

# Lasertechnik VL-4

**Mechatronik 4.tes Semester**

**Vorlesung Sommersemester 2023**

**VL: Prof. Dr. Thomas Hebert ([thebert@fb2.fra-uas.de](mailto:thebert@fb2.fra-uas.de))**

**Labor: Hans-Peter Tögel, Lutz Zimmermann, Prof. Kurt Jansen**



**Fachbereich 2** Informatik und Ingenieurwissenschaften

# Aufgaben

5.) Die Grenzwellenlänge des Photoeffekts für Silber liegt bei 262 nm.



a) Berechnen Sie die Austrittsarbeit für Silber.

b) Berechnen Sie die maximale Bremsspannung für einfallende Strahlung der Wellenlänge 175 nm.

[Lösung: 4,74 eV ; 2,36 V] ++



6.) Können Photoelektronen aus einer Kupferoberfläche, deren Austrittsarbeit 4,4 eV beträgt, emittiert werden, wenn sie mit sichtbarem Licht bestrahlt wird?

[Lösung: -] (++)



11.) Wie viele Photonen werden in einer Sekunde von einer gelben Lampe (Wellenlänge = 600 nm) von 10 W Leistung emittiert?

[Lösung:  $3 \cdot 10^{19}$ ] (+)

# Übungsaufgaben

3.) Berechnen Sie die elektrische Abstoßungskraft zwischen zwei Protonen in einem Wasserstoffmolekül. Ihr Abstand beträgt  $0,74 \cdot 10^{-10}$  m. Geben Sie das Verhältnis dieser Kraft zu der anziehenden Gravitationskraft an.

[Lösung:  $4,20 \cdot 10^{-8}$  N,  $-1,24 \cdot 10^{36}$ ] (+)

12.) Welche Energie muß ein Photon besitzen, um den gleichen Impuls wie ein Proton der kinetischen Energie von 10 MeV zu haben?

[Lösung: 137,4 MeV] (+)

17.) Ein Wasserstoffatom befinde sich in seinem zehnten angeregten Zustand. Es wird das Bohr'sche Atommodell vorausgesetzt. Wie groß ist der Radius der entsprechenden Kreisbahn des Elektrons? Wie groß ist der Drehimpuls des Elektrons? Wie groß ist seine kinetische -, potentielle - und Gesamtenergie?

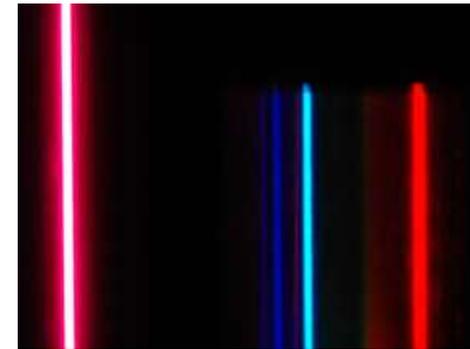
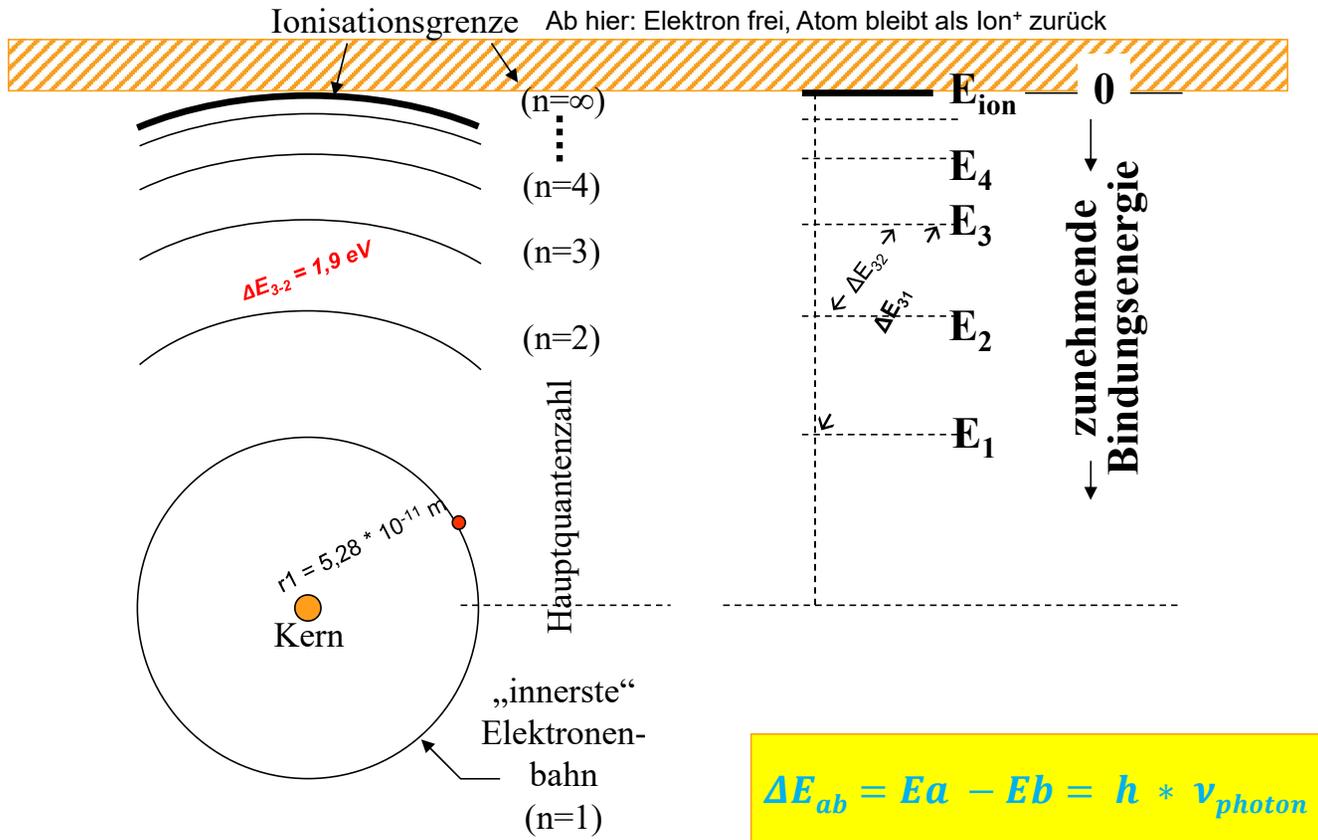
[Lösung: 6,4 nm ;  $1,16 \cdot 10^{-33}$  kgm<sup>2</sup>/s ; 0,113 eV ; -0,225 eV ; -0,112 eV] (++)

18.) Wie groß ist die Bindungsenergie eines Elektrons a) für ein Wasserstoffatom b) für He<sup>+</sup> und c) für Li<sup>++</sup>?

[Lösung: 13,6 eV ; 54,4 eV ; 122,4 eV] (-)

# Wasserstoff / H-Atom

## Elektronenbahnen, Energie Niveaus, Spektrallinien



Wasserstoff

kein kontinuierliches sondern  
**diskretes**  
 Spektrum  
**(Linienspektrum)**

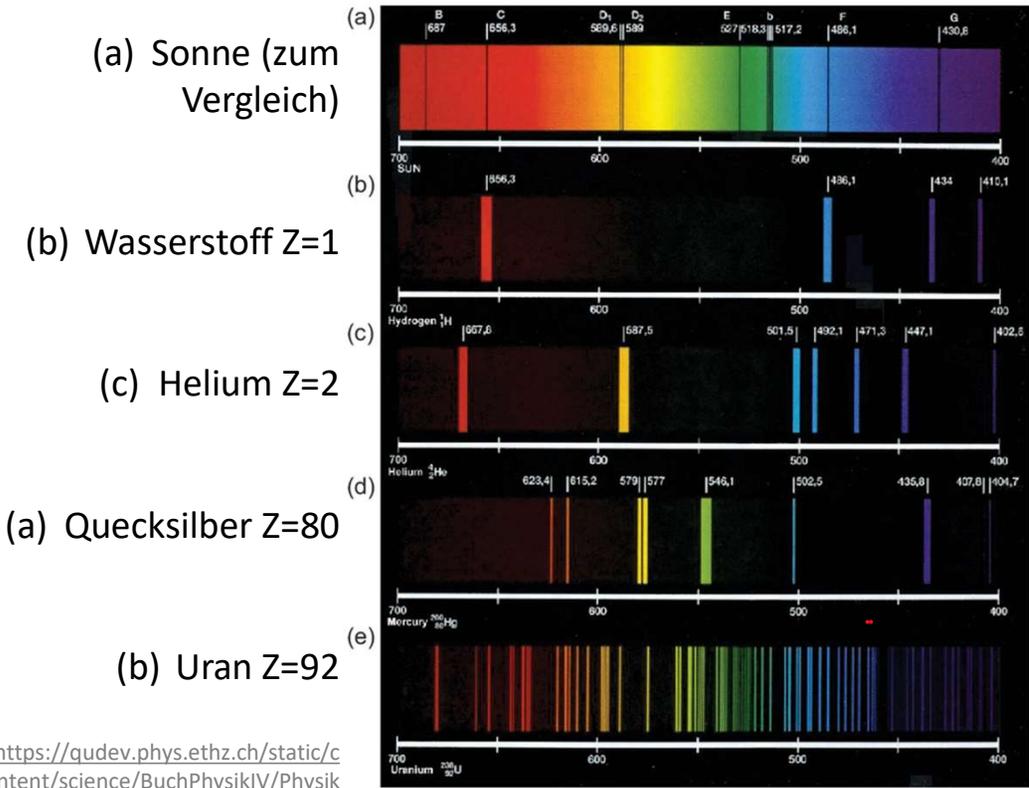
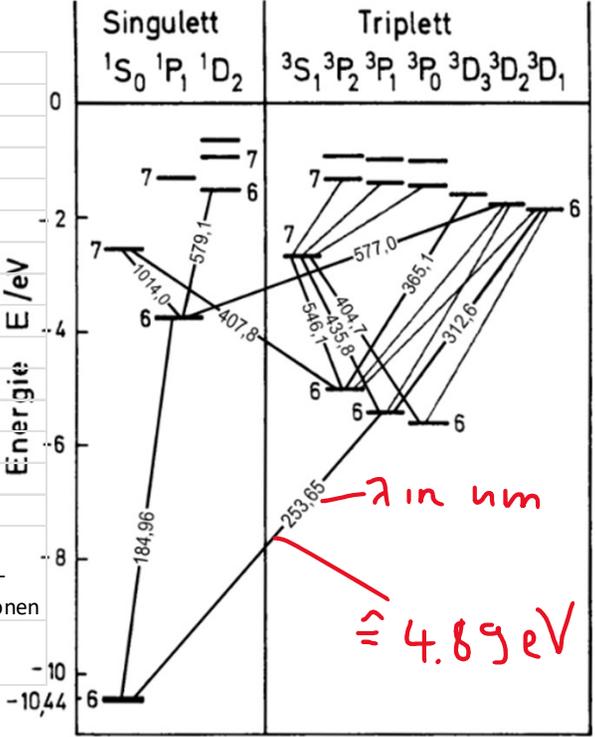
Jedes Atom hat spezifische Energieniveaus.  
Übergänge zwischen den Energieniveaus führen zu den Spektrallinien, mit denen, ähnlich einem Fingerabdruck, das Atom identifiziert werden kann

Quecksilber Hg (80)  
Orbitale & Elektronen

Energieschema Hg

Orbital	Elektronen
1s	2
2s	2
2p	6
3s	2
3p	6
3d	10
4s	2
4p	6
4d	10
4f	14
5s	2
5p	6
5d	10
5f	
6s	2
Elektronen Summe	80

Valenz-  
elektronen



<https://qudev.phys.ethz.ch/static/content/science/BuchPhysikIV/PhysikIVch8.html>

## Spätere Erweiterungen des Bohr'schen Atommodells

- Detailliertere Untersuchungen an Wasserstoff Atomen zeigen zusätzliche Effekte, die nicht allein mit dem Bohr'schen Atommodell und der Hauptquantenzahl  $n$  erklärt werden können.
- Auch reicht das Bohr Modell nicht aus um den Aufbau und Spektren der anderen Atome mit  $Z > 1$ 
  - (z.B. Helium He: 2 Elektronen → Gegenseitige Abstossung der Elektronen muss noch einbezogen werden).
- Es gibt neben der Hauptquantenzahl  $n$ 
  - $l$  Drehimpulsquantenzahl
  - $m$  magnetische Quantenzahl
  - $s$  Spin Quantenzahl
- Entsprechend wurde das Modell erweitert und mit der Quantenmechanik zu einer umfassenden Theorie für Atome, Moleküle und Festkörper ausgebaut.

# Vom Bohr'schen Atommodell zu Quantenmechanik, Schrödinger Gleichung und Wellenfunktion

Entwickelt von **Erwin Schrödinger** (1887 – 1961) im Jahr 1926

## Basis ist das Bohr'sche Atommodell:

- Das Elektron kann durch de Broglie Welle beschrieben werden
- Die atomaren Energiezustände können als „stehende de Broglie Wellen“ verstanden werden

## Statistische Deutung:

- Die zugehörige **Wellenfunktion** wird mit  $\psi$  bezeichnet
- Ort des Elektrons kann nicht exakt bestimmt werden die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit p das Elektron ein einem bestimmten Ort anzutreffen kann aus dem Betragsquadrat der Wellenfunktion bestimmt werden  $p \sim |\psi|^2$**

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (\text{stationäre Schrödingergleichung})$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x, t) \right] \psi(x, t) = E\psi(x, t)$$

(zeitabhängige eindimensionale Schrödingergleichung)

H: Hamilton Operator

$\psi$ : Wellenfunktion

E: Energiewerte

$\Delta$ : Laplace Operator ( $d^2/dx^2$ ,  $d^2/dy^2$ ,  $d^2/dz^2$ )

Die Lösung der Schrödinger Gleichung (hier in Polarkoordinaten) bringt uns zu den **Quantenzahlen n, l, m, s\***

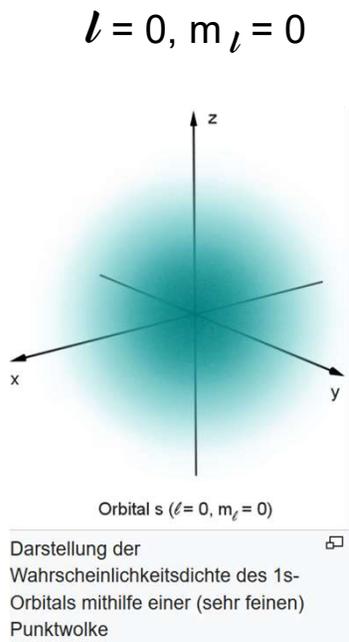
$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_n(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

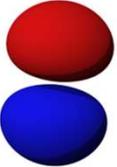
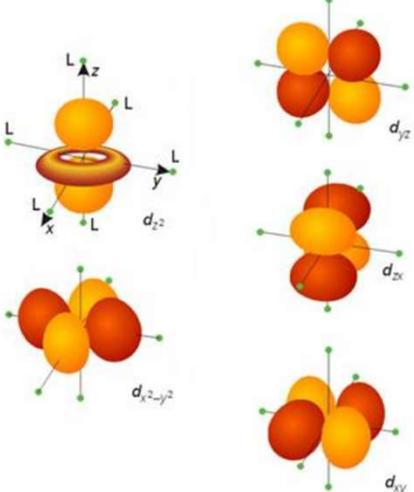
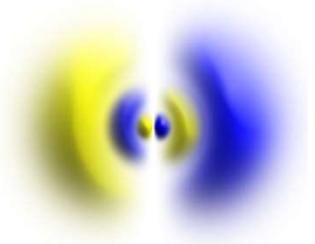
Radialteil

Winkelteil

\* s hier nicht enthalten und wird durch eine spezielle Spin Raum Wellenfunktion beschrieben

# Die Quantenzahl $l$ , bzw. $|\psi(n, l, m)|^2$ geben Aufschluß über geometrische Struktur der Orbitale („Elektronenwolken“)



$p_z$ -Orbital	$d$ -Orbitale	$4p$ -Orbital
<p><math>l = 1, m_l = 0</math></p> 		
<p>Vereinfachte Form eines p-Orbitals (<math>l = 1</math>). Die Färbung steht für das Vorzeichen der Wellenfunktion. Dargestellt ist eine Isofläche von <math> \Psi(\vec{r}) ^2</math>.</p>	<p>Vereinfachte Formen der verschiedenen d-Orbitale (jeweils <math>l = 2</math>). Für die jeweiligen Orbitale ist eine Isofläche der Wahrscheinlichkeitsdichte <math> \Psi(\vec{r}) ^2</math> dargestellt.</p>	<p>Form eines 4p-Orbitals (<math>l = 1, m_x = 0</math>). Die Färbung steht für das Vorzeichen der Wellenfunktion.</p>

# Schalenmodell

## Systematik der Quantenzahlen

### $n, l, m, s$

Hauptquantenzahl  $n$ : 1, 2, 3, 4, 5...

Drehimpulsquantenzahl  $l$ : 0, ..., (n-1)

magnet. Quantenzahl  $m$ :  $-l, -(l-1), \dots, 0, \dots, +(l-1), +l$

Spin-Quantenzahl  $s$  oder  $m_s$ :  $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

Jeder durch einen Zahlensatz  $n, l, m, s$  beschriebene Energiezustand kann in einem Atom nur 1 mal besetzt werden, d.h. alle Elektronen eines Atoms haben unterschiedliche Quantenzahlen (**Pauli-Prinzip**)

## Beispiele

$n = 1$

- $l = 0$
- $m_l = 0$
- $m_s = +/- \frac{1}{2}$
- $\rightarrow$   
1 0 0  $\frac{1}{2}$     1 0 0  $-\frac{1}{2}$   
2 Zustände  
 $2 * 1 * 1 = 2$

$n = 2$

- $l = 0, 1$
- $m_l = -1, 0, 1$
- $m_s = +/- \frac{1}{2}$
- $\rightarrow$   
2 0 0  $\frac{1}{2}$ , 2 0 0  $-\frac{1}{2}$ ,  
2 1, 0,  $\frac{1}{2}$ , 2 1 0,  $-\frac{1}{2}$ ,  
2 1  $-\frac{1}{2}$ , 2 1  $-\frac{1}{2}$   
2 1 1  $\frac{1}{2}$ , 2 1 1  $-\frac{1}{2}$   
8 Zustände  
 $2 * 2 * 2 = 8$

$n = 3$

- $l = 0, 1, 2$
- $m_l = 0, -1, 1, -2, 2$
- $m_s = +/- \frac{1}{2}$
- $\rightarrow$   
3 0 0  $\frac{1}{2}$ , 3 0 0  $-\frac{1}{2}$ ,  
3 1 0,  $\frac{1}{2}$ , 3 1 0,  $-\frac{1}{2}$ ,  
3 1  $-\frac{1}{2}$ , 3 1  $-\frac{1}{2}$   
3 1 1  $\frac{1}{2}$ , 3 1 1  $-\frac{1}{2}$   
3 2 0  $\frac{1}{2}$ , 3 2 0  $-\frac{1}{2}$ ,  
3 2  $-\frac{1}{2}$ , 3 2  $-\frac{1}{2}$ ,  
3 2 1  $\frac{1}{2}$ , 3 2 1  $-\frac{1}{2}$ ,  
3 2  $-\frac{1}{2}$ , 3 2  $-\frac{1}{2}$ ,  
3 2 2  $\frac{1}{2}$ , 3 2 2  $-\frac{1}{2}$ ,  
18 Zustände  
 $2 * 3 * 2 = 18$

$n = 4$

Wieviele Zustände möglich?

Je Hauptquantenzahl  $n$  sind  $2n^2$  Zustände möglich

# Konkrete Beispiele für den Grundzustand einiger Atome

Wasserstoff **H** (Z=1, 1 Elektron vorhanden):

Elektron<sub>1</sub>:  $n = 1, \ell = 0, m = 0, s = \frac{1}{2}$  (oder  $s = -\frac{1}{2}$ )

**1s**

**l=0 entspr. s**

Helium **He** (Z=2, 2 Elektronen vorhanden):

- Elektron<sub>1</sub>:  $n = 1, \ell = 0, m = 0, s = \frac{1}{2}$
- Elektron<sub>2</sub>:  $n = 1, \ell = 0, m = 0, s = -\frac{1}{2}$

**1s<sup>2</sup>**

Hauptquantenzahl  $n: 1, 2, 3, 4, 5, \dots$   
Drehimpulsquantenzahl  $\ell: 0, \dots, (n-1)$   
magnet. Quantenzahl  $m: -\ell, -(\ell-1), \dots, 0, \dots, +(\ell-1), +\ell$   
Spin-Quantenzahl  $s$  oder  $m_s: -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

Lithium **Li** (Z=3, 3 Elektronen vorhanden): (wie Helium, aber ein Elektron mehr)

- Elektron<sub>1</sub>:  $n = 1, \ell = 0, m = 0, s = \frac{1}{2}$
- Elektron<sub>2</sub>:  $n = 1, \ell = 0, m = 0, s = -\frac{1}{2}$
- Elektron<sub>3</sub>:  $n = 2, \ell = 0, m = 0, s = \frac{1}{2}$

**1s<sup>2</sup> 2s**

Schale	Element																	
K 1s	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^1_1\text{H}</math></span> <span><math>{}^2_2\text{He}</math></span> </div>																	
L 2s	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^3_3\text{Li}</math></span> <span><math>{}^4_4\text{Be}</math></span> </div>																	
L 2p	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^5_5\text{B}</math></span> <span><math>{}^6_6\text{C}</math></span> <span><math>{}^7_7\text{N}</math></span> <span><math>{}^8_8\text{O}</math></span> <span><math>{}^9_9\text{F}</math></span> <span><math>{}^{10}_{10}\text{Ne}</math></span> </div>																	
M 3s	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{11}_{11}\text{Na}</math></span> <span><math>{}^{12}_{12}\text{Mg}</math></span> </div>																	
M 3p	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{13}_{13}\text{Al}</math></span> <span><math>{}^{14}_{14}\text{Si}</math></span> <span><math>{}^{15}_{15}\text{P}</math></span> <span><math>{}^{16}_{16}\text{S}</math></span> <span><math>{}^{17}_{17}\text{Cl}</math></span> <span><math>{}^{18}_{18}\text{Ar}</math></span> </div>																	
N 4s	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{19}_{19}\text{K}</math></span> <span><math>{}^{20}_{20}\text{Ca}</math></span> </div>																	
M 3d	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{21}_{21}\text{Sc}</math></span> <span><math>{}^{22}_{22}\text{Ti}</math></span> <span><math>{}^{23}_{23}\text{V}</math></span> <span><math>{}^{24}_{24}\text{Cr}</math></span> <span><math>{}^{25}_{25}\text{Mn}</math></span> <span><math>{}^{26}_{26}\text{Fe}</math></span> <span><math>{}^{27}_{27}\text{Co}</math></span> <span><math>{}^{28}_{28}\text{Ni}</math></span> <span><math>{}^{29}_{29}\text{Cu}</math></span> <span><math>{}^{30}_{30}\text{Zn}</math></span> </div>																	
N 4p	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{31}_{31}\text{Ga}</math></span> <span><math>{}^{32}_{32}\text{Ge}</math></span> <span><math>{}^{33}_{33}\text{As}</math></span> <span><math>{}^{34}_{34}\text{Se}</math></span> <span><math>{}^{35}_{35}\text{Br}</math></span> <span><math>{}^{36}_{36}\text{Kr}</math></span> </div>																	
O 5s	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{37}_{37}\text{Rb}</math></span> <span><math>{}^{38}_{38}\text{Sr}</math></span> </div>																	
N 4d	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{39}_{39}\text{Y}</math></span> <span><math>{}^{40}_{40}\text{Zr}</math></span> <span><math>{}^{41}_{41}\text{Nb}</math></span> <span><math>{}^{42}_{42}\text{Mo}</math></span> <span><math>{}^{43}_{43}\text{Tc}</math></span> <span><math>{}^{44}_{44}\text{Ru}</math></span> <span><math>{}^{45}_{45}\text{Rh}</math></span> <span><math>{}^{46}_{46}\text{Pd}</math></span> <span><math>{}^{47}_{47}\text{Ag}</math></span> <span><math>{}^{48}_{48}\text{Cd}</math></span> </div>																	
O 5p	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{49}_{49}\text{In}</math></span> <span><math>{}^{50}_{50}\text{Sn}</math></span> <span><math>{}^{51}_{51}\text{Sb}</math></span> <span><math>{}^{52}_{52}\text{Te}</math></span> <span><math>{}^{53}_{53}\text{I}</math></span> <span><math>{}^{54}_{54}\text{Xe}</math></span> </div>																	
N 4f	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{55}_{55}\text{Cs}</math></span> <span><math>{}^{56}_{56}\text{Ba}</math></span> </div>																	
O 5d	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{57}_{57}\text{La}</math></span> </div>																	
N 4f	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{58}_{58}\text{Ce}</math></span> <span><math>{}^{59}_{59}\text{Pr}</math></span> <span><math>{}^{60}_{60}\text{Nd}</math></span> <span><math>{}^{61}_{61}\text{Pm}</math></span> <span><math>{}^{62}_{62}\text{Sm}</math></span> <span><math>{}^{63}_{63}\text{Eu}</math></span> <span><math>{}^{64}_{64}\text{Gd}</math></span> <span><math>{}^{65}_{65}\text{Tb}</math></span> <span><math>{}^{66}_{66}\text{Dy}</math></span> <span><math>{}^{67}_{67}\text{Ho}</math></span> <span><math>{}^{68}_{68}\text{Er}</math></span> <span><math>{}^{69}_{69}\text{Tm}</math></span> <span><math>{}^{70}_{70}\text{Y}</math></span> </div>																	
O 5d	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{72}_{72}\text{Hf}</math></span> <span><math>{}^{73}_{73}\text{Ta}</math></span> <span><math>{}^{74}_{74}\text{W}</math></span> <span><math>{}^{75}_{75}\text{Re}</math></span> <span><math>{}^{76}_{76}\text{Os}</math></span> <span><math>{}^{77}_{77}\text{Ir}</math></span> <span><math>{}^{78}_{78}\text{Pt}</math></span> <span><math>{}^{79}_{79}\text{Au}</math></span> <span><math>{}^{80}_{80}\text{Hg}</math></span> </div>																	
P 6p	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{81}_{81}\text{Tl}</math></span> <span><math>{}^{82}_{82}\text{Pb}</math></span> <span><math>{}^{83}_{83}\text{Bi}</math></span> <span><math>{}^{84}_{84}\text{Po}</math></span> <span><math>{}^{85}_{85}\text{At}</math></span> <span><math>{}^{86}_{86}\text{Rn}</math></span> </div>																	
Q 7s	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{87}_{87}\text{Fr}</math></span> <span><math>{}^{88}_{88}\text{Ra}</math></span> </div>																	
P 6d	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{89}_{89}\text{Ac}</math></span> </div>																	
O 5f	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{90}_{90}\text{Th}</math></span> <span><math>{}^{91}_{91}\text{Pa}</math></span> <span><math>{}^{92}_{92}\text{U}</math></span> <span><math>{}^{93}_{93}\text{Np}</math></span> <span><math>{}^{94}_{94}\text{Pu}</math></span> <span><math>{}^{95}_{95}\text{Am}</math></span> <span><math>{}^{96}_{96}\text{Cm}</math></span> <span><math>{}^{97}_{97}\text{Bk}</math></span> <span><math>{}^{98}_{98}\text{Cf}</math></span> <span><math>{}^{99}_{99}\text{Es}</math></span> <span><math>{}^{103}_{103}\text{Lr}</math></span> <span><math>{}^{100}_{100}\text{Fm}</math></span> <span><math>{}^{110}_{110}\text{Md}</math></span> </div>																	
P 6d	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><math>{}^{104}_{104}\text{Ku}</math></span> <span><math>{}^{105}_{105}\text{Ns}</math></span> </div>																	

## Auffüllung der Schalen / Periodensystem

### Beispiele

Element <sub>Z</sub>	Elektronen Konfiguration
H <sub>1</sub>	(1s) <sup>1</sup>
He <sub>2</sub>	(1s) <sup>2</sup>
Li <sub>3</sub>	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>1</sup>
Be <sub>4</sub>	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup>
...	...
Ne <sub>10</sub>	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>6</sup>
Na <sub>11</sub>	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>6</sup> (3s) <sup>1</sup>
...	...

Je Schale K, L, M, ... (n = 1, 2, 3, ...) sind 2n<sup>2</sup> Elektronen möglich

Bild 10-16 Zum Aufbau des Periodensystems: Auffüllung der Elektronenschalen mit steigender Ordnungszahl

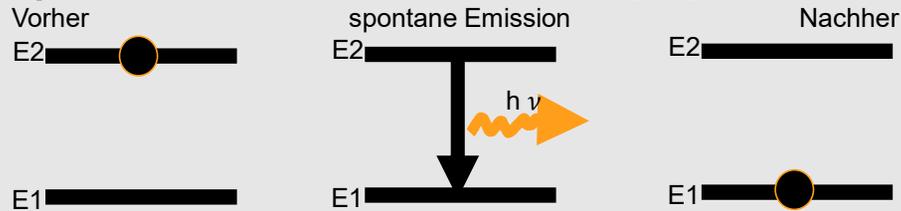
## Aber...

- Die „Elektronenbahn“ aus dem Bohr’schen Atommodell ist eine stark vereinfachte Näherung.
- „Statistische Deutung“: Das Betrags-Quadrat der Wellenfunktion  $|\psi(n, l, m)|^2$  gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an, das Elektron an einem bestimmten Ort zu finden.
- Brief Albert Einstein an Niels Bohr (1926): „Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das noch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß *der* nicht würfelt.“  
[https://de.wikipedia.org/wiki/Gott\\_w%C3%BCrfelt\\_nicht](https://de.wikipedia.org/wiki/Gott_w%C3%BCrfelt_nicht)
- Auch gibt es die sog. Heisenberg’sche Unschärfe-Relation, die besagt, dass man Ort und Impuls des Elektrons nicht gleichzeitig beliebig exakt bestimmen kann:

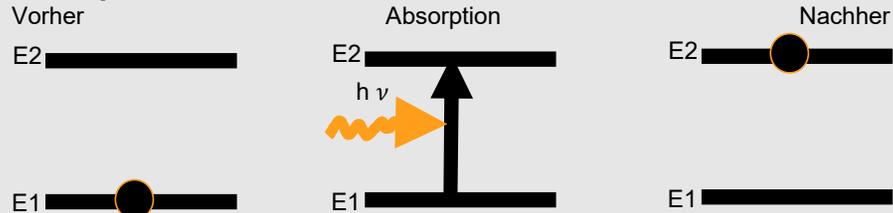
$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Jedes Atom hat spezifische Energiezustände z.B.  $E_1$  und  $E_2$ . Bei Übergängen zwischen den Energiezuständen kann Licht emittiert oder absorbiert werden

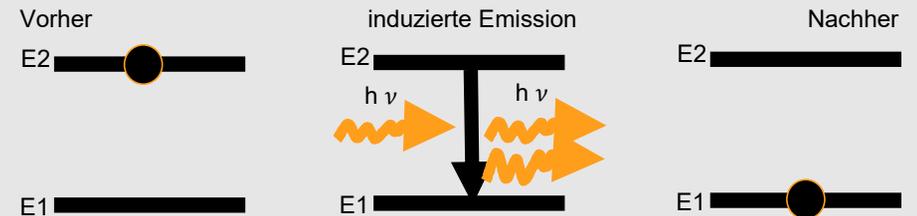
### Spontane Emission von Licht durch ein angeregtes Atom



### Absorption von Licht durch ein Atom

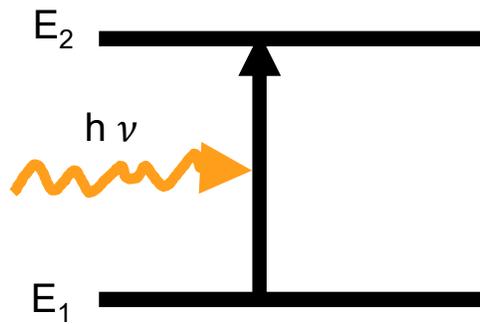


### Stimulierte Emission



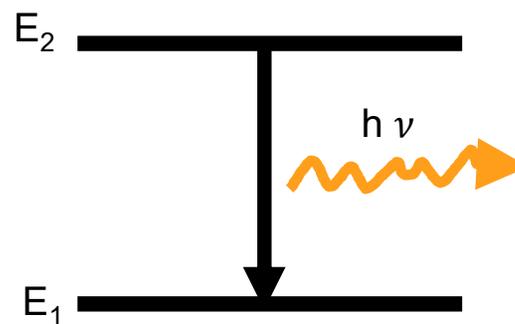
Die **stimulierte Emission** ist der für den LASER von zentrale Grundprozeß.

# Wechselwirkung zwischen Licht und Energieniveaus von Atomen, Molekülen oder Festkörpern



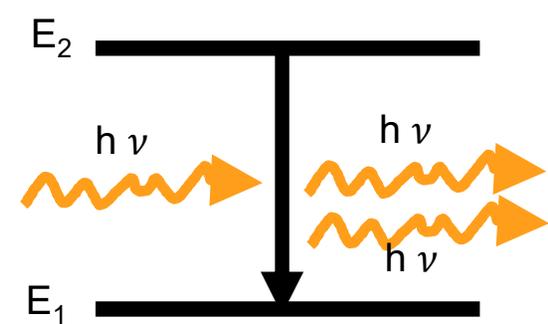
## Absorption

Ein Photon der Energie  $E = h\nu = E_2 - E_1$  hebt ein Elektron aus dem Zustand  $E_1$  auf ein höheres Energieniveau  $E_2$



## Spontane Emission

Ein angeregtes Atom im Zustand  $E_2$  geht spontan in den niedrigeren Zustand  $E_1$  über und emittiert dabei ein Photon der Energie  $E = h\nu = E_2 - E_1$

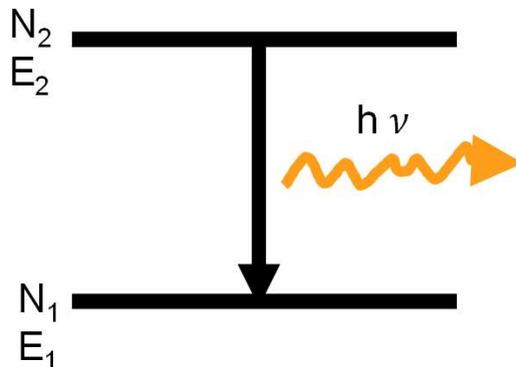


## Stimulierte Emission

Ein Photon der Energie  $E = h\nu = E_2 - E_1$  trifft auf ein angeregtes Atom im Zustand  $E_2$  und induziert den Übergang  $E_2 \rightarrow E_1$  unter Aussendung eines weiteren Photons der Energie  $E = h\nu = E_2 - E_1$

# Spontane Emission

$N_1$  Atome im Zustand  $E_1$   
 $N_2$  Atome im Zustand  $E_2$



Das Atom bleibt nicht im angeregten Zustand sondern kehrt „irgendwann“ in den Grundzustand zurück (ähnlich wie beim radioaktiven Zerfall). Bezogen auf  $N_2$  Atome ergibt sich:

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{sp} = -\frac{N_2}{\tau}$$

→  $N_2(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$  → exponentieller Zerfall

$\tau$  ist die „Lebensdauer“ des angeregten Zustands und

$$A_{21} = 1/\tau$$

$A_{ik} = A_{21}$  ist der **Einstein-Koeffizient für die spontane Emission.**

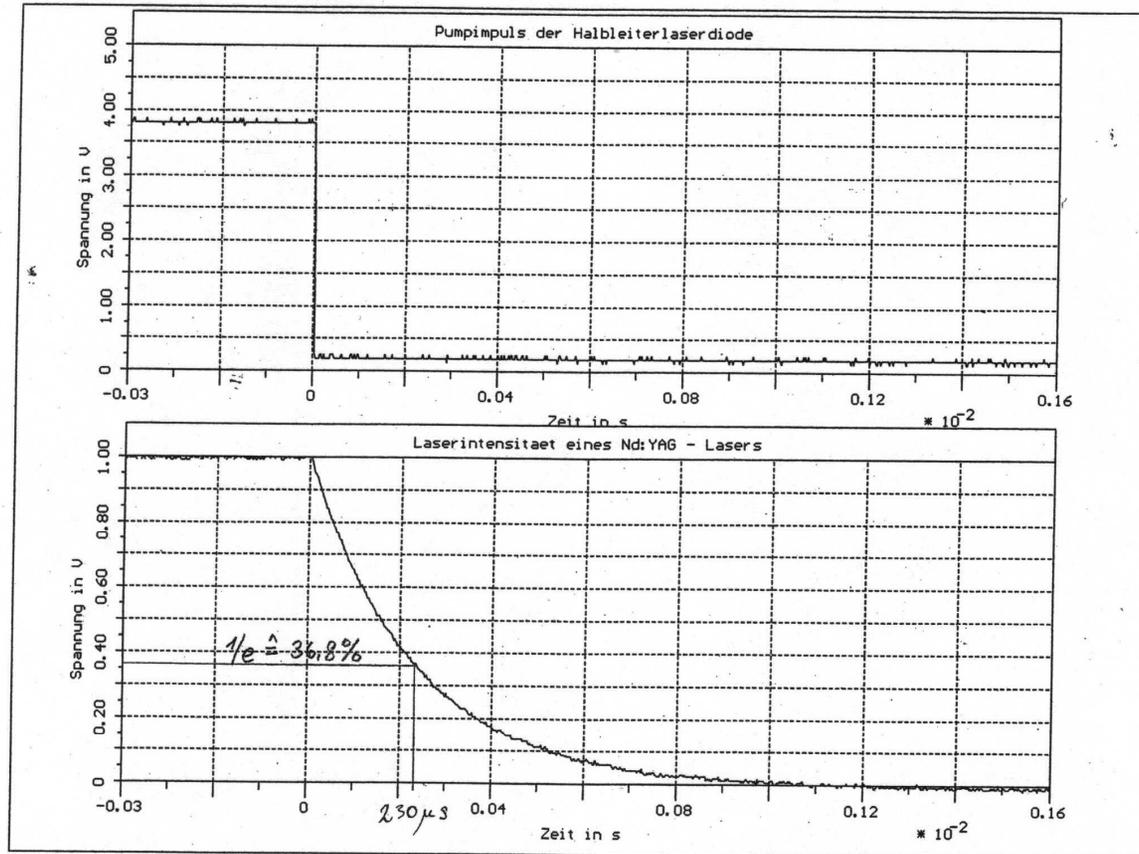
Typische Werte für Lebensdauern sind

- „Erlaubte“ Übergänge:  $\tau \sim 10^{-9}$  s,  $A \sim 10^9$  s<sup>-1</sup>
- „Verbotene“ Übergänge:  $\tau \sim 10^{-3}$  s,  $A \sim 10^3$  s<sup>-1</sup>
- $\tau \sim$  unendlich für Grundzustand

Einstein-Koeffizient  $A_{ik}$  bezieht sich nur auf optische Übergänge. Ein angeregter Zustand könnte auch strahlungslos zerfallen (z.B. Energieübertragung durch Stöße, Gitterschwingungen)

Beispiel:  $10^6$  Atome, angeregt im Zustand  $E_2$  (mit  $\tau_{21} \sim 10^{-6}$ s) → nach  $10^{-5}$  s sind 999.954 Atome in Zustand  $E_1$

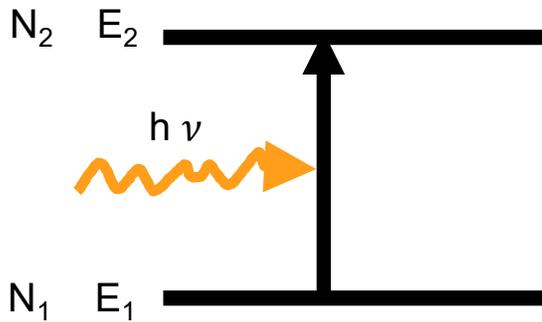
# Lebensdauerermessung Nd:YAG oberes Laserniveau



# Absorption auf atomarer und makroskopischer Ebene

$N_1$  Atome im Zustand  $E_1$   
 $N_2$  Atome im Zustand  $E_2$

$$\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_a = -\sigma_{12} N_1 \phi \quad \leftrightarrow$$



$\sigma_{12}$  oder  $B_{12}$  stehen für die Übergangswahrscheinlichkeit des Übergangs  $E_1 \rightarrow E_2$

Dabei sind

- $N_1$  = Anzahl der Atome im Zustand  $N_1$  pro Volumen
- $\Phi$  = Photonenstromdichte (Anzahl Photonen pro Zeit\*Fläche)
- $\sigma_{12}$  = Wirkungsquerschnitt der Absorption

Der Wirkungsquerschnitt für Absorption  $\sigma_{12}$  kann mit der Photonenenergie  $E_{12} = h f_{12}$  in Verbindung gebracht und durch den **Einstein-Koeffizienten für Absorption  $B_{12}$**  dargestellt werden

$$\sigma_{12} = B_{12} h f_{12} / c$$

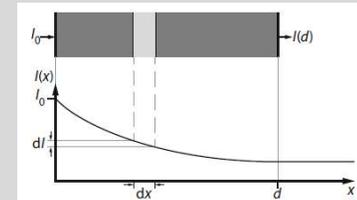
- Einstein-Koeffizient  $B_{ik} = B_{12}$

**Vergleich mit dem Absorptionsgesetz (makroskopisch)**

$$I(x) = I_0 \exp(-\alpha x)$$

Hier

- $I_0$  und  $I(x)$  = Lichtintensität (zu Beginn und nach Durchlauf durch ein absorbierendes Material der Dicke  $x$ )
- $x$  = Dicke des Materials
- $\alpha$  = Absorptionskoeffizient



$$\alpha = \sigma_{12} N_1$$

# Herleitung Absorptionsgesetz mit Trennung der Variablen

$$\Phi_{vol} = \frac{\phi_{FlächeZeit}}{c} \text{ und } c = \frac{dx}{dt}$$

Absorption

$$\frac{d\Phi_{vol}}{dt} =$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\sigma_{12} N_1 \phi = \frac{d\phi}{dx}$$

Trennung d. Variablen

$$\frac{1}{\phi} d\phi = -\sigma_{12} N_1 dx$$

$$\int \frac{1}{\phi} d\phi = - \int \sigma_{12} N_1 dx$$

(e<sup>ln a</sup>)

$$\phi = e^{-\sigma_{12} N_1 x} \cdot C_4$$

$$\phi(x) = \phi_0 \cdot e^{-\sigma_{12} N_1 x}$$

Absorptionsgesetz

$\phi(x) \sim I(\text{Intensität})$

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\alpha x}$$

$\alpha = \text{Absorptionskoeffizient}$

mit  $\alpha = \sigma_{12} \cdot N_1$

# Standardmethode in vielen Analytik Laboren: Bestimmung der Konzentration eines bestimmten Stoffs in einer Lösung basierend auf Absorptionsmessungen

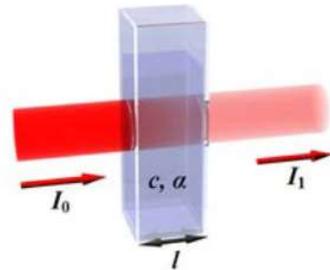


Abbildung 1 – Transmission

Der gesamte schematische Aufbau eines Fotometers sieht wie folgt aus:

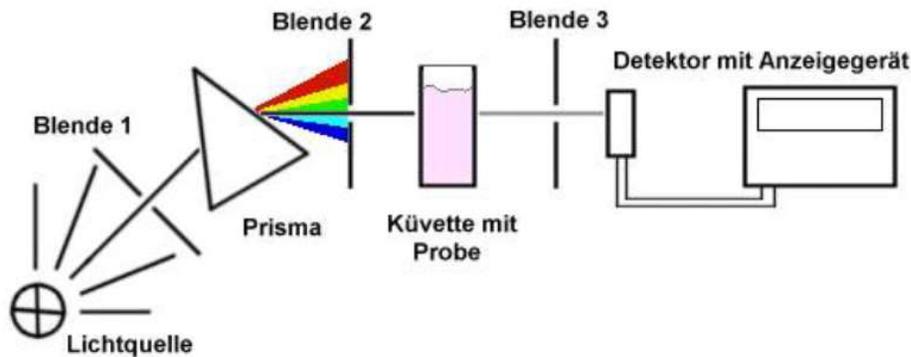


Abbildung 2 - Aufbau eines Fotometers

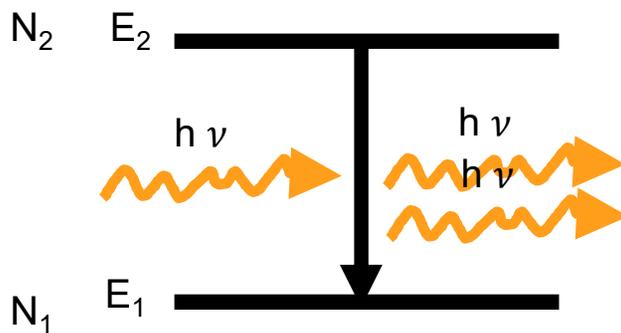
Beispiel:

- Messung von Wasser  
Verunreinigung mit Nitrat  $\text{NO}_3$
- $c$  = Konzentration des Stoffs  
 $\alpha$  = Absorptionskoeffizient des Stoffs
- Vergleich von Eichlösung mit  
Messprobe

[https://www.uni-bremen.de/fileadmin/user\\_upload/sites/brundtlandlabor/PDFs/Wasseranalysen.pdf](https://www.uni-bremen.de/fileadmin/user_upload/sites/brundtlandlabor/PDFs/Wasseranalysen.pdf)

# Induzierte Emission

Wurde zunächst von A. Einstein postuliert und dann später in Experimenten bestätigt. **Ist der Kernprozess eines jeden Lasers.**



$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_i = -\sigma_{21} N_2 \phi$$

Zum Vergleich: Absorption

$$\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_a = -\sigma_{12} N_1 \phi$$

Wie Absorption, aber entgegengesetztes Vorzeichen ( $N_2$  wird entleert). **Wirkungsquerschnitt bzw. Einstein-Koeffizienten sind für Absorption vs. Induzierte Emission gleich.**

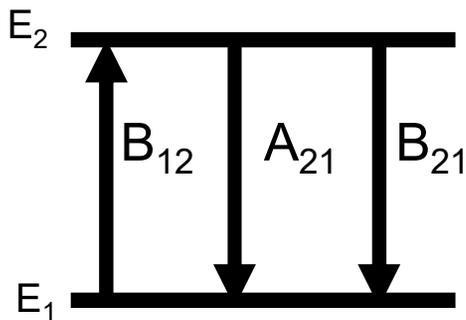
$$\boxed{\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma} \quad (\text{und } B_{12} = B_{21} = B)$$

Mit der Besonderheit: wenn  $E_1$  und  $E_2$  aus mehreren (nämlich  $g_1$  und  $g_2$ ) Unterniveaus bestehen.

$$g_1 \sigma_{12} = g_2 \sigma_{21}$$

$$\text{Bzw. } g_1 * B_{12} = g_2 * B_{21}$$

## Zusammenhänge zwischen den Einstein-Koeffizienten



- $B_{12} = B_{21}$

Bzw.  $g_1 * B_{12} = g_2 * B_{21}$

- $A_{21} = \tau^{-1} = \frac{4 * h * f^3}{c^3} B_{21}$

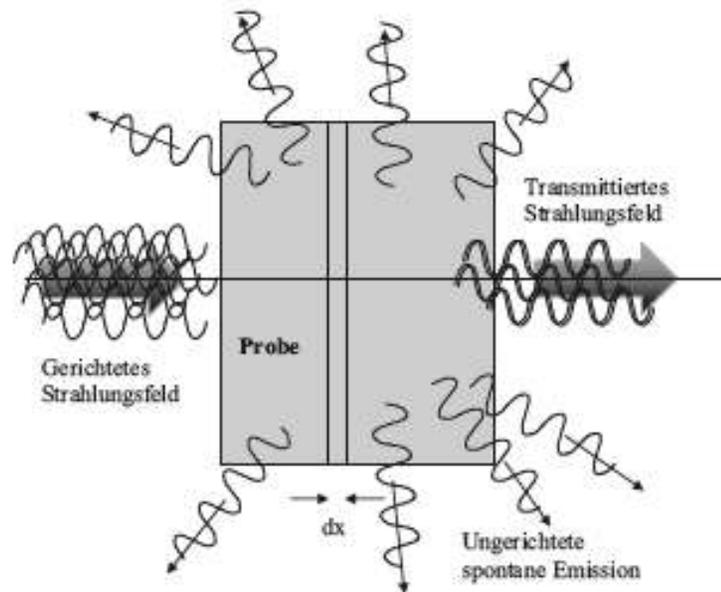
- Findet man in vielen Quellen auch so aufgeschrieben:

$$A_{ab} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} B_{ab} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \hbar &= \frac{h}{2\pi} \\ \omega &= 2\pi f \end{aligned}$$

# Unterschied zw. spontaner und induzierter Emission

## Spontane Emission

- Entsteht durch „statistischen“ Prozess
- Ungerichtet
- Keine feste Phasenbeziehung zwischen den Photonen



## induzierte Emission

- Ist getriggert durch „induzierendes“ Photon
- **Richtung & Phase entsprechend der des induzierenden Photons**  
→ **kohärentes Licht**

Wenn wir über Absorption oder induzierte Emission sprechen, geht es i.d.R. um eine bestimmte definierte Richtung der Strahlung.

Spontane Emission ist ungerichtet und kann im Vergleich zu einem gerichteten Strahl vernachlässigt werden.

# Einfache Bilanzgleichung für alle drei Prozesse (Absorption, stimulierte Emission, spontane Emission)

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12} N_1 \Phi + B_{21} N_2 \Phi + A_{21} N_2$$

Mit  $B_{12} = B_{21}$

Absor

Stimu

Spont

$$\frac{dN_1}{dt} = B_{12} \Phi (N_2 - N_1) + A_{21} N_2$$

$$\frac{dN_1}{dt} = B_{12} \Phi (N_2 - N_1) + A_{21} N_2$$

Analog Herleitung zum Absorptionsgesetz + hier spontane Emission

vernachlässigt  $\rightarrow \Phi(x) = \Phi_0 * e^{B_{12}(N_2 - N_1)*x}$

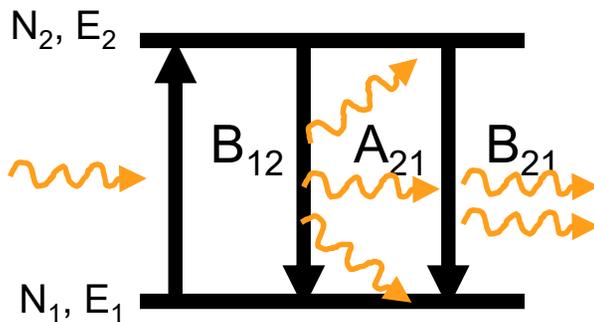
$N_2 - N_1 < 0$  Abschwächung der Photonenanzahl

$N_2 - N_1 > 0$  **Besetzungsinversion, Verstärkung**

**Verstärkungsfaktor  $G = e^{gx}$**

**differentielle Verstärkung  $g = B_{12}(N_2 - N_1)$**

Lasertechnik, Prof. Dr. T. Hebert, SoSe 2023



## Besetzungsinversion

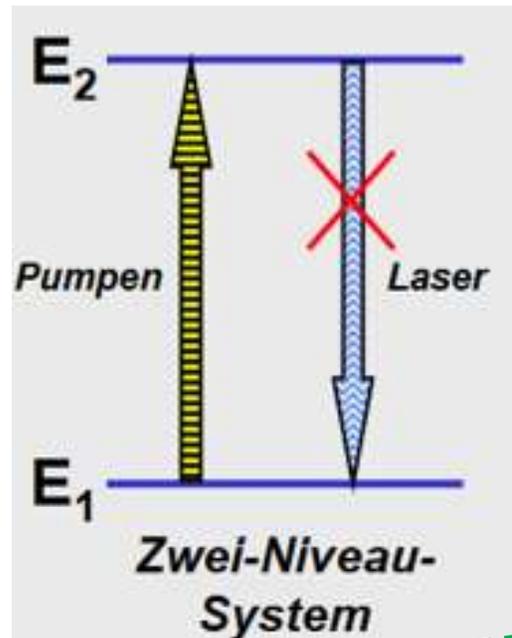
ist eine Kern-Voraussetzung für Laseraktivität.

Offene FRAGE: wie kann man die Besetzungsinversion erreichen?

# Wie kann Besetzungsinversion erreicht werden?

Für Laser nötig:

- **Verstärkung durch stimulierte Emission**
- **Besetzungsinversion**  
( $N_2 > N_1$ )  
oder noch besser  
( $N_2 \gg N_1$ )



So nicht möglich

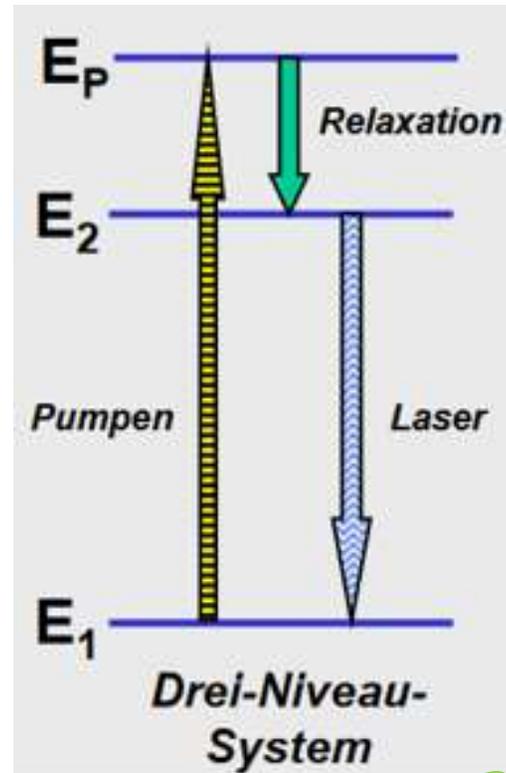
**Im reinen 2-Niveau-System kein Laser möglich**

- Keine Besetzungsinversion erreichbar, weil
- $B_{12} = B_{21}$ , d.h. Absorption und induzierte Emission gleichen sich gegenseitig aus
- Spontane Emission als zusätzlicher „Verlustfaktor“

## Wie kann Besetzungsinversion erreicht werden?

Für Laser nötig:

- **Verstärkung durch stimulierte Emission**
- **Besetzungsinversion**  
( $N_2 > N_1$ )  
oder noch besser  
( $N_2 \gg N_1$ )



Im 3-Niveau-System ist ein Laser möglich weil

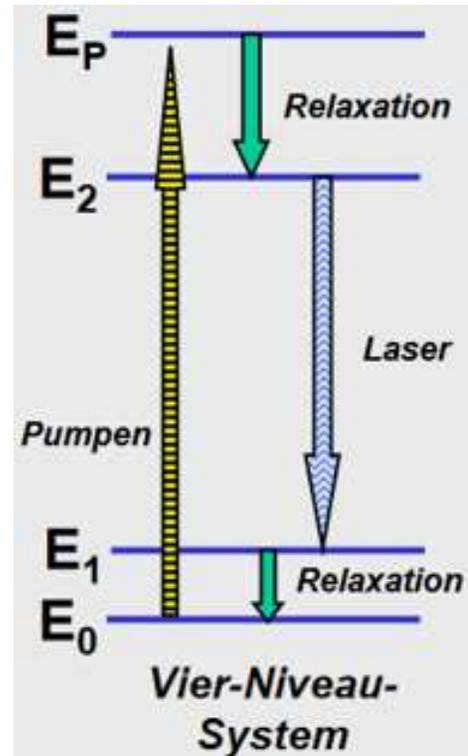
- Anregung erfolgt jetzt über  $E_1 \rightarrow E_p$  (Pumpen)  $\rightarrow$  Entkoppelt vom Übergang  $E_2 \leftrightarrow E_1$
- Durch schnelle Relaxation  $E_p \rightarrow E_2$  wird  $N_2$  stark besetzt
- (spontane Emission  $E_2-E_1$  und Absorption  $E_1-E_2$  sind trotzdem Verlustfaktoren, fallen aber nicht so stark ins Gewicht)
- Hilfreich: Oberes Laserniveau „metastabil“, d.h. Verluste durch spontane Emission nicht zu stark
- Besetzungsinversion  $N_2 > N_1$  ist erreichbar

Schon besser

## Wie kann Besetzungsinversion erreicht werden?

Laser

- **Ziel: Verstärkung durch stimulierte Emission**
- Voraussetzung: stimulierte Emission soll überwiegen
- **Besetzungsinversion** ( $N_2 > N_1$ ) oder sogar ( $N_2 \gg N_1$ )



**Noch besser**

**Im 4-Niveau-System ist Laser noch besser = mit weniger Energieaufwand möglich, weil**

- $E_1$  wird durch die Relaxation  $E_1 \rightarrow E_0$  entleert
- Dadurch  $N_2$  immer  $> N_1$  und die Absorption  $E_1-E_2$  als Verlustfaktor ausgeschaltet
- Hilfreich: Oberes Laserniveau  $E_2$  „meta-stabil“, d.h. Entleerung von  $E_2$  durch spontane Emission gering
- Besetzungsinversion  $N_2 > N_1$  ist noch leichter erreichbar

# Kriterien für Laser-Materialien / Zusammengefasst

## Laser

- **Ziel: Verstärkung durch stimulierte Emission**
- **Besetzungsinversion** ( $N_2 > N_1$ ) oder sogar ( $N_2 \gg N_1$ )
- **Oberes Laser-Niveau „meta-stabil“**, dann Verluste durch spontane Emission gering

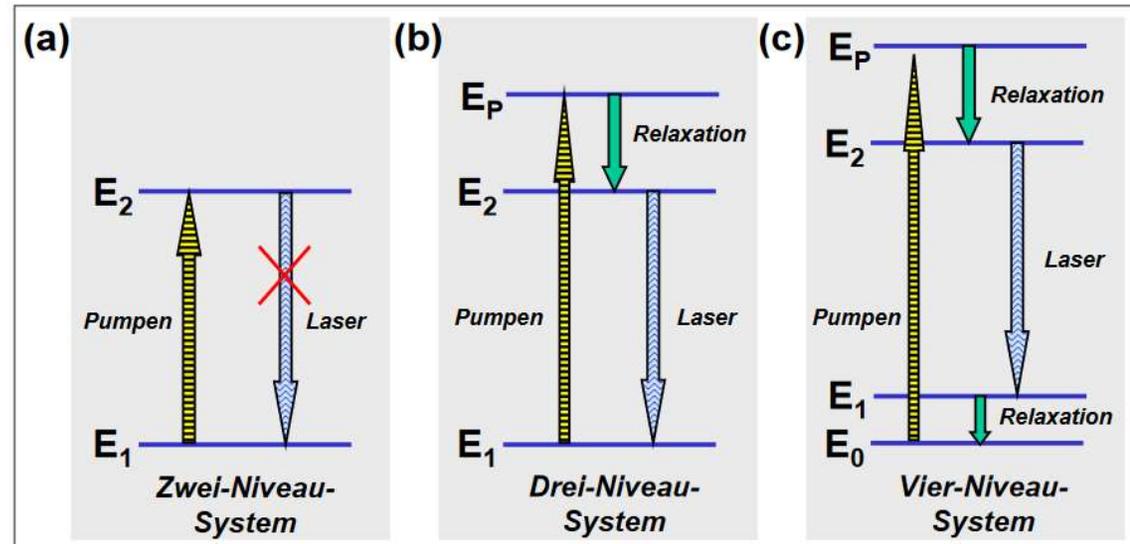
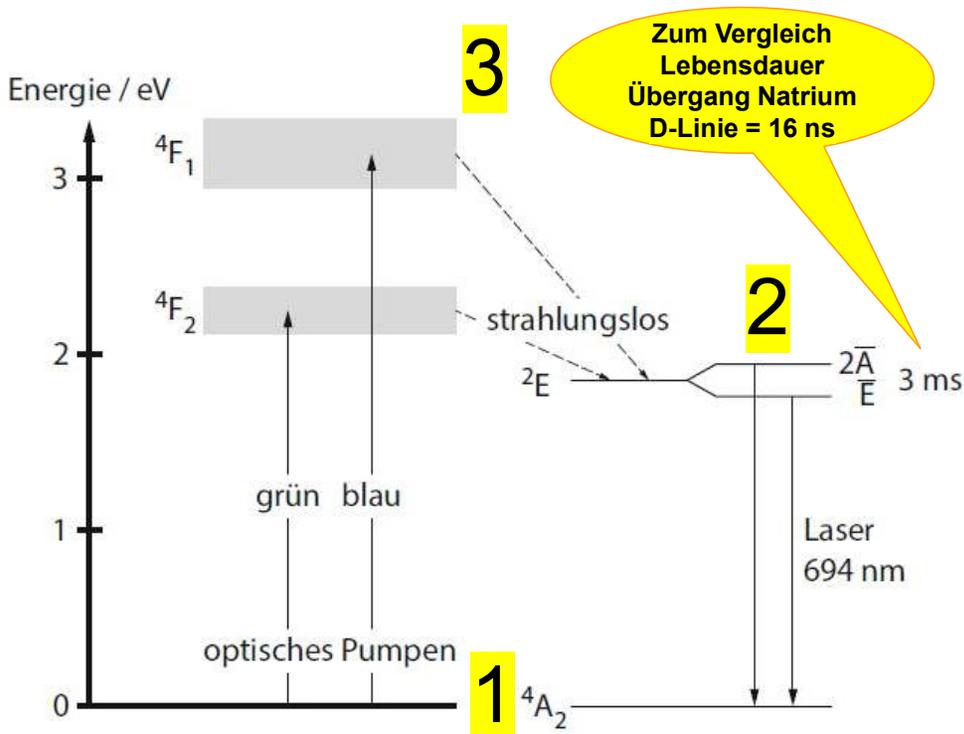


Abbildung 11.3: Verschiedene Energieniveauschemata zur Erklärung des Pumpvorganges in einem Laser: (a) Zwei-Niveau-System, bei dem eine Lasertätigkeit nicht möglich ist, (b) Drei-Niveau-System und (c) Vier-Niveau-System.

**Laser benötigen ein Material das ein 3- oder 4-Niveau System ermöglicht.**

Dort ist dann der Pump Übergang vom Laser Übergang verschieden und zusätzlich wird (beim 4-Niv-System) das untere Laserniveau  $E_1$  durch Relaxation entleert und das 4-Niveau-System ist effizienter als das 3-Niveau-System

# Beispiel 1: Energieschema Rubinlaser

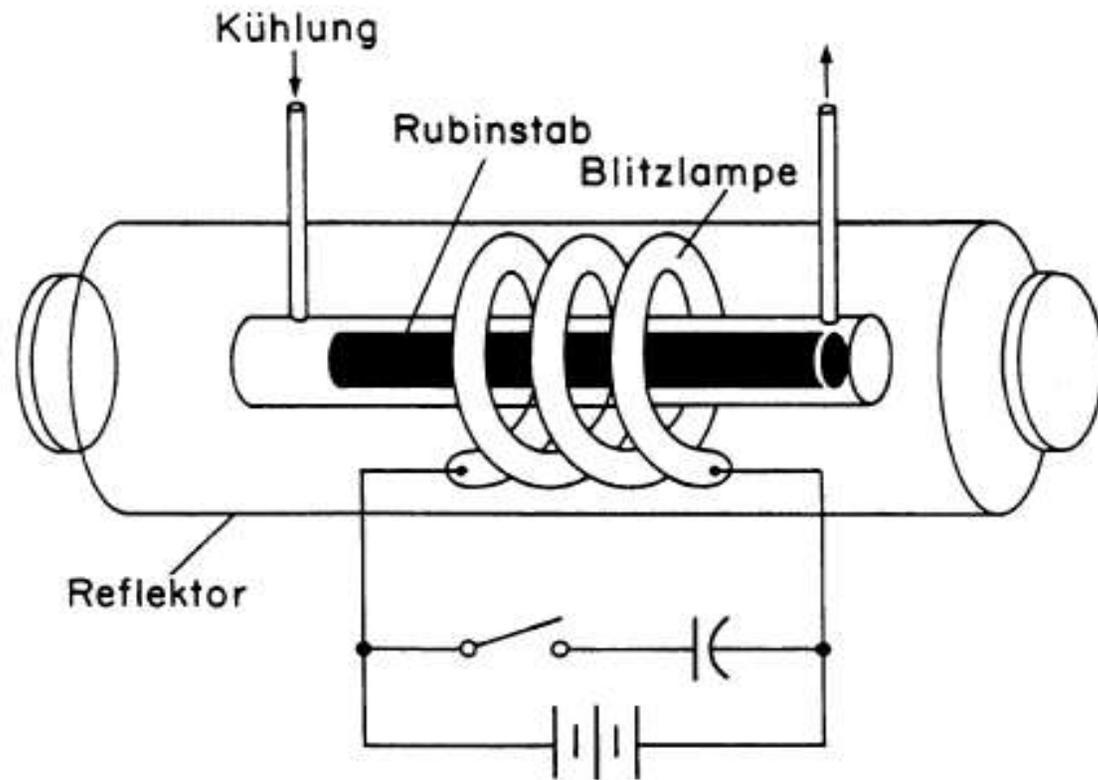


Typisches Merkmal 3-Niveau-Laser  
Unteres Laserniveau = Grundzustand

- Energieschema von  $\text{Cr}^{3+}$  im  $\text{Al}_2\text{O}_3$  Gitter
- **Energiebänder** ergeben sich durch Einfluß von Kristallfeld und Gitterschwingungen
- **Grundzustand  $4A_2$**
- **3-Niveau-Laser (unteres Laserniveau = Grundzustand)** (>50% der  $\text{Cr}^{3+}$  müssen im oberen Laserniveau angeregt sein, damit Laser startet)
  - **Pumpen:** Optische Absorption in die  $4F_1$  und  $4F_2$  Bänder
  - **Relaxation:** (strahlungslos) in  $2E$  mit den beiden Unterniveaus  $2\bar{A}$  und  $\bar{E}$
  - **Laserübergänge:**  $2E / \bar{E} \rightarrow 4A_2$  (694,3nm) und  $2E / 2\bar{A} \rightarrow 4A_2$  (692,8 nm)

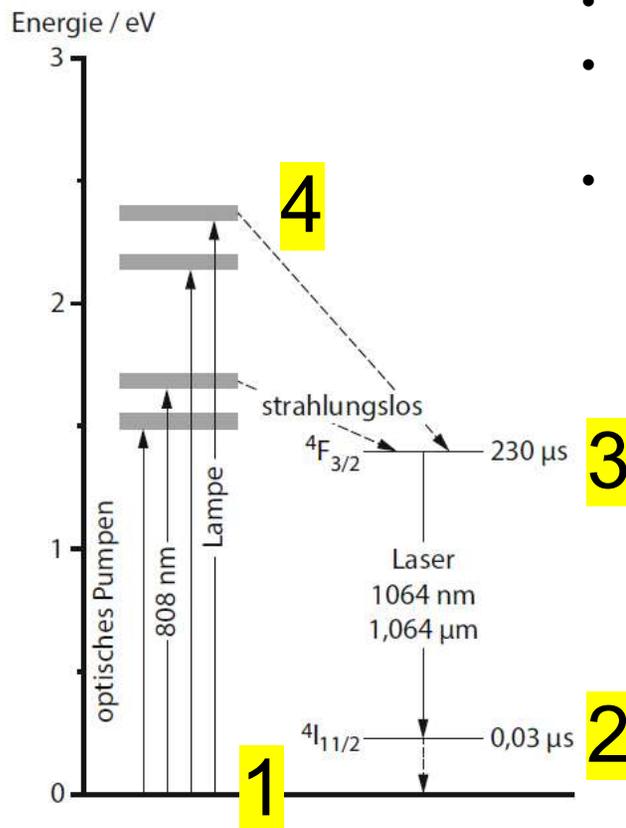
# Rubinlaser $\text{Cr}^{3+}$ im $\text{Al}_2\text{O}_3$ Gitter

**Abb. 16.5** Typischer Aufbau eines Rubinlasers



Quelle: Sigrist\_LaserTheorieTypenUndAnwendunge

## Beispiel 2: Energieschema Nd:YAG Laser



- Energieschema von **Nd<sup>3+</sup>** im Y<sub>3</sub>Al<sub>5</sub>O<sub>12</sub> Gitter
- **Energiebänder** ergeben sich durch Einfluß von Kristallfeld und Gitterschwingungen
- **4-Niveau-Laser:**
  - Pumpen: Optische Absorption in verschiedene Bänder zw. 1.5 und 2.5 eV

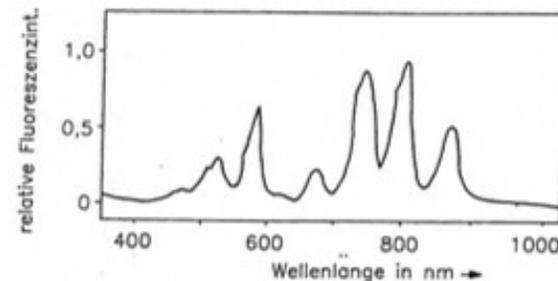


Bild 8.5.  
Intensität der Fluoreszenz von Nd:YAG bei 1,06  $\mu$ m als Funktion der Wellenlänge des Pumplichts. 808 und 940 nm sind geeignete Wellenlängen zum Pumpen mit Laserdioden

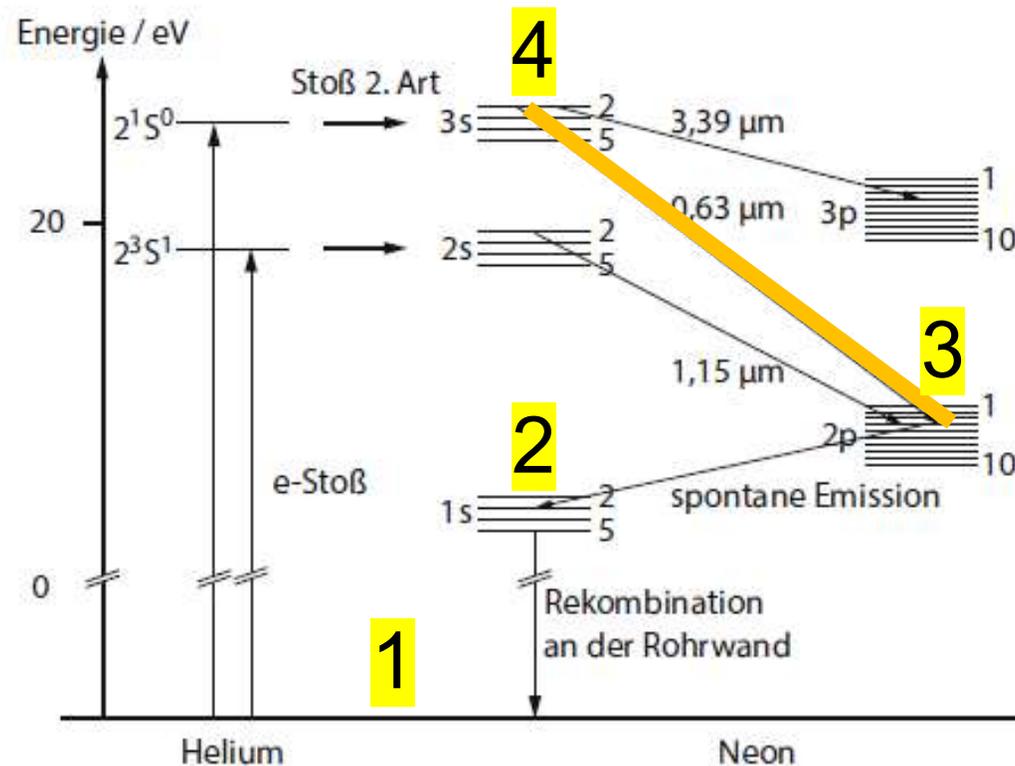
- Relaxation: (strahlungslos) in das metastabile nach  $4F_{3/2}$  Niveau mit einer Lebensdauer von  $230 \cdot 10^{-6}$ s
- Laserübergang:  $4F_{3/2} \rightarrow 4I_{11/2}$  (1064nm)

Typisches Merkmal 4-Niveau-Laser

Unteres Laserniveau = ist nicht Grundzustand

## Beispiel 3: He-Ne-Laser, Laserübergang im Neon Atom für 633nm $E_3 \rightarrow E_2$

**Abb. 4.1** Termschema des He-Ne-Lasers. Beim Neon sind Termbezeichnungen nach Paschen angenommen, z. B.  $3s_2, 3s_3, 3s_4, 3s_5$  und  $2p_1, 2p_2, 2p_3, 2p_4$  bis  $2p_{10}$ . In einer Gasentladung werden durch Elektronenstöße metastabile He-Atome angeregt. Diese übertragen ihre Energie durch „Stöße 2. Art“ auf Ne-Atome, die Licht im Sichtbaren und Infrarot emittieren



Mögliche Laserübergänge im Neon  
633 nm, 1150 nm, 3390 nm

# Was macht Laserlicht so besonders?

- Laserlicht ist (nahezu) **monochromatisch**
  - Z.B. Helium-Neon-Laser: Wellenlänge  $632,8 \text{ nm} \pm 0,002 \text{ nm}$
  - Bei genauerem Messen findet man eine bestimmte „Bandbreite“ für die Wellenlänge oder die Lichtfrequenz, die aber im Vergleich zu anderen Lichtquellen deutlich geringer ist
  - Zum Vergleich Interferenzfilter rot:  $630 \text{ nm} \pm 10 \text{ nm}$
- Laserstrahlung liefert einen **nahezu parallelen Strahl, mit geringer Divergenz**
  - hohe Strahlintensität pro Fläche → Materialbearbeitung (Laserschneiden, -schweißen, -bohren, -gravieren, ...)
- Laserstrahlung ist **kohärent** (lange Wellenzüge mit konstanter Phasenbeziehung)
  - Kann sehr gut für Interferenz Anwendungen verwendet werden
- Hohe Leistung pro Fläche (= Intensität) möglich → Materialbearbeitung
- Sehr **kurze Laserpulse erzeugbar** (z.B. Femtosekunden-Laserpulse (ca.  $10^{-15} \text{ s}$ )
  - relevant in der Wissenschaft, aber auch in **Materialbearbeitung und Medizintechnik**
- Oft hohe Laserleistung aber gleichzeitig Wirkungsgrad oft gering (<1%), aber auch bis zu 20% möglich

## ÜBUNGSAUFGABEN

25.) E5.1

Berechnen Sie die Zahl der Neon-Atome in einem He-Ne-Laser mit einem Kapillardurchmesser von 1 mm und einer Länge von 20 cm.

Wieviele Photonen pro Sekunde werden von einem Ne Atom bei einer Ausgangsleistung von 1 mW emittiert? (Fülldruck  $p = 500 \text{ Pa}$ ,  $p_{\text{He}}/p_{\text{Ne}} = 5:1$ , Avogadrokonstante  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , Molvolumen bei 1 bar ( $10^5 \text{ Pa}$ ) = 22,4 Liter)

[Lösung:  $3,5 \cdot 10^{15}$  ; 1] (++)

26.) E1.2

Wieviele Photonen pro Sekunde strahlt eine He-Ne-Laser ( $\lambda = 633 \text{ nm}$ ) mit  $P = 1 \text{ mW}$  ab? Wie hoch ist die Photonenenergie in Joule und in Elektronenvolt?

[Lösung:  $3,2 \cdot 10^{15}$  ;  $3,1 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  ; 1,9 eV] (++)