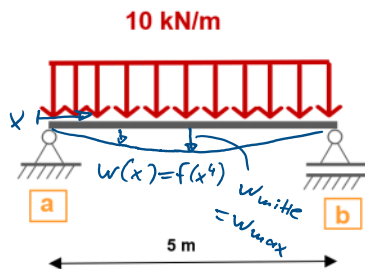


Beispiel:

Einfeldträger mit Streckenlast



Stahlträger HEA 180

E = 210.000 N/mm²

I_y = 2510 cm⁴ aus Profil-

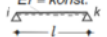
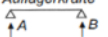
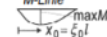
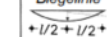
HEA 180

Höhe ~ 180 mm

1 Formeln für Schnitt- und Verschiebungsgrößen

1.1 Einzelstab, Vereinbarung: $\Delta \rightarrow$ Lager überträgt nur Vertikalkraft

1.1.1 Träger auf zwei Stützen, $\alpha = a/l$, $\beta = b/l$

$EI = \text{konst.}$ 	Auflagerkräfte 	M-Linie 	Biegelinie 
	A B	$\max M$ $x_0 = \xi_0 l$	W_{Mitte}
1 	$\frac{ql}{2}$ $\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$ bei $\xi_0 = 0,5$	$\frac{ql^4}{76,8 EI}$
2 	$\frac{ql}{6}$ $\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{15,59}$ bei $\xi_0 = 0,577$	$\frac{ql^4}{153,6 EI}$
3 	$\frac{ql}{3}$ $\frac{ql}{6}$	$\frac{ql^2}{15,59}$ bei $\xi_0 = 0,423$	$\frac{ql^4}{153,6 EI}$
4 	$\frac{2q_1 + q_2}{6} l$ $\frac{q_1 + 2q_2}{6} l$	$\left(\frac{q_2}{2} + \frac{q_1 - q_2}{3} \xi_0^2 \right) l^2$ bei $\xi_0 = \frac{(2q_1 + q_2) / \sqrt{3}}{q_1 \sqrt{3} + \sqrt{q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2}}$	$\frac{q_1 + q_2}{153,6 EI} l^4$
5 	$\frac{ql}{3}$ $\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{9,6}$ bei $\xi_0 = 0,5$	$\frac{61 ql^4}{5760 EI}$
6 	$\frac{F}{2}$ $\frac{F}{2}$	$\frac{Fl}{4}$ bei $\xi_0 = 0,5$	$\frac{Fl^3}{48 EI}$
7 	$\frac{F}{2}$ $\frac{F}{2}$	$\frac{Fl}{4}$ bei $\xi_0 = 0,5$	$\frac{Fl^3}{48 EI}$

Zur Orientierung:

Schlankheit: $L/h = \frac{5000}{180} \approx 28$

Berechnung der Durchbiegung in Feldmitte

$$W_{\text{mitte}} = \frac{5}{384} \frac{q \cdot L^4}{EI} \quad ; \quad EI: \text{Biegesteifigkeit}$$

$$[W] = \frac{1}{76,8} \left[\frac{kN}{m} \right] \frac{[m^4]}{[kNm^2]}$$

$$E = 210.000 \frac{N}{mm^2} \stackrel{!}{=} 210.000 \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1 kN}{1000 N} \cdot \frac{(1000 mm)^2}{cm^2} = 21.000 \frac{kN}{cm^2}$$

Merke: von $\frac{N}{mm^2}$ zu $\frac{kN}{cm^2}$ $\rightarrow$ durch 10 teilen

$$\Rightarrow EI = 21.000 \frac{kN}{cm^2} \cdot 2510 cm^4 = 52.710.000 kNcm^2 \cdot \frac{m^2}{(1000 cm)^2}$$

$$\cdot 2,1 \rightarrow = 5.277 kNm^2$$

Merke: Bei Stahl Tabellenwert I in cm⁴ $\cdot 2,1 \rightarrow EI$ in kNm²

$$\text{Einsetzen: } W_{\text{mitte}} = \frac{5}{384} \frac{10 \cdot 5^4}{5277} \approx 0,0154 m \stackrel{!}{=} 1,5 cm \stackrel{!}{=} 15 mm$$

$$\text{Bewertung: } \frac{W}{L} = \frac{15 mm}{5000 mm} \approx \frac{1}{333}$$

akzeptable L/200 untergeordnete Bauteile

Verformung: L/250 bis L/300 im Hochbau

L/500 z.B. bei Kragbalkenträger

Thema: Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit GZG } mit Gebrauchslasten, d.h. ohne Sicherheitsfaktoren: $\gamma = 1,0$
bzw. Engl.: SLS: Serviceability Limit state

Unterschied: Grenzzustand der Tragfähigkeit GZT

engl.: ULS ultimate limit state

stark vereinfacht: $\gamma_G = 1,35$ ständige Last
 $\gamma_Q = 1,50$ veränderliche Last

Beispiel 2:

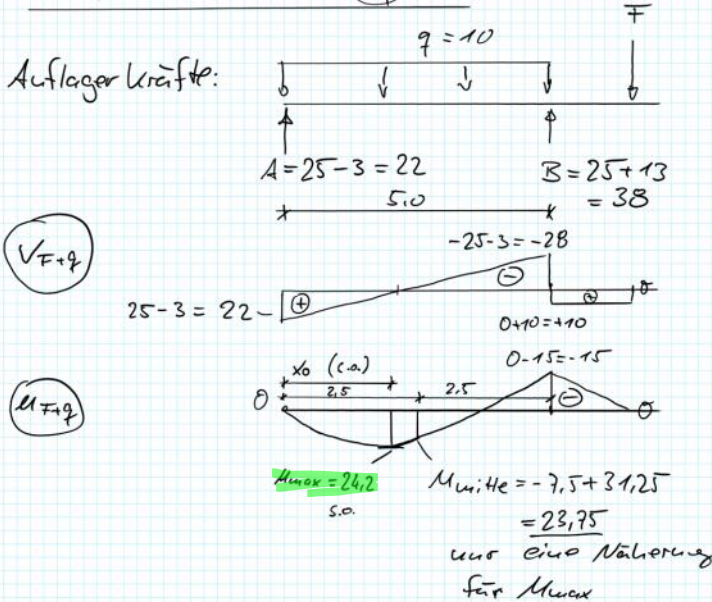
Verformung in Feldmitte $\max w = 2 \text{ cm}$

Stahl:

$$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

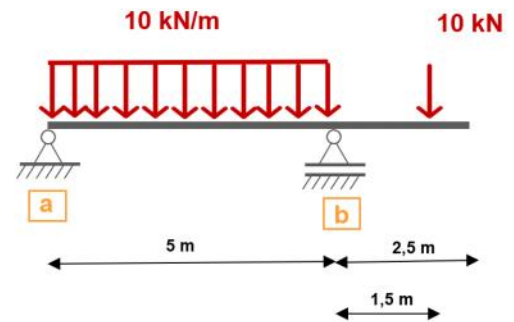
zul. Spannung $\sigma = 23,5 \text{ kN/cm}^2$

Ursprungssystem (7)+(7):



@ 1.1.6 Träger auf zwei Stützen mit Kragarm

$El = \text{konst.}$	M-Linie	Auflagerkräfte	$\max M$	M_k	Biegelinie	w_{mitte}	w_l
1		$(l^2 - c^2) \frac{q}{2l}$	$(1+c)^2 \frac{q}{2l}$	$\frac{A^2}{2q}$	$-\frac{qc^2}{2}$	$\frac{l^2 - c^2}{2,4} \frac{ql^2}{32EI}$	$\frac{c^3 + c^2 l}{8} \frac{ql^2}{24EI}$
2		$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{ql^4}{76,8EI}$	$-\frac{ql^2 c}{24EI}$
3		$-\frac{qc^2}{2l}$	$(1+\frac{c}{2l})qc$	M_k	$-\frac{qc^2}{2}$	$-\frac{ql^2 c^2}{32EI}$	$(\frac{l}{6} + \frac{c}{8}) \frac{qc^3}{EI}$
4		$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fa}{l}$	$\frac{Fab}{l}$	0	$\frac{l^3 - a^2}{16 \cdot 12} \frac{Fa}{EI}$	$-(l+a) \frac{Fabc}{6lEI}$
5		$-\frac{Fa}{l}$	$(1+\frac{a}{l})F$	M_k	$-Fa$	$-\frac{Fa^2}{16EI}$	$(\frac{l}{3} + \frac{ac}{2} + \frac{a^2}{6}) \frac{Fa}{EI}$
6		$\frac{M^o}{l}$	$\frac{M^o}{l}$	$-M^o$	$-M^o$	$\frac{M^o l^2}{16EI}$	$(\frac{l}{3} + \frac{c}{2}) \frac{cM^o}{EI}$
7		0	0	0	0	$\kappa^2 l^2 / 8$	$-\kappa^2 l c / 2$
8		0	0	0	0	0	$-\kappa^2 c^2 / 2$



ges.: Profil

, sodass die Verformung in Feldmitte 2cm ist und das Profil tragfähig ist

2 Kriterien: a) GBT $\Rightarrow G = \frac{M_d}{w} \leq \text{zul. } G = 23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

Index d: γ -fache Last im GBT

b) $w_{\text{mitte}} \leq 2,0 \text{ cm}$ unter Gebrauchslast

aus a): Belastung ist ständlg $\Rightarrow \gamma_G = 1,35$

$$\Rightarrow M_{d, \text{max}} = 1,35 \cdot 24,2 = 32,67 \text{ kNm} \hat{=} 3267 \text{ kNm}$$

$$G = \frac{M_d}{w} \leq \text{zul. } G = 23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \Rightarrow w \geq \frac{M_d}{\text{zul. } G} = \frac{3267 \text{ kNm}}{23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 139 \text{ cm}^3 = \text{erf. } w$$

$$\text{aus b): } w_{\text{mitte}} = \frac{qL^4}{76,8 \cdot EI} - \frac{F \cdot a \cdot L^2}{16 \cdot EI} = \frac{10 \cdot 5^4}{76,8 \cdot EI} - \frac{10 \cdot 1,5 \cdot 5^2}{16 \cdot EI} = \frac{1}{EI} (81,38 - 23,44) \leq 0,02 \text{ m}$$

$$\Rightarrow EI \geq \frac{57,94 \text{ kNm}^3}{0,02 \text{ m}} = 2897 \text{ kNm}^2 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}^2}{\text{m} \cdot \text{m}^2} \quad \text{für } E = 210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{mit Stahl } \Rightarrow \text{erf. } I = \frac{2897}{2,1} = 1380 \text{ cm}^4$$

für $E = 210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

gewählt: IPE 180

Alternativ HET 160: Vorteil: niedriger

gewählt: IPE 180

$$I_y = 1320 \approx 1380$$

$$w_{k,y} = 146 > 139 \checkmark$$

$$g = 0,188 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$\Rightarrow G = 18,8 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

Alternativ HEA 160: Vorteil: niedriger

$$I_y = 1670 > 1380$$

$$w_y = 220 > 139$$

$$g = 0,304 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$G = 30,4 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

unwirtschaftlich, weil schwerer

Beispiel 2a:

Verformung an der Kragarmspitze

Stahl:

$$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

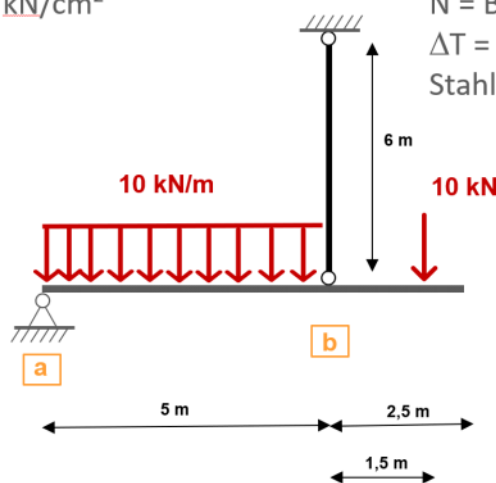
$$\text{zul. Spannung } \sigma = 23,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Zugstab A} = 8 \text{ cm}^2$$

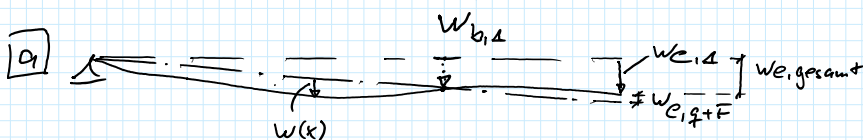
$$N = B = 38 \text{ kN}$$

$$\Delta T = 40 \text{ K}$$

$$\text{Stahl: } \alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5}$$



Zusammensetzung der Verformung:
aus Längung des Stabes



Längung des Zugstabes:

$$\Delta L_s = \frac{N}{EA} \cdot L = \frac{38 \text{ kN}}{21000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 8 \text{ cm}^2} \cdot 600 \text{ cm} = 0,14 \text{ cm}$$

$$\Delta L_T = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot L = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 40 \cdot 600 \text{ cm} = 0,29 \text{ cm}$$

$\left[\frac{1}{\text{K}} \right] \quad [\text{K}]$

$$w_{b,d} = 0,14 + 0,29 = 0,43 \text{ cm}$$

$$w_{e,d} = \frac{w_{b,d}}{L_u} \cdot 7,5 \text{ m} = 0,43 \text{ cm} \cdot \frac{7,5}{5} = 0,65 \text{ cm}$$

Durchbiegung aus $F+q$: IPE 180; $I_y = 1320 \text{ cm}^4$
 $EI_y = 2,1 \cdot 1320 = 2772$

$$w_q = -\frac{qL^3 \cdot c}{24EI} = -\frac{10 \cdot 5^3 \cdot 2,5}{24 \cdot 2772} \approx -0,047 \text{ m} = -4,7 \text{ cm}$$

$$w_F = \left(\frac{L \cdot c}{3} + \frac{q \cdot c}{2} - \frac{q^2}{6} \right) \cdot \frac{F \cdot q}{EI} = \left(\frac{5 \cdot 2,5}{3} + \frac{1,5 \cdot 2,5}{2} - \frac{1,5^2}{6} \right) \cdot \frac{10 \cdot 1,5}{2772}$$

$$= +0,031 \text{ m} = 3,1 \text{ cm}$$

$$w_{\text{gesamt}} = 0,65 - 4,7 + 3,1 = -0,95 \text{ cm}$$

Beispiel 3 a: Kragträger

Verformung am Kragarmende max $w = 2 \text{ cm}$

$$\frac{1}{125}$$

Stahl:

$$E = 210.000 \text{ N/mm}^2 = 21.000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

zul. Spannung $\sigma = 23,5 \text{ kN/cm}^2$

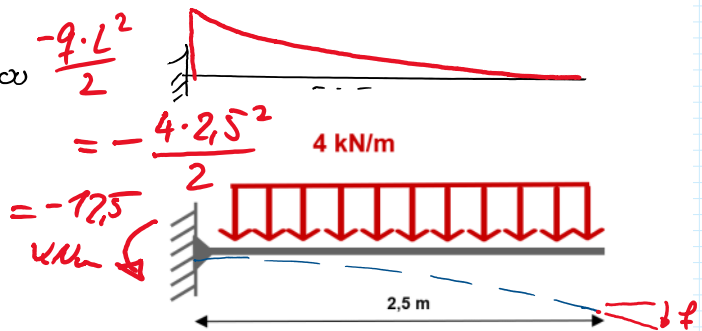
zur Auswahl: I-Profile

	h	100	120	140	160	180 ... 600
IPE	$W [\text{cm}^3]$	34	53	77	109	146
	$I_y [\text{cm}^4]$	197	318	547	869	1320

	h	100	120	140	160	180 ... 1000
HEA	W	73	106	155	220	294
	I_y	349	606	1030	1620	2510

@ 1.1.7 Kragträger

	q	M	w_k	φ_k
1	q	ql	$-\frac{ql^2}{2}$	$\frac{ql^3}{6EI}$
2	q	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{6}$	$\frac{ql^3}{24EI}$
3	q	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{3}$	$\frac{ql^3}{8EI}$
4	F	F	$-\frac{Fl^3}{3EI}$	$\frac{Fl^2}{2EI}$
5	F	F	$-\frac{Fl^3}{3EI}$	$\frac{Fl^2}{2EI}$
6	M_k	M_k	$-\frac{M_k l^2}{2EI}$	$-\frac{M_k l}{EI}$
7	$\frac{T_{\text{temp}}}{\alpha_T} \cdot \frac{I_{\alpha} \cdot I_{\beta}}{I_{\alpha} + I_{\beta}} \cdot h$	0	$-\frac{\kappa^2 l^2}{2}$	$-\kappa^2 l$



Kriterium (1):

$$G \geq T \rightarrow |G_{\text{vor} L}| \leq 23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{M}{W} = G \leq 23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = f_y$$

$$\rightarrow \text{erf. } W = \frac{|M|}{f_y} = \frac{12,5 \text{ kNm} \cdot 100 \frac{\text{cm}}{\text{m}}}{23,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 53,2 \text{ cm}^3$$

Kriterium (2):

$$w_k \leq 2 \text{ cm} \quad G \geq G$$

$$\rightarrow \frac{qL^4}{8EI} \leq 2 \text{ cm} \rightarrow \text{erf. } I = \frac{qL^4}{8E \cdot 2 \text{ cm}} = \frac{4 \cdot 100 \frac{\text{cm}}{\text{m}} \cdot (250 \text{ cm})^4}{8 \cdot 21.000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 2 \text{ cm}} = 465 \text{ cm}^4$$

ausgewählt: Verformung $\rightarrow$ entweder IPE 140 oder HEA 120

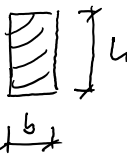
Beispiel 3 b: Kragträger

Verformung am Kragarmende max $w = 2 \text{ cm}$

Holz:

$$E = 10.000 \text{ N/mm}^2 \hat{=} 1000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

zul. Spannung $\sigma = 16 \text{ N/mm}^2 \hat{=} 1,6$

Profil:  $h/b = 2$
 $w = \frac{b \cdot h^2}{6}$; $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$

Kriterium (1):

$$\sigma_{\text{vorh}} \leq 1,6 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{w} \leq 1,6 \Rightarrow \text{erf } w = \frac{1250 \frac{\text{Ncm}}{\text{cm}^2}}{1,6 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}} = 781 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h^2}{6} \stackrel{!}{=} 781 \Rightarrow h = \left(781 \cdot 2 \cdot 6 \right)^{\frac{1}{3}} = 21 \text{ cm}$$

Kriterium (2):

$$w_k = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I} \leq 2 \text{ cm}$$

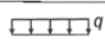
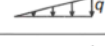
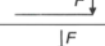
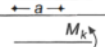
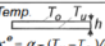
$$\frac{\frac{4}{100} \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot (250 \text{ cm})^4}{8 \cdot 1000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \cdot I} \leq 2 \Rightarrow \text{erf. } I = 9765 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h^3}{12} \stackrel{!}{=} 9765 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow h = \left(9765 \cdot 12 \cdot 2 \right)^{\frac{1}{4}} = 22,0 \text{ cm}$$

gewählt:  22 x 11

@ 1.1.7 Kragträger

	$EI = \text{konst.}$ l k	M-Linie M_A	Biegelinie w_k	φ_k
1		ql	$-\frac{ql^4}{8EI}$	$-\frac{ql^3}{6EI}$
2		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^4}{30EI}$	$-\frac{ql^3}{24EI}$
3		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{11ql^4}{120EI}$	$-\frac{ql^3}{8EI}$
4		F	$-\frac{Fl^3}{3EI}$	$-\frac{Fl^2}{2EI}$
5		F	$-\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{6}\right) \frac{Fa^2}{EI}$	$-\frac{Fa^2}{2EI}$
6		0	$-\frac{M_k l^2}{2EI}$	$-\frac{M_k l}{EI}$
7		0	$-\frac{\kappa^o l^2}{2}$	$-\kappa^o l$

