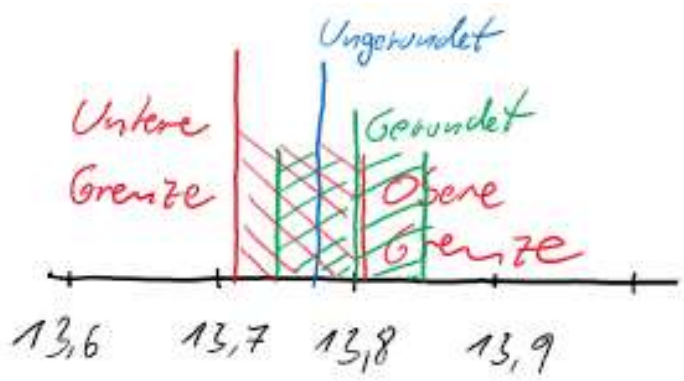
Spanne: (13,72..13,81) kg

Fazit zum Runden

Die Anfangs gegebenen Werte erlauben eine Genauigkeit im Rahmen der roten Grenzen.

Das nach Daumenregel gerundete Ergebnis erlaubt eine Spanne, die zumindest zum Teil Überlapp mit dem roten Bereich hat.

Das ungerundete Ergebnis liegt zwar innerhalb des roten Bereichs, ist also sicher ein richtiges Ergebnis. Es definiert aber nur einen minimale Spanne, also ist der Überlapp seiner Lösungsmenge mit dem roten Bereich viel geringer. Es ist falsch, weil eine viel zu hohe Genauigkeit suggeriert wird.



Mit anderen Worten:

- Wenn keine detailliertere Betrachtung möglich ist, sind die Daumenregeln das Mittel der Wahl.
- **In der Messtechnik benötigen wir aber häufig eine noch bessere Methode:**
  Das ist die individuelle Angabe von Messunsicherheiten pro Wert.

Umgang mit Messunsicherheiten

In der Messtechnik geben wir zu jedem gemessenen Wert eine Messunsicherheit an.
Beispiel: Addition zweier gemessener Massen:

$$\mathrm{m} = m_1 + m_2 = 10{,}30\ \mathrm{kg} + 3{,}47\ \mathrm{kg}$$

Zum Beispiel:

$\mathrm{m} = 10{,}30\ \mathrm{kg}\ (\pm 2{,}0\%) + 3{,}47\ \mathrm{kg}(\pm 1{,}5\%)$	relativ
$\mathrm{m} = 10{,}30\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}206\ \mathrm{kg}) + 3{,}47\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}05205\mathrm{kg})$	absolut
$\mathrm{m} = 10{,}30\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}21\ \mathrm{kg}) + 3{,}47\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}05\mathrm{kg})$	Messunsicherheit gerundet

Messunsicherheiten werden mit ein oder zwei gültigen Stellen angegeben (nicht mehr)

Umgang mit Messunsicherheiten

In der Messtechnik geben wir zu jedem gemessenen Wert eine Messunsicherheit an.

$$\mathrm{m} = m_1(\pm\Delta m_1) + m_2(\pm\Delta m_2)$$

$$\mathrm{m} = 10{,}30\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}21\ \mathrm{kg}) + 3{,}47\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}05\mathrm{kg}) \rightarrow m_{nenn} = 10{,}30\ \mathrm{kg} + 3{,}47\ \mathrm{kg} = 13{,}77\ \mathrm{kg}$$

$$m_{min} = 10{,}09\ \mathrm{kg} + 3{,}42\ \mathrm{kg} = 13{,}51\ \mathrm{kg}$$

$$m_{max} = 10{,}51\ \mathrm{kg} + 3{,}52\ \mathrm{kg} = 14{,}03\ \mathrm{kg} \rightarrow \frac{1}{2}\, m_\Delta = \frac{1}{2}(14{,}03\ \mathrm{kg} - 13{,}51\ \mathrm{kg}) = 0{,}26\ \mathrm{kg}$$

- **Bedenken Sie, dass die Messunsicherheit statistisch ist: Der „wahre“ Wert kann auch jenseits der „Grenze“ liegen, es ist nur weniger wahrscheinlich.**
- **Das führt zu Abweichungen von der min./max. Betrachtung.**
- **Wie wir damit umgehen, sehen wir später.**

$$\rightarrow \quad \mathrm{m} = 13{,}77\ \mathrm{kg}\ (\pm 0{,}26\ \mathrm{kg})$$

$$\mathrm{m} = 13{,}77\ \mathrm{kg}\ (\pm 1{,}9\ \%)$$