

Lasertechnik VL-9

14.06.2023

Mechatronik 4.tes Semester

Vorlesung Sommersemester 2023

VL: Prof. Dr. Thomas Hebert (thebert@fb2.fra-uas.de)

Labor: Hans-Peter Tögel, Lutz Zimmermann, Prof. Kurt Jansen



Fachbereich 2 Informatik und Ingenieurwissenschaften

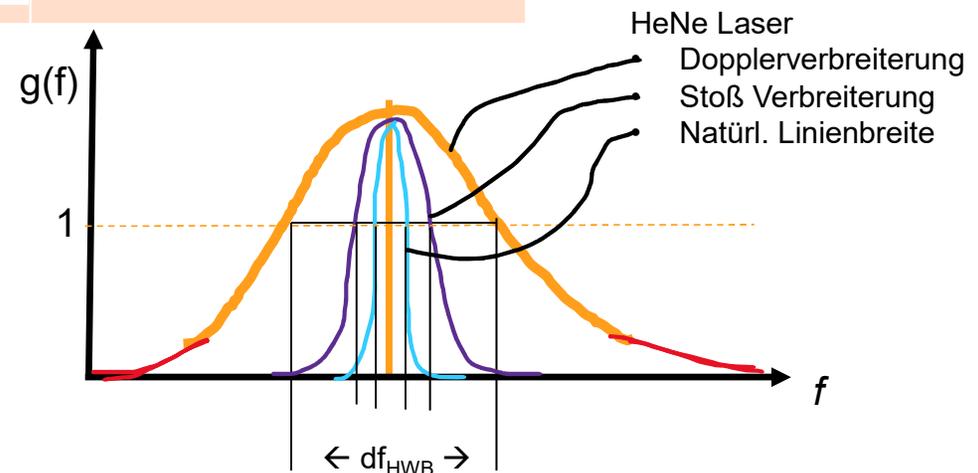
Man beobachtet immer den Effekt, der am stärksten ist Beispiel zum Nachrechnen: He-Ne-Laser

Art der Verbreiterung	Formel	Wert
Natürliche Linienbreite	$\Delta f_{\text{nat}} = \frac{1}{2 \pi \tau_i}$	$\Delta f_{\text{nat}} = 10 \text{ MHz}$
Stoßverbreiterung	$\Delta f_s = \sqrt{\frac{3}{4mkT}} \cdot d^2 p$	$\Delta f_s \sim 32 \text{ MHz}$
Dopplerverbreiterung	$\Delta f_D = \frac{2f_{12}}{c} \sqrt{2kT \ln 2/m}$	$\Delta f_D \sim 1,5 \text{ GHz}$

Werte: $\tau_i = 15 \text{ ns}$, $m = (\text{Masse Neon Atom}) = 3,35 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, $T = 400 \text{ K}$, $p = 500 \text{ Pa}$, $d = 10^{-10} \text{ m}$ Atomdurchmesser, $k = \text{Boltzmann-Konstante} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, $f_{12(633\text{nm})} = 4,74 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

1,5 GHz \gg 32 MHz > 10 MHz

Der größte Wert dominiert: **Beim HeNe Laser wird somit die Dopplerverbreiterung beobachtet.**



Einige Beispiele und weitere Linienverbreiterungen

- $\Delta f_n \ll \Delta f_{\text{stoß}}, \Delta f_{\text{doppler}}$

In Molekülen und Festkörpern gibt es weitere Mechanismen, die zu Linienverbreiterungen führen

- Moleküle:
Überlappung von Schwingungs- und Rotationsniveaus
- Kristalle:
Gitterschwingungen
- Dotierte Kristalle:
Statische E-Felder
- Halbleiter:
Energiebänder

Tabelle 2.2. Beispiele für Linienbreiten von Laserübergängen

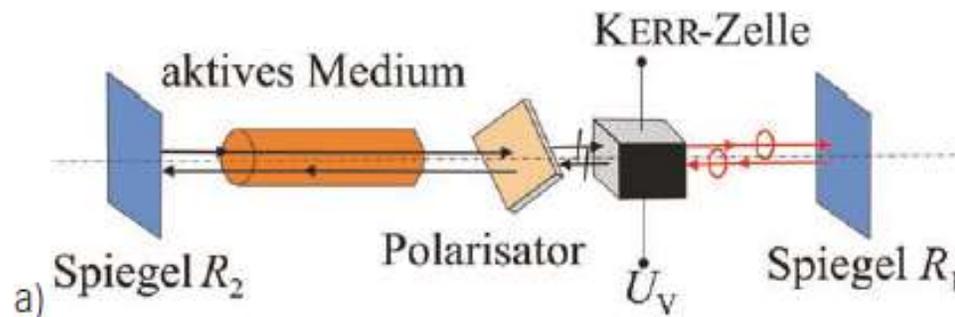
Lasertyp	Wellenlängen (μm)	df/f	Linienbreite	Mechanismus
He-Ne Gastemperatur 300 K	0,6328	0,0003	1,5 GHz	Doppler, inhomogen
Argon-Ionen Gastemperatur 2000 K	0,488	0,0007	4 GHz	Doppler, inhomogen
Excimer KrF	0,248	0,8272	10 THz	überlappende Schwingungsniv.
CO ₂ 10 mbar, 300 K	10,6	0,0002	60 MHz	Doppler, inhomogen
	1 bar	0,0141	4 GHz	Stöße, homogen
	10 bar	0,5304	150 GHz	überlappende Rotationsniv.
Farbstoff Rh6G	0,6	16,0107	80 THz	überlappende Schwingungsniv.
Rubinlaser	0,694	0,0764	330 GHz	Gitterschwingungen, homogen
Nd: YAG	1,06	0,0426	120 GHz	wie Rubinlaser
Nd:Glas	1,06	2,6618	7500 GHz	Starkeffekt durch statistische E-Felder, inhomogen
Halbleiter GaAs	0,89	2,9686	10 THz	Energiebänder der Elektronen im period. Kristallfeld

MHz = 10^6 Hz, GHz = 10^9 Hz, THz = 10^{12} Hz; sichtbares Licht 10^{14} Hz

Laserpulserzeugung durch Q-Switch / Güteschaltung

Tabelle 2.7 Ausgewählte Elemente der Güteschaltung

	Schaltertyp	Schaltzeit
Aktive Güteschaltung	Rotierende Blende	$> 10 \mu\text{s}$
	Drehspiegel / Drehprisma	$< 1 \mu\text{s}$
	Elektrooptischer Schalter	$< 10 \text{ ns}$
	Akustooptischer Schalter	$< 50 \text{ ns}$
Passive Güteschaltung	Sättigbarer Absorber	ca. 1 ns



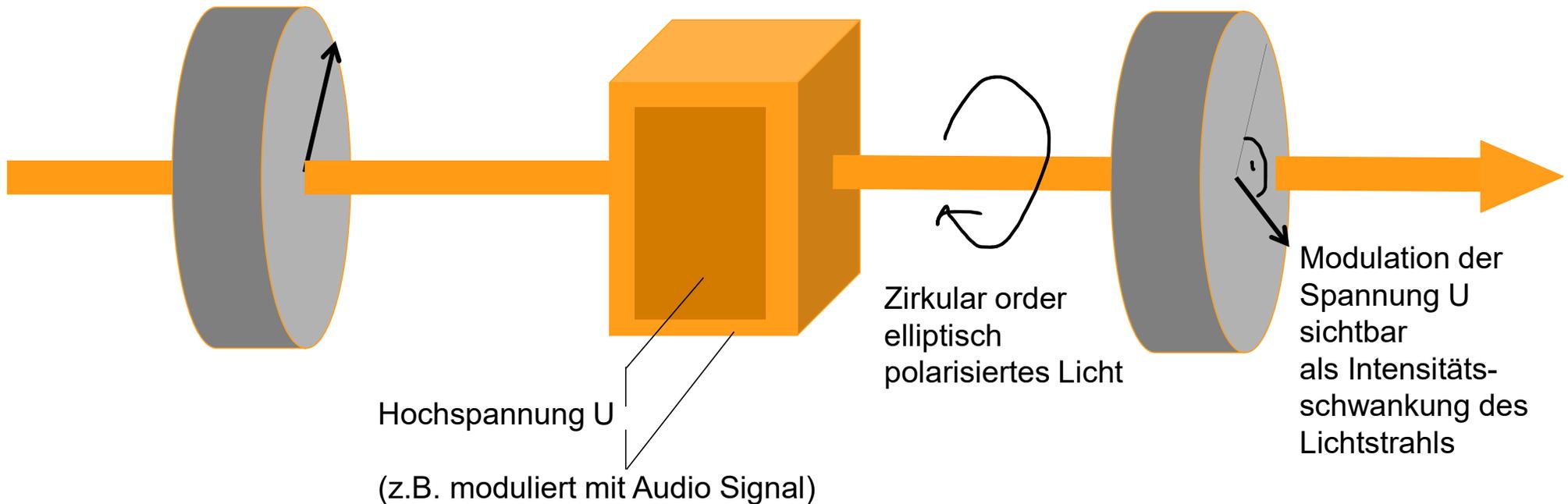
1. Polarisator erzeugt linear polarisiertes Licht (45° zur Achse der Kerr Zelle)
2. Kerr Zelle ($U_V = an$) erzeugt daraus zirkular polarisiertes Licht
3. Nach Reflexion am Spiegel R_1 und nochmaligem Durchlauf durch Kerr- Zelle ist die Polarisation um 90° gedreht \rightarrow Resonator ist gesperrt
4. Abschalten der Spannung \rightarrow Resonator dann offen

Kerr Zelle Funktionsprinzip

Polarisator zur Erzeugung
Linear polarisierten Lichts (45° zur
Optischen Achse der Kerr Zelle

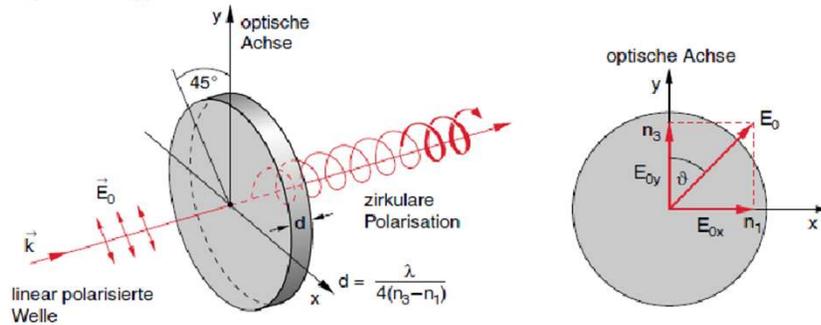
Kerr Zelle
Doppelbrechend bei
Angelegter Spannung U

Analysator (90°) verdreht



Theorie des elektrooptischen Kerreffekts

- Doppelbrechung: verschiedene Brechungsindizes $\Delta n = |n_1 - n_3| \neq 0$ für verschiedene Polarisationsrichtungen (->elliptisch polarisiertes Licht)
- Elektrooptischer Kerreffekt: Unterschied der Brechungsindizes $\Delta n \propto E^2$ abhängig vom elektrischen Feld (und damit von angelegter Spannung):



Zirkular-Polarisator [1]

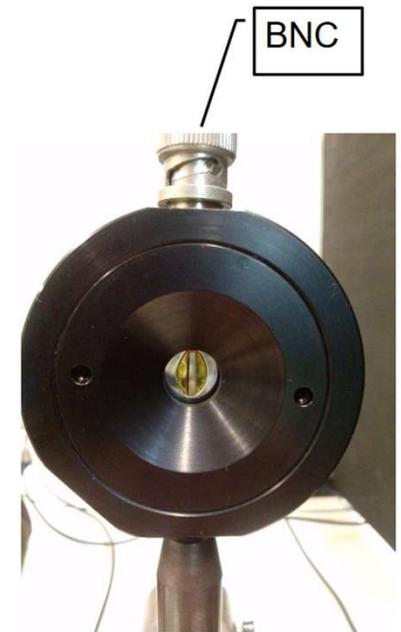
Quelle: Vortrag Uni-Ulm:

https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/nawi.inst.100/Projektpraktikum-Votr%C3%A4ge/Vortrag_Informationen%C3%BCbertragung_mit_Licht.pdf

Die Kerrzelle

- Hier verwendet: PLZT-Keramik
- Mit Hochspannung betrieben
- Kondensator erzeugt elektrisches Feld
- Differenz der Brechungsindizes:

$$\Delta n \propto E^2 \propto U^2$$

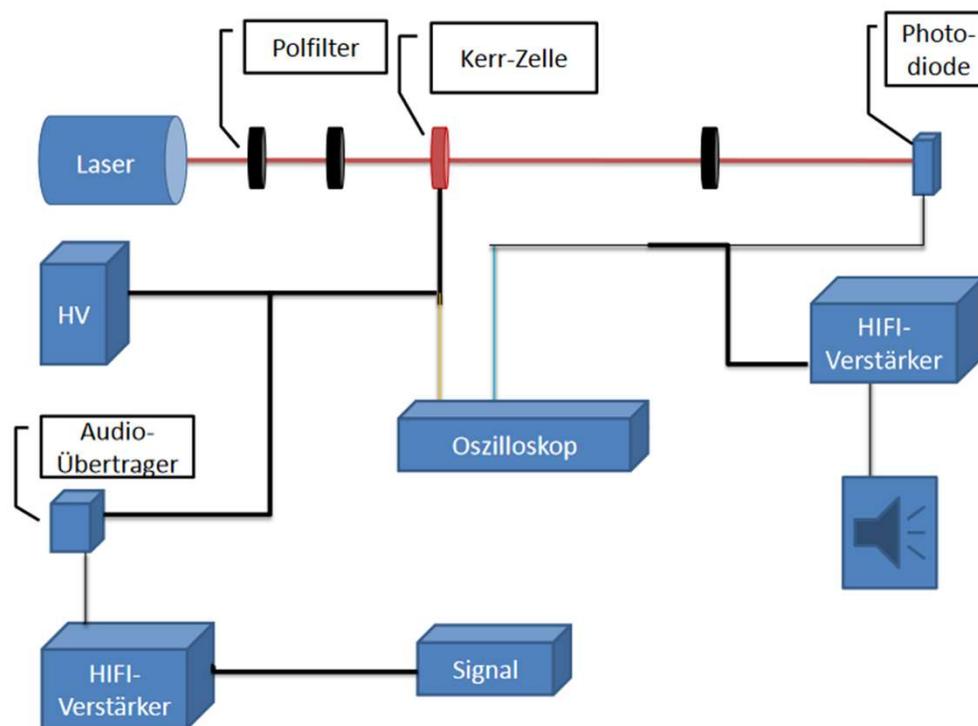


PLZT = Blei(Pb)-Lanthan-Zirkonat-Titanit

1. Angelegte Spannung U erzeugt Doppelbrechung $\Delta n \sim U^2$
2. Ein: Lin.pol.Licht (45°); Aus: elliptisch pol. Licht
3. Intensitätsschwankung (U_{an} / U_{aus}) kann gemessen werden

Kerrzelle zur optischen Übertragung von Audiosignalen

Versuchsaufbau zur Übertragung von Musik

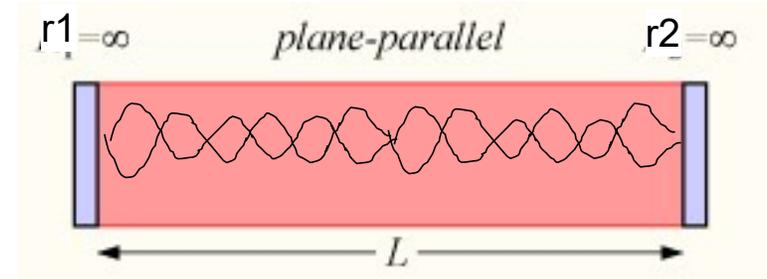
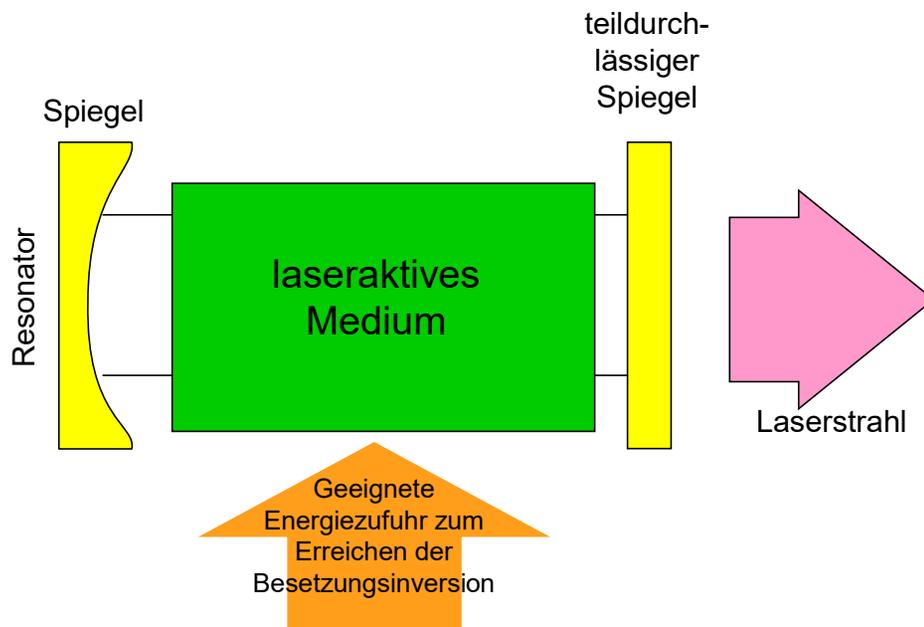


Quelle: Vortrag Uni-Ulm:

https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/nawi.inst.100/Projektpraktikum-Votr%C3%A4ge/Vortrag_Informationen%C3%BCbertragung_mit_Licht.pdf

Longitudinale Moden (Resonanzfrequenzen) im Resonator

Resonator

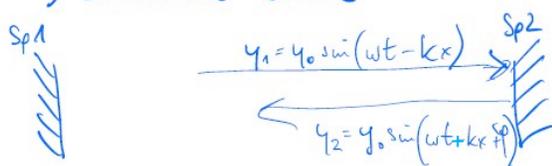


Optischer Resonator:

- Typischerweise zwei Hohl- oder Planspiegel mit Radien r_1 , r_2 im Abstand L
- Hoher Reflexionsgrad der Spiegel: $R_1 \sim 0,999$; $R_2 \sim 0,98$ (um später auch einen Teil der Strahlung auszukoppeln)
- Verschiedene Resonator Architekturen (z.B. plan-plan oder konkav-plan,)
- **Grundprinzip: stehende Wellen mit Knoten bzw. E-Feld = 0 an den Spiegeloberflächen**

Herleitung zu den Moden im Resonator 1/2

- 1 Resonator: 2x Spiegel im Abstand L
Licht wird im Resonator hin+her reflektiert
=> stehende Welle



Spiegel wie 'feste Ende'

=> daher Phasenprung π bei Reflexion

Rechnung für 1 Spiegel

$$y_G = y_1 + y_2$$

$$= y_0 \left[\sin(\omega t - kz) + \sin(\omega t + kz + \pi) \right]$$

↑
Vorlaufende Richtung
↑
Rücklaufende Richtung

Mathe Formelsammlung

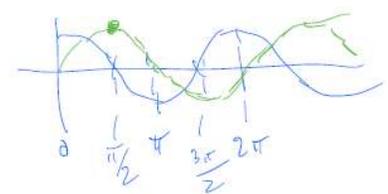
$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$2 y_G = 2 y_0 \sin\left(\frac{\omega t - kz + \omega t + kz + \pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega t - kz - \omega t - kz - \pi}{2}\right)$$

$$= 2 y_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(kz + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\cos(x) = \cos(-x)$ nicht abhängig von t => Interferenz fest

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$$



$\alpha = 0: \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ✓
 $\sin(0) = 0$ ✓
 $\alpha = \frac{\pi}{2}: \cos(\pi) = -1$ ✓
 $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ✓

Wann ist Interferenzform maximal, wenn?

$$\cos\left(kz + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(kz) = \begin{cases} 1, -1 \text{ wenn } \dots \\ 0 \text{ wenn } \dots \end{cases}$$

Herleitung zu den Moden im Resonator 2/2

3 $\sin(kz) = 0$ wenn

$$kz = \pm q \cdot \pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$z = L$$

~~$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot L = \pm q \cdot \pi$$~~

$$q = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda = \pm \frac{2L}{q}$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$\frac{c}{f} = \pm \frac{2L}{q} \Rightarrow f = q \frac{c}{2L}$$

mozgliche stehende Wellen im Resonator

$$f_q = q \cdot \frac{c}{2L}$$

Grundwelle (Schwingung) wäre $q=1$

$$q \hat{=} 1$$

$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0,25 \text{ m}} = 599,6 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

4

unrealistische für Licht ($f_{\text{Licht}} \approx 10^{14} \text{ Hz}$)

im Lasoresonator q i.d.R. sehr hoch

$$\text{HeNe: } \lambda = 632,8 \text{ nm} \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = 4,74 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$q_{632,8} = \frac{f \cdot 2L}{c} = \frac{4,74 \cdot 10^{14} \cdot 2 \cdot 0,25 \text{ m}}{2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$\approx 790000, \dots$$

wenn f ein solcher Wert wäre
müsste Spiegelabstand L sehr ~~erhöht~~
sein

$$q = 790000 \quad f = 4,74 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

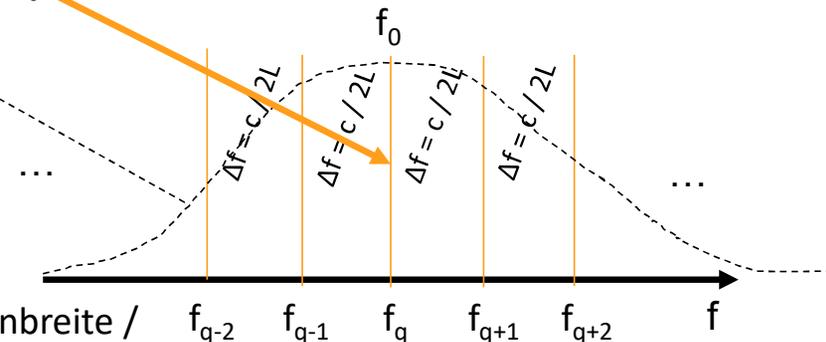
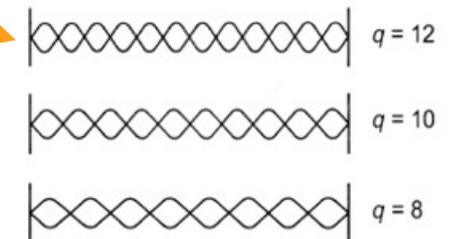
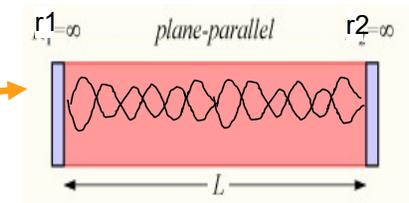
$$L_{790000} = \frac{q \cdot c}{2f} = \frac{790000 \cdot 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 4,74 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}}$$

$$\approx 0,2498333 \text{ m}$$

Eigenschaften optischer Resonatoren

Optischer Resonator: zwei Spiegel (Plan- oder Hohlspiegel) mit Reflexionsgrad R_1 und R_2 im Abstand L

1. Auf den Spiegelflächen (Metallspiegel) muss die E-Feldstärke = 0 sein, daher gilt die Resonanzbedingung: „Ganzzahlige Vielfache der Wellenlänge müssen in die doppelte Resonatorlänge passen“ (Hin- und Rückweg) **$q * \lambda = 2 L$**
2. Jede Kombination aus q (Ordnungszahl) und λ (Wellenlänge) wird als **axiale Mode** des Resonators bezeichnet
3. Frequenz je axialem Mode: **$f_q = q * c / 2L$**
4. Die Freq.-Differenz zweier benachbarter axialer Moden („freien Spektralbereich“) ist **$\Delta f = c / 2L$**
5. Da die Lichtfrequenz (od. Wellenlänge) wegen der Linienbreite kein exakt scharfer Wert ist, kann die Bedingung $q * \lambda = 2 L$ für mehrere Kombinationen $q * \lambda$ erfüllt werden.
6. Gesamtreflexionsvermögen: **$R = (R_1 * R_2)^{0,5}$**
7. Analog zum Gütefaktor beim Schwingkreis ($Q = 1/R * \text{SQRT}(L/C)$) gibt es hier ebenfalls einen Ausdruck für die „Güte“ die sog. **Finesse $F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$**
8. Und bezogen auf die Moden Frequenzen eine Halbwerts- bzw. Linienbreite / beschreibt die Resonator-Verluste: **$f_{\text{hwb}} = \Delta f / F$**



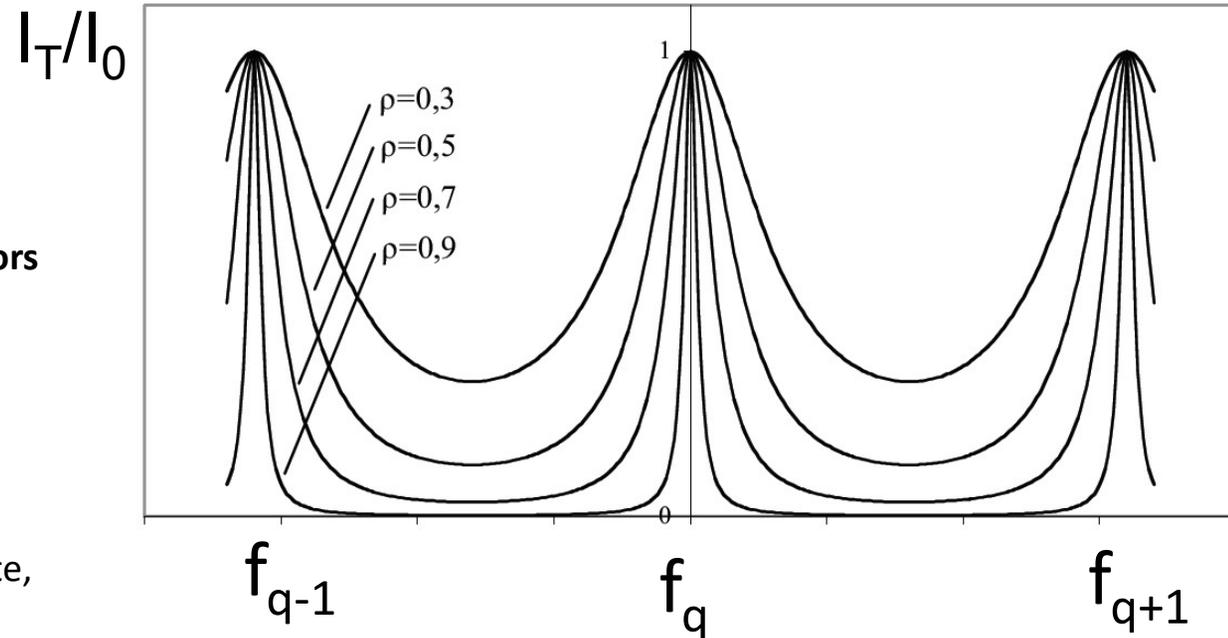
Die Moden im Resonator sind um so „schärfer“
je geringer die Strahlungsverluste im Resonator sind.

$$I_T = \frac{I_0}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

- Mit **F = Finesse des Resonators**
- **F** beschreibt die „Güte“ des Resonators

$$F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$$

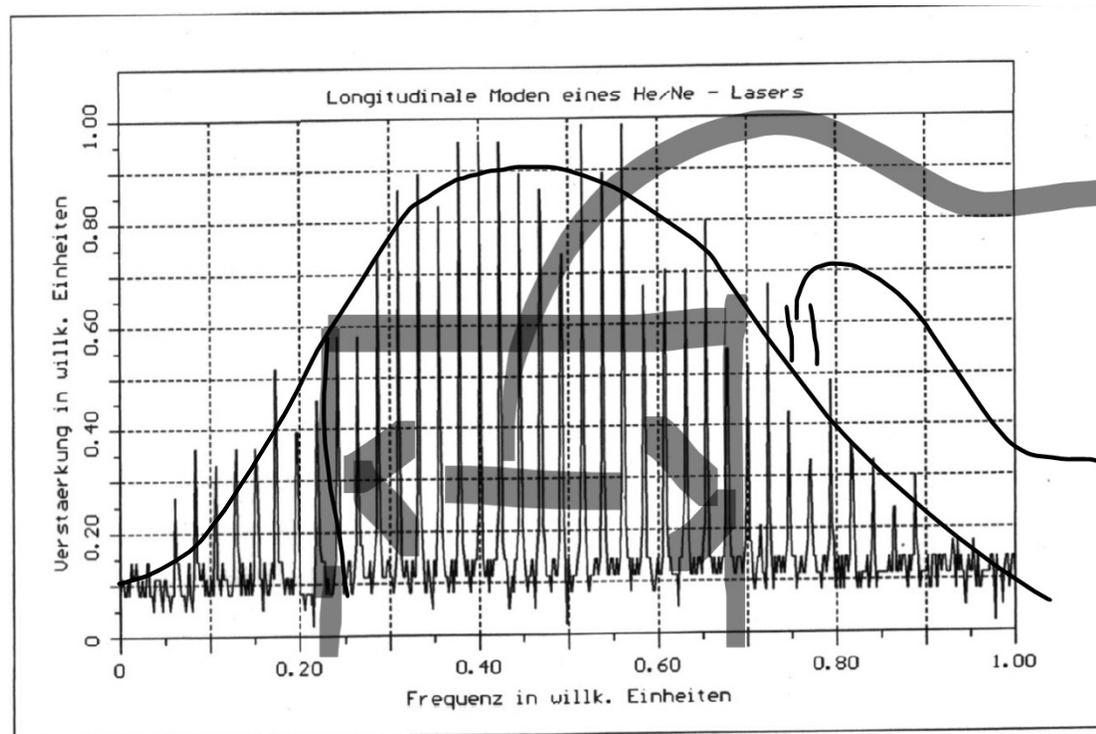
- F hoch = geringe Verluste, scharfer Resonanzpeak
- F niedrig = hohe Verluste, breiterer Resonanzpeak



Transmission I_T/I_0 eines 2-Spiegel-Resonators mit den Reflexionsgraden 0,9 / 0,7 / 0,5 / 0,3

Quelle: Dohlus „Technische Optik“

Im HeNe Laser Licht können die Longitudinalen Moden beobachtet werden



$$\Delta f_D = \frac{2f_{12}}{c} \sqrt{2kT \ln 2/m}$$

- Gegeben durch die Dopplerverbreiterung der Ne Atome in der Laserröhre

$$\Delta f = c / 2L$$

- Gegeben durch die longitudinalen Moden im Resonator

Longitudinale Moden für verschiedene Resonatorlängen

- Frequenz je axialem Mode:

$$f_q = q * c / 2L$$

- Die Freq.-Differenz zweier benachbarter axialer Moden („freien Spektralbereich“) ist

$$\Delta f = c / 2L$$

- **Multimode Betrieb:**
Mehrere Longitudinale Moden schwingen an und tragen auch alle zur Ausgangsleistung bei.
- **Singlemode Betrieb:**
Resonator jetzt so kurz, dass nur noch eine Mode anschwingen kann (hohe Frequenz „Reinheit“ – dafür geringere Ausgangsleistung)

Tabelle 3.4. Frequenzabstand der axialen Moden im TEM_{00} und Ausgangsleistung beim He-Ne-Laser für die Wellenlänge $\lambda=632,8 \text{ nm}$

Ausgangsleistung mW	Resonatorlänge m	axialer Modenabstand MHz	
10	0,75	200	
5	0,5	300	
1	0,2	750	
0,1	0,1	1500	

TRAD_LAS1983: Laser, K. Tradowsky, (1983, Vogel Verlag, 4. Auflage ISBN 3-8023-0021-1)

Methoden zur Laserpulserzeugung III

DIE Methode zur Erzeugung Ultrakurzer Laserpulse

- **Modenkopplung** (Laserpulsdauer 1 ps (10^{-12} s))
 - Pumpen jetzt kontinuierlich
 - Interferenz benachbarter axialer Moden durch Modulation der Verluste im Resonator
 - → noch kürzere Pulse mit noch höherer Peak-Leistung pro Puls
 - **siehe auch <https://www.geogebra.org/m/xesgynse>**

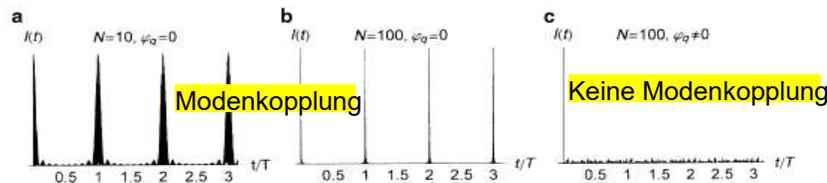


Abb. 17.6 Zeitlicher Verlauf der Laserintensität $I(t) \propto E(t)^2$ für die Überlagerung von N Lasermoden, links und Mitte ohne Phasendifferenz zur Zeit $t = 0$, rechts für statistische Phasen ($q = 10^6$)

Wie erreicht man eine feste Phasenbeziehung zur Kopplung der Moden?

Aktive Modenkopplung:

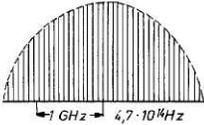
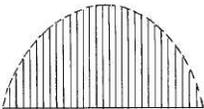
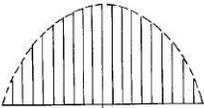
- Aktives Optisches Element im Resonator moduliert die Resonatorverluste mit der Frequenz $f_{\text{mod}} = c / 2L$

Passive Modenkopplung:

- Passives Optisches Element im Resonator
- „Sättigbarer Absorber“ gibt den Resonator erst ab einer Schwell-Intensität frei

Voraussetzung viele Axiale Moden

Tabelle 3.4. Frequenzabstand der axialen Moden im TEM_{00} und Ausgangsleistung beim He-Ne-Laser für die Wellenlänge $\lambda = 632,8$ nm

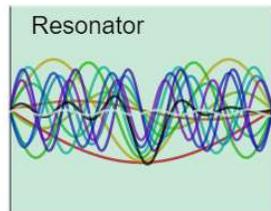
Ausgangsleistung mW	Resonatorlänge m	axialer Modenabstand MHz	
50	2	75	
40	1,5	100	
25	1	150	

Modenkopplungs Simulator für bis zu 11 Moden (in der Praxis $N > 10^5$ gekoppelte Moden möglich)

<https://www.geogebra.org/m/xesgynse>

Modengekoppelter Resonator

Animation <input type="button" value="Start"/>	Anzeige	Modeneinstellungen
Resonatorlänge	<input checked="" type="checkbox"/> Einzelne Moden	$n_{\min} = 1$
<input checked="" type="checkbox"/> Auskopplung	<input checked="" type="checkbox"/> Überlagerung	$n_{\max} = 11$
	<input checked="" type="checkbox"/> Frequenzdarstellung	<input checked="" type="checkbox"/> Modenkopplung <input type="button" value="Ok"/>



$$E(t) = \sum_{q=q_0}^{q_0+N} E_q \cos(2\pi f_q t + \varphi_q) = \sum_{q=q_0}^{q_0+N} E_q \cos(2\pi q \frac{t}{T} + \varphi_q)$$

Die Anregung der Moden mit fester Anfangsphase geschieht durch sinusförmige Modulation der optischen Weglänge im Resonator mit der Frequenz, die dem Modenabstand entspricht, und starkes Pumpen. Es ist heute möglich $N > 10^5$ Moden zu koppeln.

Die Halbwertsbreite der Pulse beträgt: $\Delta\tau \approx \frac{1}{N \Delta f} = \frac{T}{N}$.

Longitudinale Moden: $f_q = q \frac{c}{2L} = \frac{q}{T}$, T : Umlaufzeit im Resonator.

Die Moden müssen durch aktive oder passive Elemente im Resonator synchronisiert werden → dann erhält man kurze Laserpulse

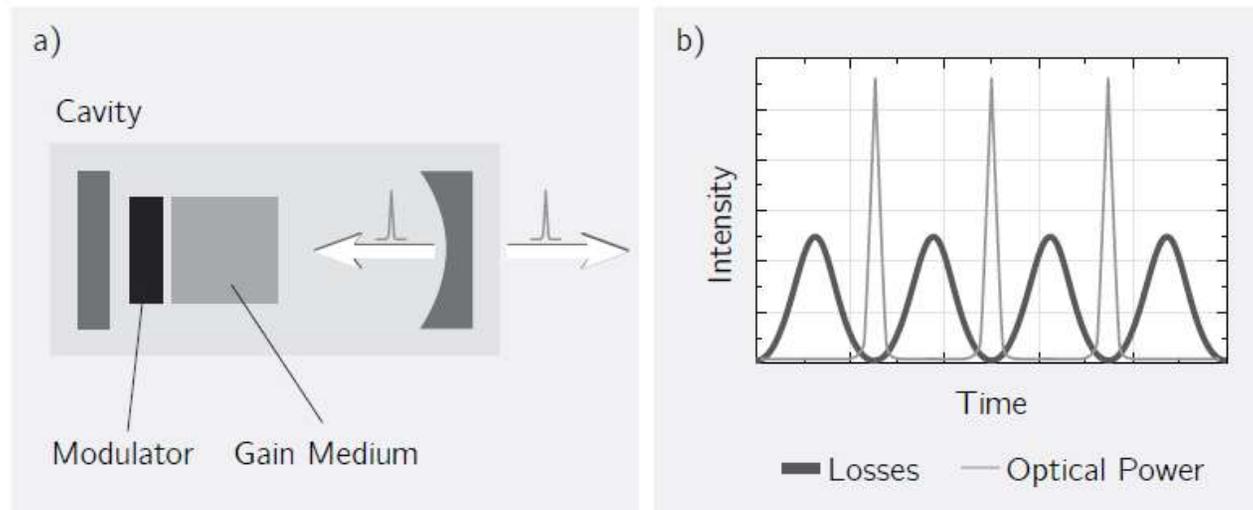


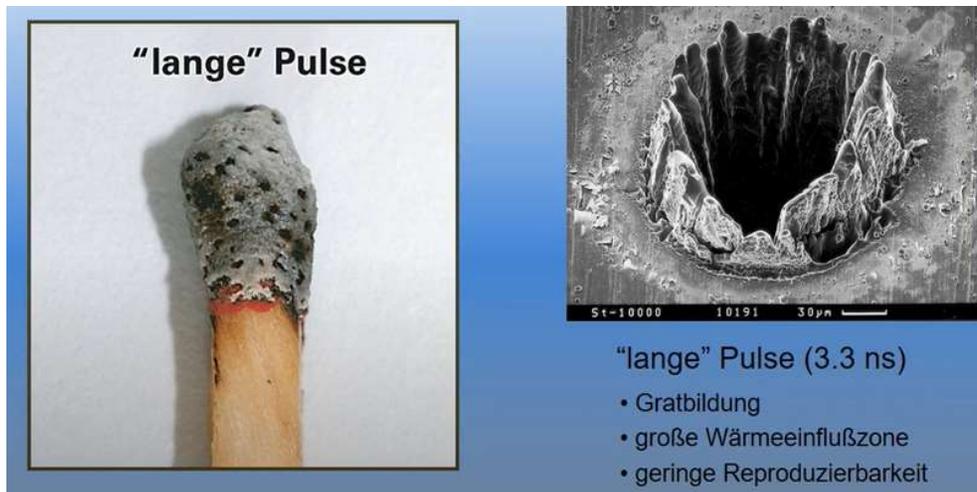
Abbildung 2.5: a) Schema eines Resonators mit aktiver Modenkopplung und b) zeitlicher Verlauf der Intensität.

Bachelorarbeit: Markus Schäfer, Uni Stuttgart, 2017

https://www.researchgate.net/publication/322203533_Bestimmung_der_nichtlinearen_Reflektivitat_von_sattigbaren_Halbleiterabsorberspiegeln_im_roten_Spektralbereich/link/5a4b516caca272d29464fdf9/download

Was kann man mit ultrakurzen Laserpulsen tun?

→ Materialbearbeitung mit sehr feinen Strukturen



Ultrakurze Laserpulse:

- Minimaler Wärmeeinfluß auf das Material
- Praktisch gratfrei
- Sehr feine Strukturen sind möglich

Überblicksvideo zu Materialbearbeitung mit ultrakurzen Laserpulsen

Ultrakurze Laserpulse – Neue Möglichkeiten für hochpräzise Materialstrukturierung; Institute for Applied Physics; Universität Jena

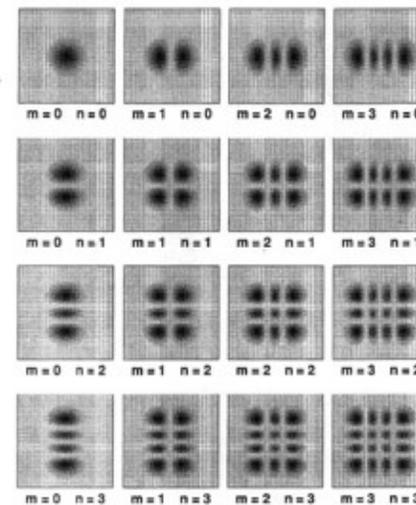


<https://www.youtube.com/watch?v=keP7MrdrGss>

Transversale Moden in Laser Resonatoren

Gauss'sche Strahlen

Laterale Modenstruktur in kartesischer Symmetrie:
Hermite'sche Funktionen



Mit den „**Longitudinalen bzw. axialen Moden**“ haben wir die im Resonator erlaubten Resonanzfrequenzen und ihre Eigenschaften kennen gelernt.

Jetzt wollen wir uns mit der „**Räumlichen Ausdehnung**“ des Laserstrahls im Resonator befassen und dabei „**Transversale Moden**“ und „**Gauss'sche Strahlen**“ kennenlernen.

Blick auf das Strahlungsfeld im Resonator hinsichtlich seiner räumlichen Ausdehnung

y Achse

x Achse

Im Resonator bildet sich eine stehende Welle

- Die Resonanzfrequenzen f_q bzw. axialen Moden haben wir schon betrachtet $f_q = q * c / 2L$

z Achse

Fragestellung:

- Welche Eigenschaften hat der Strahl in x-, y-, und z-Richtung?
- Innerhalb und außerhalb des Resonators?
- Was sind die Einflußgrößen?
 - Form der Spiegel (Radien, Abstände, ...)

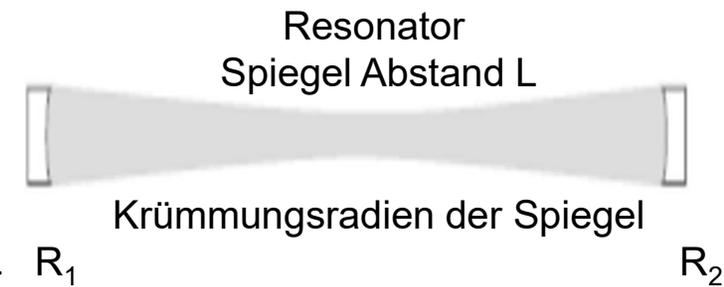
Transversale Moden TEM_{nm} können aus der Wellengleichung abgeleitet werden. Welche Ansätze stecken in der Herleitung?

1. Startpunkt ist die Wellengleichung $\frac{1}{c^2} * \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right)$
2. Lösungsansatz: $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \mathbf{E}_0 * \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) * \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) * e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$
3. Randbedingungen:
 - a. Welle E muss an der kompletten Spiegelfläche = 0 sein.
 - b. D.h. die Form und Abstand L der Spiegel und insbesondere die Krümmungsradien der Hohlspiegels R_1, R_2 sind relevant
 - c. Für spätere Rechnungen werden die sog. Resonator-Parameter g_1 und g_2 mit $g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}}$ eingeführt
4. Lösung: $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \mathbf{E}_0 * \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) * \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) * e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$ mit

$$X_m(x, z) = \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{w^2(z)} - i \frac{kx^2}{2R(z)} + i \frac{2m+1}{2} \zeta(z) \right)$$

$$Y_n(y, z) = \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left(-\frac{y^2}{w^2(z)} - i \frac{ky^2}{2R(z)} + i \frac{2n+1}{2} \zeta(z) \right)$$

5. Das sind die Transversalen Moden TEM_{nm}



$H_m(x)$: sind die sog. Hermite Polynome

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = (2x)^3 - 6(2x) = 8x^3 - 12x$$

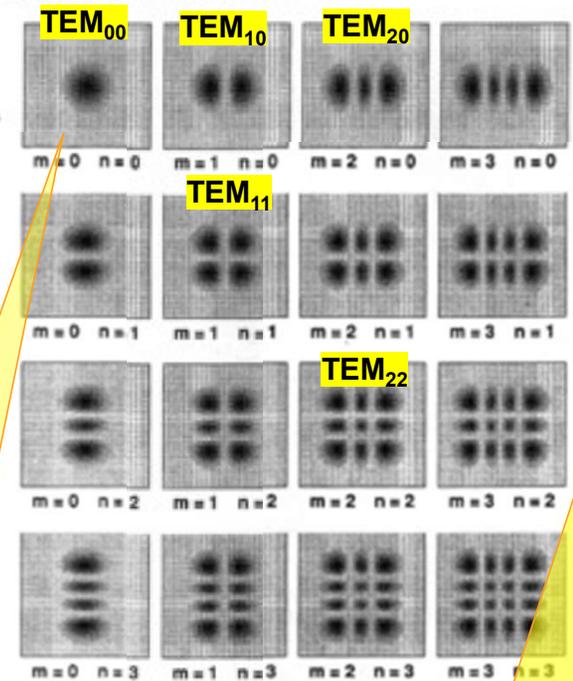
w_0 und $w(z)$ Strahlradien, $R(z)$ Krümmungsradius der Wellenfront

Neben dem Gauss'schen Strahl TEM_{00} gibt es in x-y-Richtung noch weitere Resonanzen, die sog. Höheren TEM_{mn} Moden (Transversale Elektromagnetische Moden)

Mit $n = m = 0$ erhalten wir unseren bereits bekannten Gauss'schen Strahl, bzw auch TEM_{00} Mode genannt.

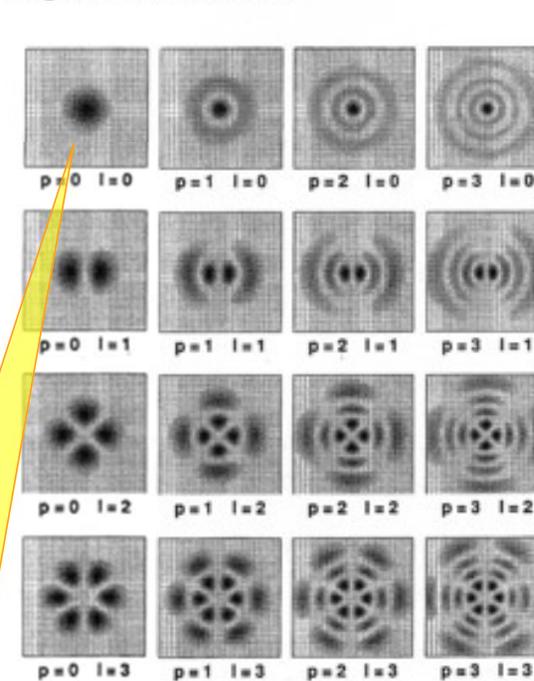
Es gibt aber auch höhere Moden $m, n \geq 0$, die auch in der Praxis beobachtet werden können.

Laterale Modenstruktur in kartesischer Symmetrie: Hermite'sche Funktionen

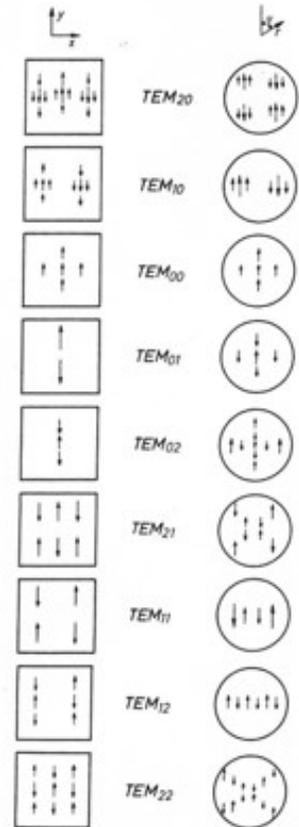


Quadratische Spiegel

Laterale Modenstruktur in polarer Symmetrie: Laguerre'sche Funktionen



Runde Spiegel



Orientierung der E-Feld Vektoren

TEM_{00} Mode = Gauss'scher Strahl

TEM_{00} Mode = Gauss'scher Strahl

Meistens will man mit TEM₀₀ arbeiten. TEM₀₀ wird auch Gauss'scher Strahl genannt

Wir setzen die Lösung für TEM₀₀ nochmal zusammen

$$E(r,z,t) = E_0 * X(x,z) * Y(y,z) * e^{ikz} * e^{-i\omega t}$$

$$X_m(x,z) = \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{w^2(z)} - i\frac{kx^2}{2R(z)} + i\frac{2m+1}{2}\zeta(z)\right)$$

$$Y_n(y,z) = \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{w^2(z)} - i\frac{ky^2}{2R(z)} + i\frac{2n+1}{2}\zeta(z)\right)$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = (2x)^3 - 6(2x) = 8x^3 - 12x$$

TEM₀₀ Mode ergibt sich durch Einsetzen n = m = 0 bzw. H_m(x) = H_n(x) = 1

Lösungen: Der Gauss'sche Strahl,

Und erhalten
(nach längeren Rechnungen)

$$E(r,z,t) = E_0(0) \frac{w_0}{w(z)} e^{-\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2} e^{j(\omega t - kz + \varphi_L - \varphi_T)}$$

mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad w(z) = w_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \quad z_R = \pi w_0^2 / \lambda$$

$$\varphi_L = \arctan(z/z_R), \quad \varphi_T = \frac{kr^2}{2\rho(z)}, \quad \rho(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

→ Oder für die Intensität mit $I \sim \langle E^2 \rangle$: $I(r,z,t) \sim I_0 \frac{w_0^2}{w(z)^2} e^{-\left(\frac{2r}{w(z)}\right)^2} \langle e^{2j(\omega t - kz - \varphi_L - \varphi_T)} \rangle$

TEM₀₀ Mode hat ein Gauss-Profil als Intensitätsverteilung (daher der Name Gauss'scher Strahl)

$$I(r) \sim E(r)^2$$

Definitionen

Strahlradius w

ist der Radius, bei dem die Intensität (in r-Richtung auf $1/e^2$ abgefallen ist.

Dort $I/I_0 = 1/e^2 = 13.5\%$

$$e = 2.72$$

$$e^{-2} = 1/e^2 = 0.135$$

Strahltaile (waist) w_0

Ist der Strahlradius an der schmalsten Stelle (in z-Richtung)

Rayleigh Länge z_R

Strahl weitet sich in z-Richtung auf. Bei z_R ist der Strahlradius $\sqrt{2}$ größer als bei w_0

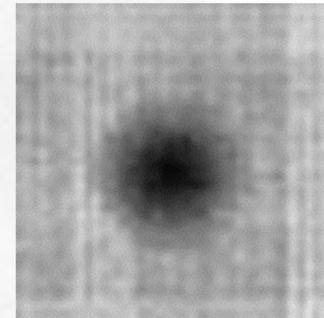
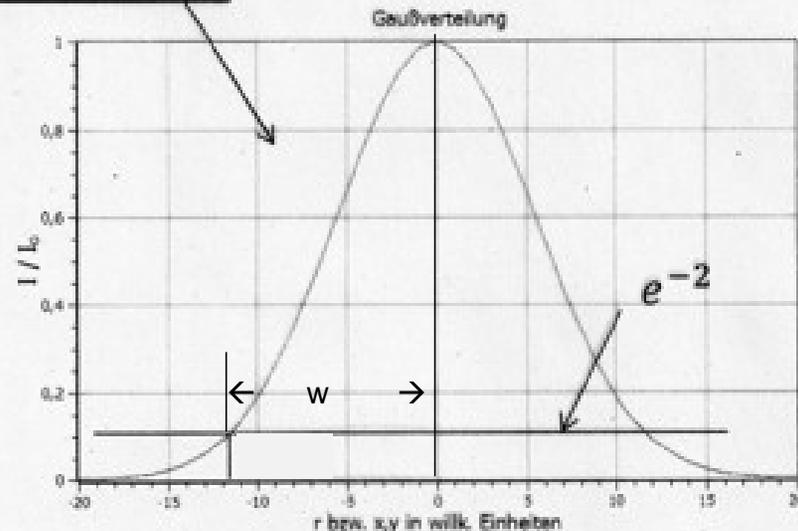
Intensitätsverteilung: Gaußverteilung!

$$I \sim \langle E^2 \rangle: I(r, z, t) \sim I_0 \frac{w_0^2}{w(z)^2} e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}} \langle e^{2j(\omega t - kz - \phi_L - \phi_T)} \rangle$$

$$I = I_0 e^{-\frac{2r^2}{w^2}}$$

$$w(z) = \sqrt{1 + z^2/z_R^2}$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$



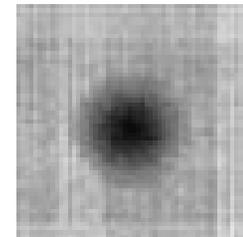
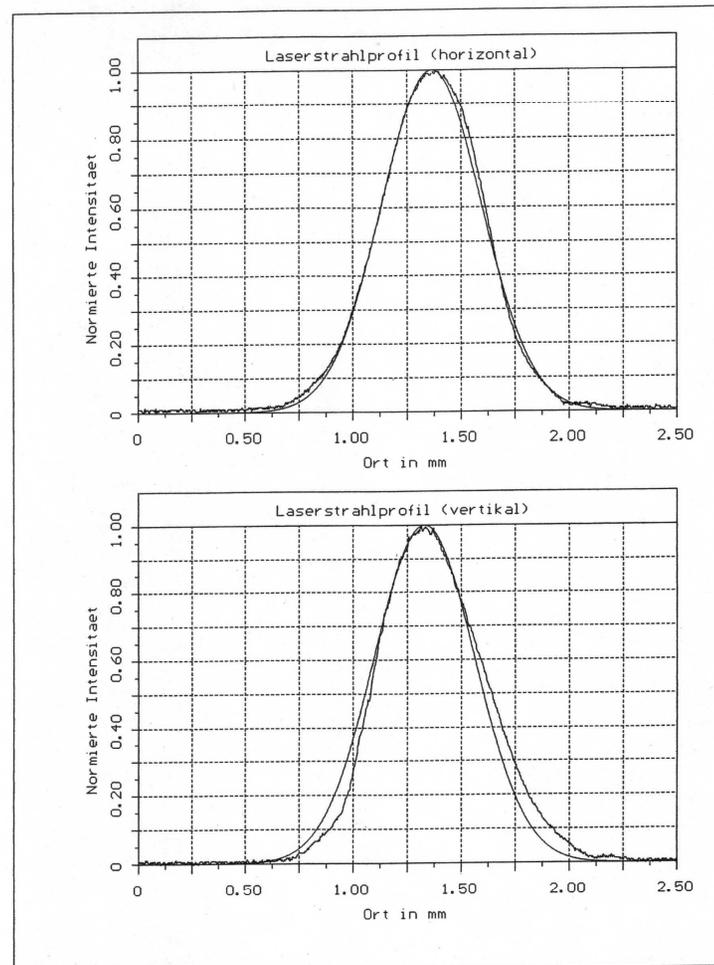
Gemessene (x,y) Intensitäts-Profile eines HeNe-Lasers

Ein He-Ne-Laser zeigt bei korrekter Justierung einen sog. Gauss'schen Strahl (auch TEM₀₀ Mode genannt)

- F: Warum heißt das Gauss'scher Strahl?
- A: Weil die Intensitätsverteilung (in der x, y Ebene) durch ein Gauss-Profil beschrieben wird.

$$f_{\text{Gauss}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$I = I_0 e^{-\frac{2r^2}{w^2}}$$

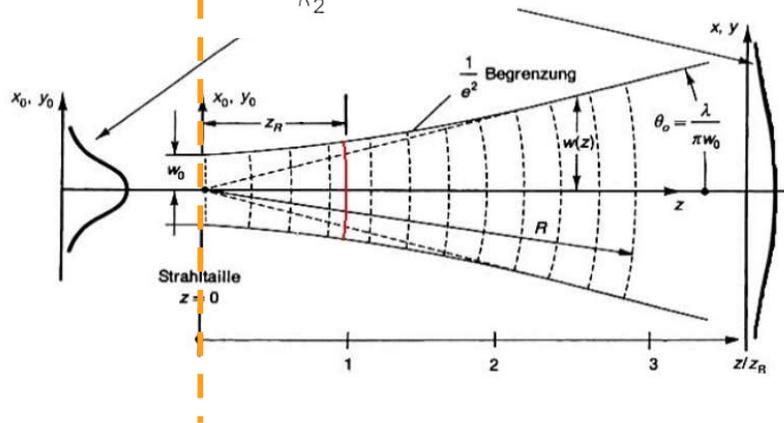
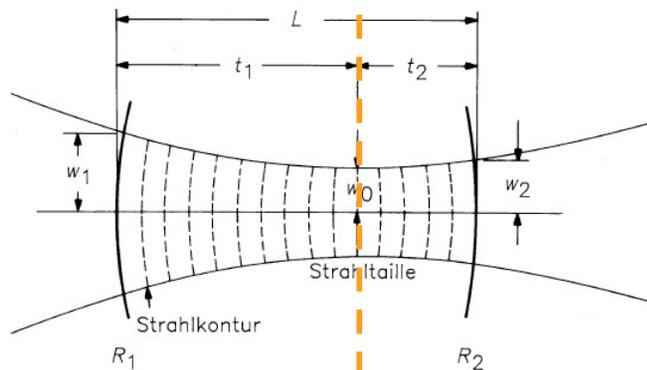


Für Gauss'sche Strahlen innerhalb und außerhalb des Resonators kann man folgende Gleichungen ableiten

Abkürzung: Resonator Parameter $g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}}$

mit L = Spiegelabstand

R_1, R_2 = Krümmungsradien der Spiegel 1,2



Formeln für die Strahlgeometrie im Gauß-Mode

Strahltaile: $w_0 = \left(\frac{L \lambda}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} \right)^{1/4}$

Strahlradien: (definiert durch Intensitätsabfall auf $1/e^2$)

$$w_1 = \left(\frac{L \lambda}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{g_2 \cdot 1}{g_1 (1 - g_1 g_2)} \right)^{1/4}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \cdot w_1$$

Tailenlage:

$$t_1 = \frac{g_2 (1 - g_1) L}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2}, \quad t_2 = L - t_1$$

Divergenzwinkel:

$$\Theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}, \quad \text{tg}(\Theta) = \frac{\Delta R}{s}$$

Rayleighlänge:

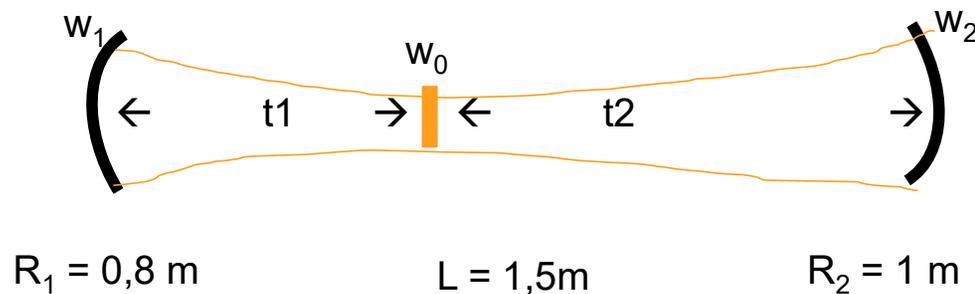
$$z_r = \frac{w_0^2 \cdot \pi}{\lambda}$$

Def. z_R :
Strahlradius Faktor
 $\sqrt{2}$ größer als w_0

Strahlaufweitung:

$$w(z) = w_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_r^2}}$$

31.)
 Wie groß ist für einen He/Ne - Laser (Resonatorspiegel $R_1 = 800$ mm und $R_2 = 1000$ mm, Resonatorlänge 1,5 m) der Strahltaillenradius, und wo liegt die Strahltaille?
 Geben Sie zusätzlich die Laserstrahlradien am Ort der Spiegel an.
 Zeichnen Sie eine Skizze der Strahlgeometrie.



$$\lambda = 633 \text{ nm}$$

$$g_1 = 1 - L/R_1 = 1 - 1,5 / 0,8 = -0,875$$

$$g_2 = 1 - L/R_2 = 1 - 1,5 / 1 = -0,5$$

$$g_1 * g_2 = 0,4375$$

Strahltaillen Radius:

$$w_0 = \left(\frac{L \lambda}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} \right)^{1/4} = 0,0005499 * 0,469 = 0,258 \text{ mm}$$

Strahltaillen Lage:

$$t_1 = \frac{g_2 (1 - g_1) L}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} = -1,406 / -2,25 = 0,625 \text{ m}, \quad t_2 = L - t_1 = 0,875 \text{ m}$$

Strahlradius auf Spiegeln

$$w_1 = \left(\frac{L \lambda}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{1}{1 - g_1 g_2} \right)^{1/4}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \cdot w_1$$

w1	Part1	0,00054977
	Part2	1,00394485
		0,55193611 mm
w2		0,73014284 mm

Überblick verschiedene (2-Spiegel) Resonatortypen

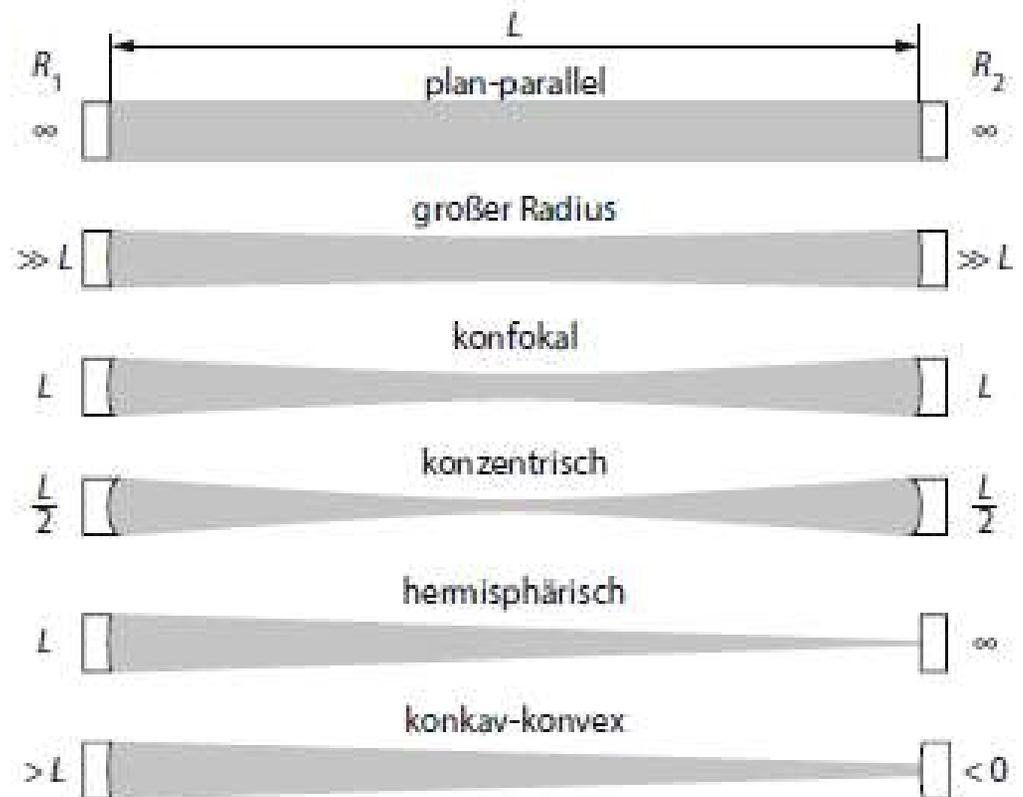
Abb. 13.9 Verschiedene Konfigurationen für Resonatoren

Plan-Parallel

- Strahlen können als ebene Welle beschrieben werden
- Großes Volumen des aktiven Mediums kann ausgenutzt werden
- **In der Praxis schwierig zu justieren (Spiegel müssen exakt parallel stehen)**
- **Beugungsverluste**
- **Keine Gauss'schen Strahlen**

Mindestens ein Hohlspiegel

- Strahlen als Kugelwelle beschrieben
- Haben einen Fokusbereich
- **Leichter zu justieren**
- **Nahezu keine Beugungsverluste**
- **Gauss'sche Strahlen**



Laserstrahlgeometrien bei verschiedenen Resonatortypen

($L = 1 \text{ m}$; $\lambda = 632,8 \text{ nm}$)

Beispielwerte
für
verschiedene
Resonatortypen

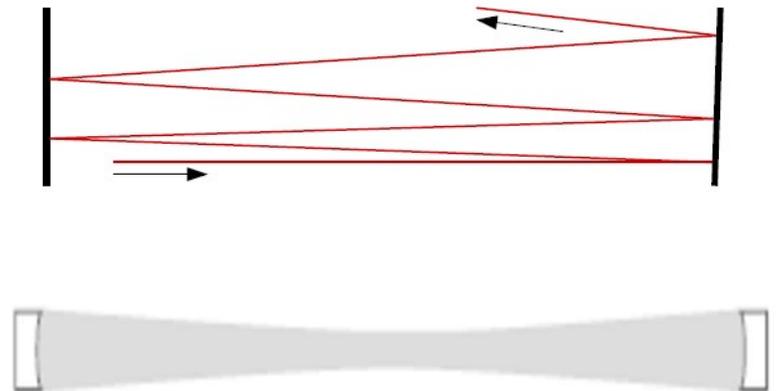
	Planar	Konkav*	Fokal	Konfokal	Sphärisch
w_0 / mm	∞	0,75	0,42	0,32	0,0032
w_1 / mm	wie w_0	0,75	0,48	0,45	31,7
w_2 / mm	wie w_0	0,78	0,48	0,45	31,7
t_1 / m	0,5	0,155	0,5	0,5	0,5
t_2 / m	0,5	0,845	0,5	0,5	0,5
$\Theta / 10^{-4} \text{ rad}$	0	2,69	4,82	6,35	635
$\Delta R_{100} / \text{mm}$	0	26,9	48,2	63,5	6347
g_1	1	0,98	0,5	0	-1
g_2	1	0,90	0,5	0	-1
$g_1 * g_2$	1	0,882	0,25	0	1

* $R_1 = 50 \text{ m}$; $R_2 = 10 \text{ m}$.

Planspiegel
Resonatoren
haben streng
genommen keine
Gauss Strahlen

Wann ist ein Resonator stabil und wann instabil und was kann man mit einem instabilen Resonator anfangen?

- **Wann ist ein Resonator stabil?**
Anschaulich dann, wenn der Strahl den Resonator nicht verlässt.
- Beispiel für einen instabilen Resonator. Einer der Spiegel steht schief und dadurch verlassen die Photonen den Resonator schon nach wenigen Umläufen → hohe Verluste
- Gekrümmte Spiegel (konkav) fokussieren ins Resonator-Innere und verbessern damit die Stabilität → geringe Verluste



- Mit den folgenden Größen:
 r_1, r_2 = Krümmungsradien Spiegel 1, 2 ($r > 0$ wenn Spiegel konkav, $r < 0$ wenn konvex)
 L = Spiegelabstand (Resonator Länge) und $g_1 = 1 - L/R_1$ und $g_2 = 1 - L/R_2$

• Ist ein Resonator dann stabil, wenn

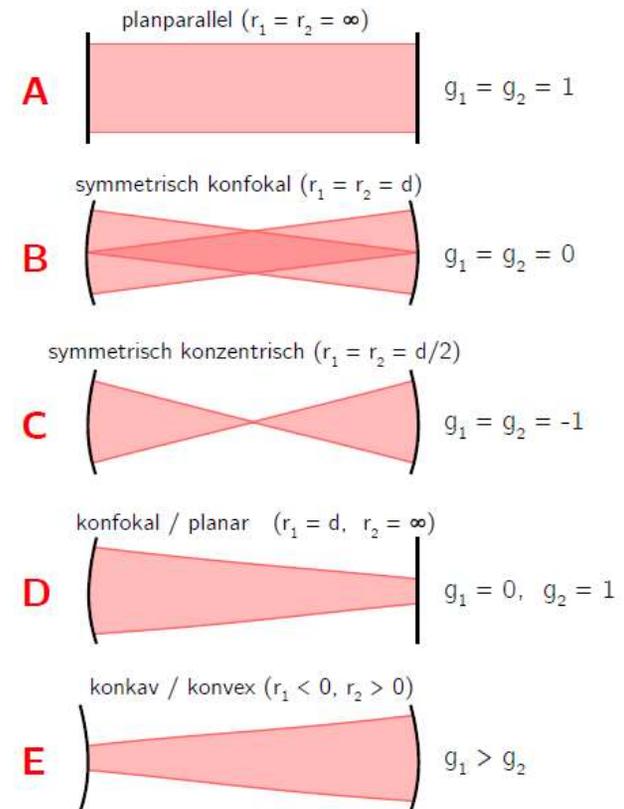
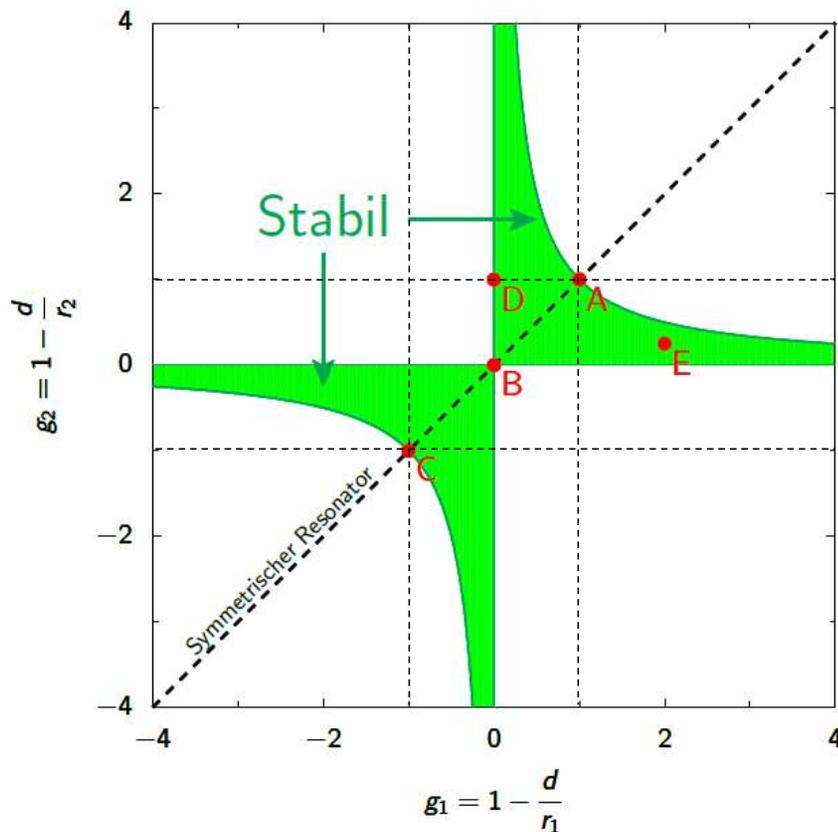
- Beispiel: $R_1 = 80\text{cm}$, $R_2 = 100\text{cm}$, $L = 160\text{cm}$
 $g_1 = 1 - 160 / 80 = 1 - 2 = -1$, $g_2 = 1 - 160 / 100 = -0,6$
 $g_1 * g_2 = -1 * -0,6 = 0,6$ → Resonator wäre stabil

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1$$

$$w_1 = \left(\frac{L \lambda}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{1}{1 - g_1 g_2} \right)^{1/4}$$

Math.: w_1 soll reell sein, d.h. das Argument der Wurzel ≥ 0

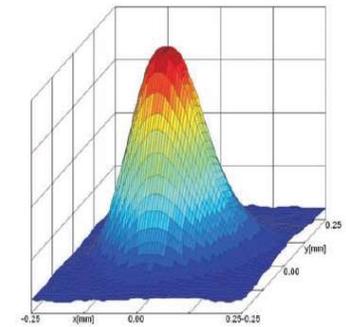
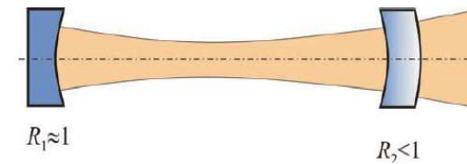
Stabilitätsbereich optischer Resonatoren, bzw. grafische Darstellung von $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$



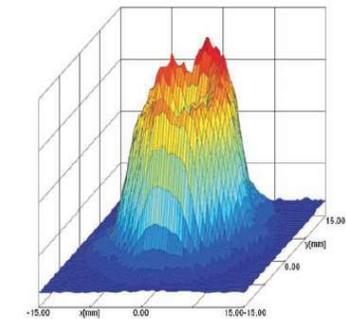
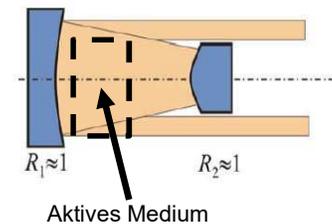
Stabile versus instabile Resonatoren

- **Resonator stabil:** $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$,
 - Gauß Strahl
 - geringe Beugungsverluste im Resonator
- **Resonator instabil** wenn: $g_1 g_2 > 1$ oder $g_1 g_2 < 0$
 - Dann existiert KEIN Gaußstrahl als Grundmode
 - Hohe Beugungsverluste
- **Trotzdem können auch instabile Resonatoren vorteilhaft eingesetzt werden.**
 - Typischerweise für Lasermedien mit sehr hoher Verstärkung und großem Querschnitt des aktiven Mediums
 - z.B. bei Lasern mit großen Verstärkungsfaktoren
 - Excimer-Lasern oder
 - CO₂-Lasern
 - Geeignet für sehr hohe Laserleistungen, da Spiegel nur auf Reflektion ausgelegt sein müssen.

Stabiler Resonator



Instabiler Resonator



b)

Bild 2.11 Resonator Grundformen und dazugehörige Intensitätsverteilungen. a) stabiler Resonator, b) instabiler Resonator

In der Praxis werden i.d.R. programmgestützte Werkzeuge zum Laser- und Resonator Design genutzt



The unique combination of simulation tools for LASer Cavity Analysis and Design

During the last 15 years **LASCAD™** has become industry-leading software for LASer Cavity Analysis and Design. The feedback from a large community of users has helped us gather experience for improving laser resonator design.

To optimize laser resonator design, **LASCAD™** provides a unique combination of simulation tools:

- **Thermal and Structural Finite Element Analysis (FEA)** of thermal effects in laser crystals
- **ABCD Gaussian Beam Propagation Code** taking into account thermal lensing, gain guiding, etc.
- **Dynamic Analysis of Multimode and Q-switched operation (DMA)** analyzing the dynamic, 3D behavior of laser beams
- **3D Physical Optics Beam Propagation Code (BPM)** including diffraction, gain dynamics, etc.

https://www.las-cad.com/files/lascad_brochure.pdf

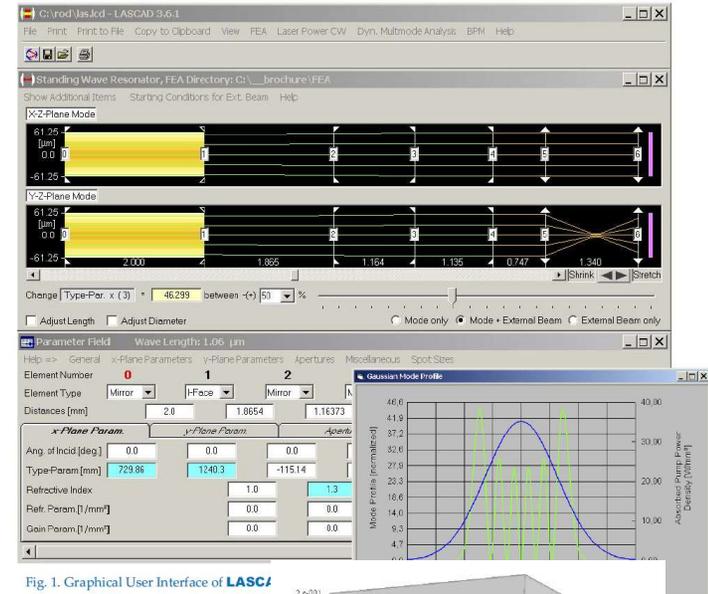


Fig. 1. Graphical User Interface of LASCAD

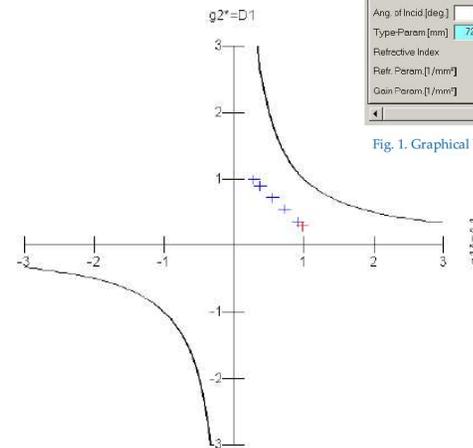


Fig. 5. Stability Diagram

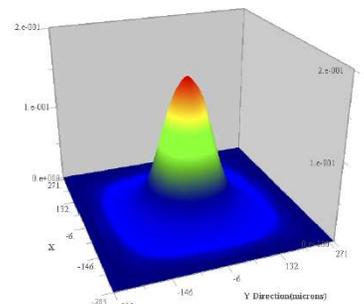


Fig. 9. BPM Beam Profile

Dimensionen des Laserstrahls in großer Entfernung

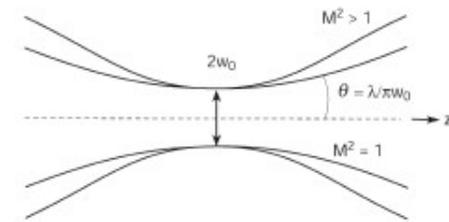
Divergenz θ , Tailenradius w_0 und Maßzahl M eines Laserstrahls werden oft als technische Daten eines Lasers genannt

Divergenzwinkel eines Laserstrahls im TEM_{00} ist gegeben durch:

$$\theta = \frac{M^2 \lambda}{\pi * w_0}$$

Oft auch als SPP (Strahlparameterprodukt) angegeben:

$$SPP = \theta w_0 = \frac{M^2 \lambda}{\pi}$$



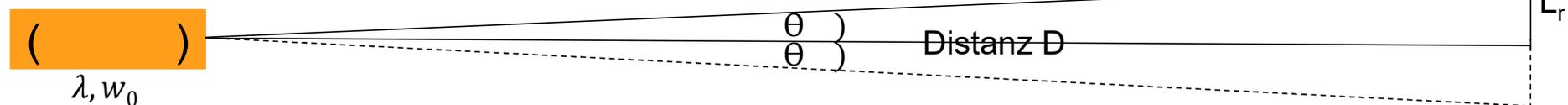
M^2 ist die sog. Beugungsmaßzahl. $M^2 = 1$ für reinen TEM_{00} und $M^2 > 1$ für nicht ganz ideale TEM_{00} Strahlen

Beispiel: (mit $M = 1$)

HeNe Laser: $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $w_0 = 0,3 \text{ mm}$, TEM_{00}

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi * w_0} = 632,8 * 10^{-9} \text{ m} / (3,14 * 3 * 10^{-4} \text{ m}) = 6,7 * 10^{-4} \text{ rad}$$

Laserfleck-
Radius



Wie groß ist der Laserfleck eines HeNe Lasers in der Distanz $D = 500 \text{ m}$?

$$L_r = D * \tan \theta \sim D * \theta = 500 \text{ m} * 6,7 * 10^{-4} = 0,33 \text{ m}$$

$$\text{Durchmesser des Laserflecks} = 2 * L_r = 66 \text{ cm}$$

mit $\tan \theta \sim \theta$ für kleine Winkel