

Studiengang Mechatronik

Modul 16:

FEM – Finite Elemente Methode

- 12. Vorlesung: Zusammenfassung -

Prof. Dr. Enno Wagner

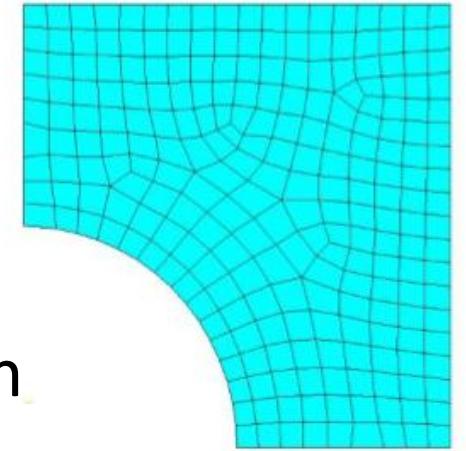
19. Januar 2026

Übersicht

- Einleitung / Motivation
- Numerische Programme
- Spannungszustände (Biegebalken, von Mises)
- Vorgehen bei der Berechnung (11 Schritte)
- Matrix-Steifigkeits-Methode
- Koinzidenzmatrix
- Numerische Methoden
- Energieprinzip
- Wärmeübertragung

Finite Elemente

- Numerisches Verfahren
- Festigkeits- und Verformungsuntersuchungen von Festkörpern
- Elektrische Felder und räumliche Temperaturverteilung
- Komplexe Geometrien (analytisch praktisch nicht berechenbar)
- Unterteilung in endlich viele Teilgebiete (Teilkörper)
- Lösung über Ansatzfunktion
- Unterschied: Integralrechnung (analytisch) mit infinitesimal kleinen Gebieten



Sicherheit

⇒ Vermeidung von aufwendigen Tests

⇒ neue Qualität von Entwicklungen, die nicht testbar sind

• Rechteckiges Ausschneiden

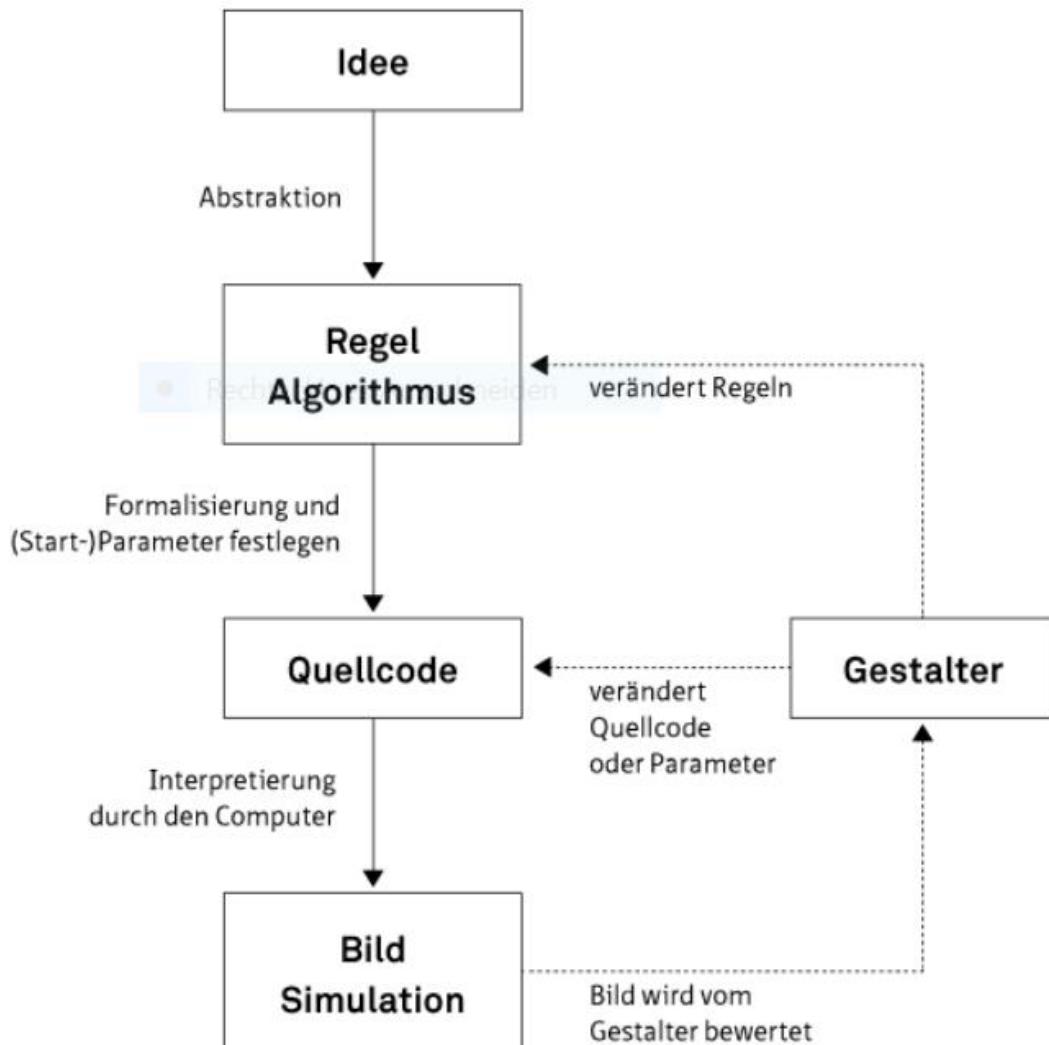
Wirtschaftlichkeit

⇒ kürzere Entwicklungszeiten durch Simulation und damit Verringerung von zeitintensiven Musterbau- und Testzyklen

⇒ optimierte Bauteile hinsichtlich:

- Masse
- Steifigkeit
- Spannungsverteilung
- Schwingungsverhalten

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
FEM Grundlagen, 2019



- Ursprung in der Architektur
- Basis ist ein erster Entwurf (CAD)
- Über einen Algorithmus erfolgt eine Computersimulation
- Veränderung durch Computer
- Entscheidung / Auswahl durch Konstrukteur

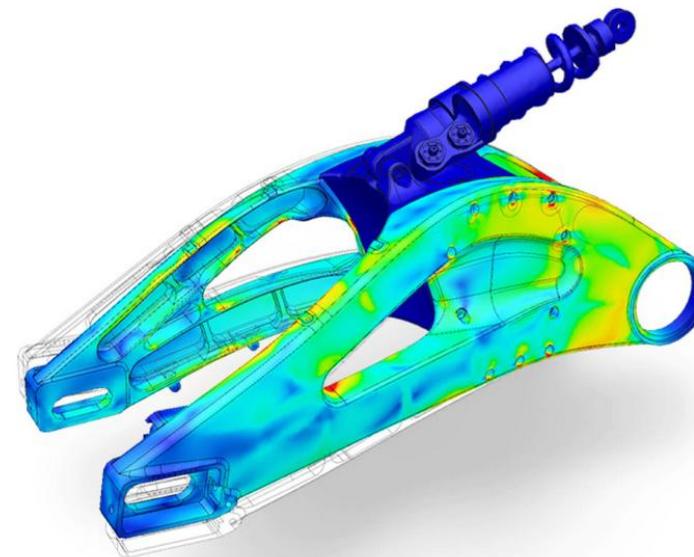
Quelle:

Bohnacker, H., Laub, J., Groß, B., Lazzeroni, C.: Generative Gestaltung, www.generative-gestaltung.de, 2009

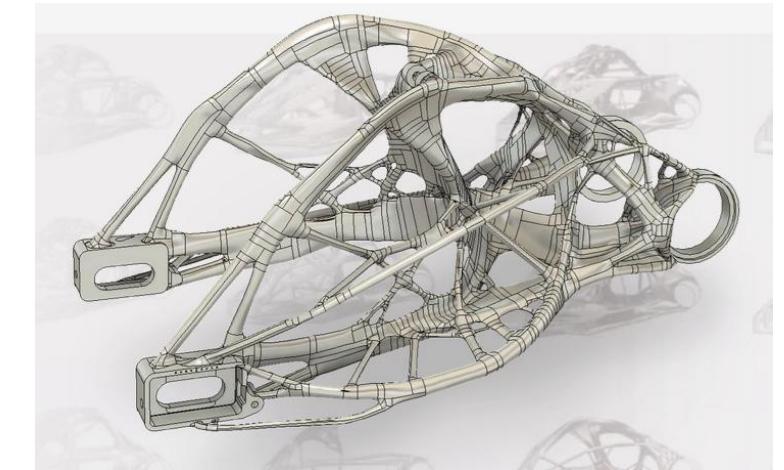
Beispiel Autodesk Fusion 360



CAD Konstruktion

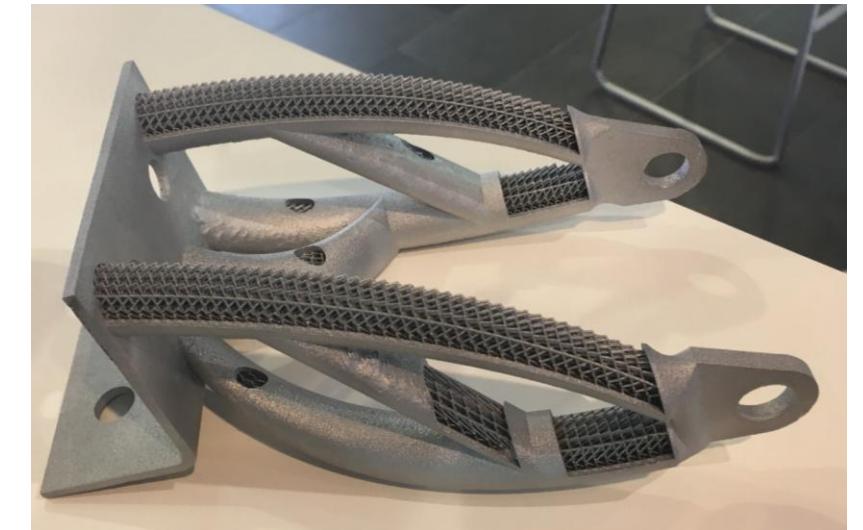


FEM Simulation



Generatives Design

Beispiel Konzept E-Fahrzeug e.GO der RWTH Aachen



Herkömmliche Fertigung aus mehreren Blechteilen. Mittels verschiedensten, aufwendigen Arbeitsschritten hergestellt

Kostengünstiges Gußteil, Prototyp mittels 3D-Druck hergestellt

Computeroptimiertes Leitbauteil, mit „intelligenter“ Struktur, nur mittels 3D-Druck herstellbar

Quelle: Eigene Aufnahmen auf der Autodesk University, Darmstadt 2019

1.) Nutzung spezieller FE-Berechnungsprogramme:

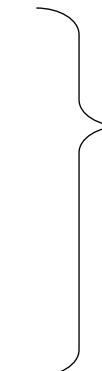
- NASTRAN
- ABAQUS
- ANSYS
- MARC



=> Generierung des FE-Netzes: im FE-Programm /auf Basis importierter CAD-Geometriedaten

2.) Nutzung von CAD-Programmen mit integriertem FE-Berechnungsprogramm:

- CATIA
- NX
- CREO (ProEngineer)
- SOLIDWORKS
- Autodesk Fusion 360



=> Diese Programme besitzen in der Regel nicht den Umfang an Analysemethoden und Elementtypen wie spezielle FE-Berechnungsprogramme

Analytischer Ansatz bei komplizierten Strukturen und Diskontinuitäten in der Geometrie oft nicht möglich oder sehr aufwendig.

Bei FEM:

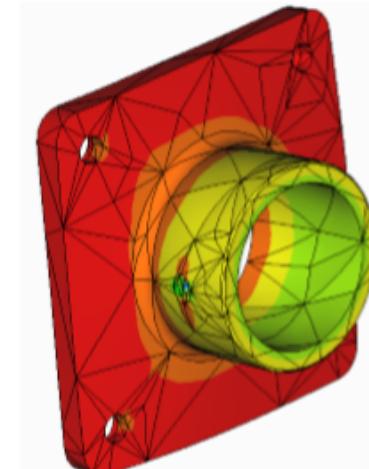
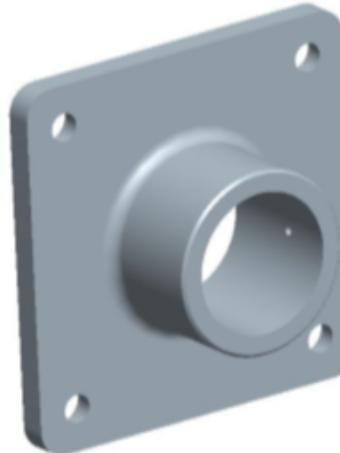
- Gesamtstruktur in **finite Elemente** aufgeteilt
- An Schnittstellen (**Knoten**) gelten Gleichgewichtsbedingungen
- Berechnungswerte werden an angrenzende Elemente übertragen
- Modularer Aufbau, Strukturen mit endlichen Freiheitsgraden, beliebig verfeinerbar => Näherung

Die Grundgleichung der Statik lautet:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{u}$$

Jedes einzelne Element kann mit dieser Gleichung beschrieben werden.

Daraus werden zunächst die Verschiebungen \mathbf{u} und dann die Spannungen berechnet

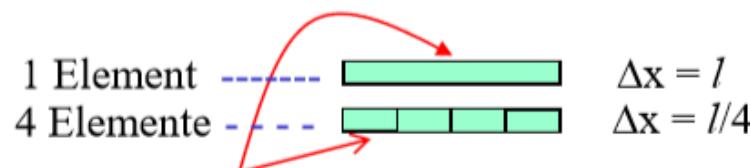


Beispiel Biegebalken

Analytisch bestimmte Spannung in Abhängigkeit vom Weg x

$$\sigma(x) = \frac{M_b(x)}{W_b} = \frac{F(l-x)}{W_b}$$

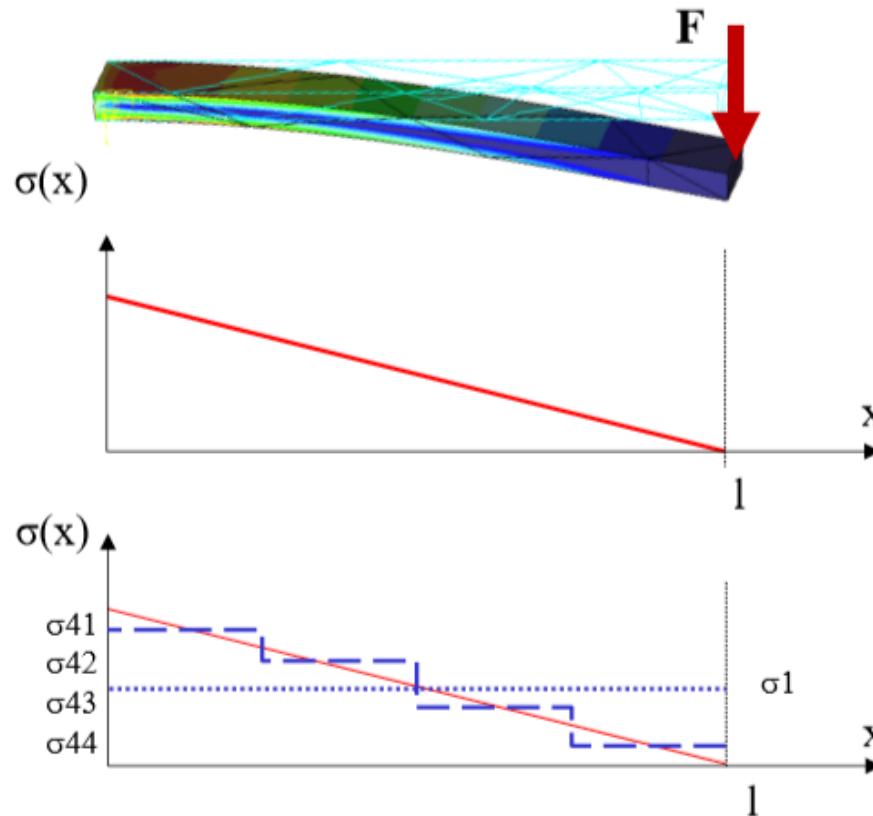
Mit FEM bestimmte Spannung in Abhängigkeit vom Weg x bei Verwendung von:



für Bereich Δx (Element) wird u bestimmt

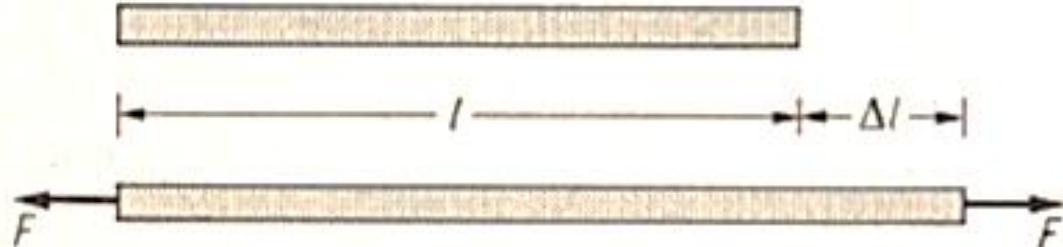
$$\Rightarrow \varepsilon_{\text{Bereich}} = \frac{u}{\Delta x} = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{Bereich}} = \varepsilon * E = \text{konst}$$



Quelle:
 Skript Prof. Albrecht,
 FEM Grundlagen, 2019

Verformung eines elastischen Stabes der Länge l



Gilt nur für konstante
Querschnittsfläche !

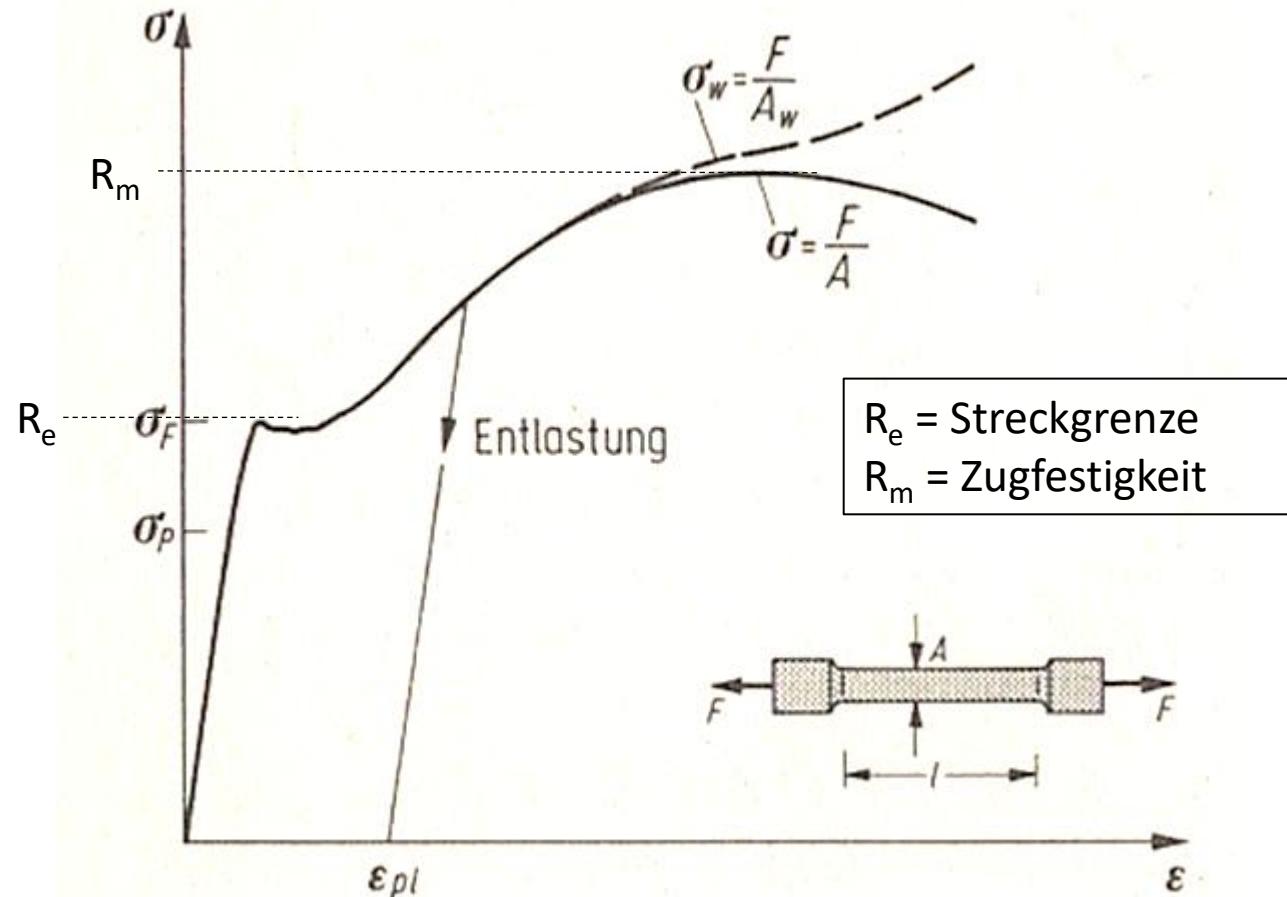
Verlängerung Δl als Maß für die Größe der Verformung führt man in der Technik außerdem das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge ein:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Dehnung ε (dimensionslos)

Quelle:
Schnell, Gross, Hauger:
TM2 - Elastostatik

Spannung-Dehnungs-Diagramm



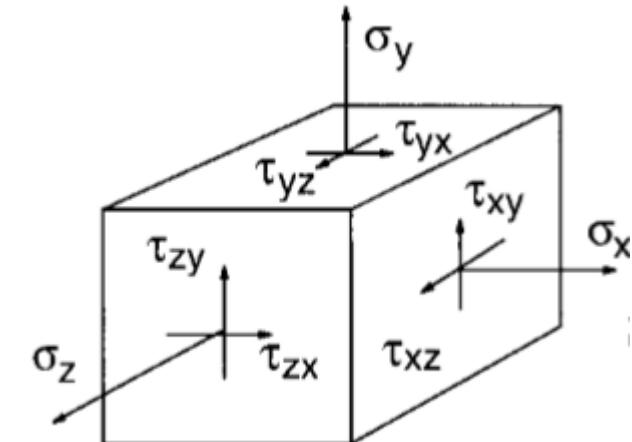
- Genormter Zugversuch zur Ermittlung von Werkstoffkennwerten
- Linearelastischer Bereich bis zur Fließspannung σ_F (Streckgrenze)
- Danach bleibende Verformung
- σ_w auf wirkliche Querschnittsfläche A_w bezogene Spannung σ ist normiert auf A

Quelle:
Schnell, Gross, Hauger: TM2 - Elastostatik

Spannungen am Volumenelement

- Realer mehrachsiger Spannungszustand
- Betrachtung aller Raumrichtungen durch Querkontraktionszahl ν (Einschnürung)

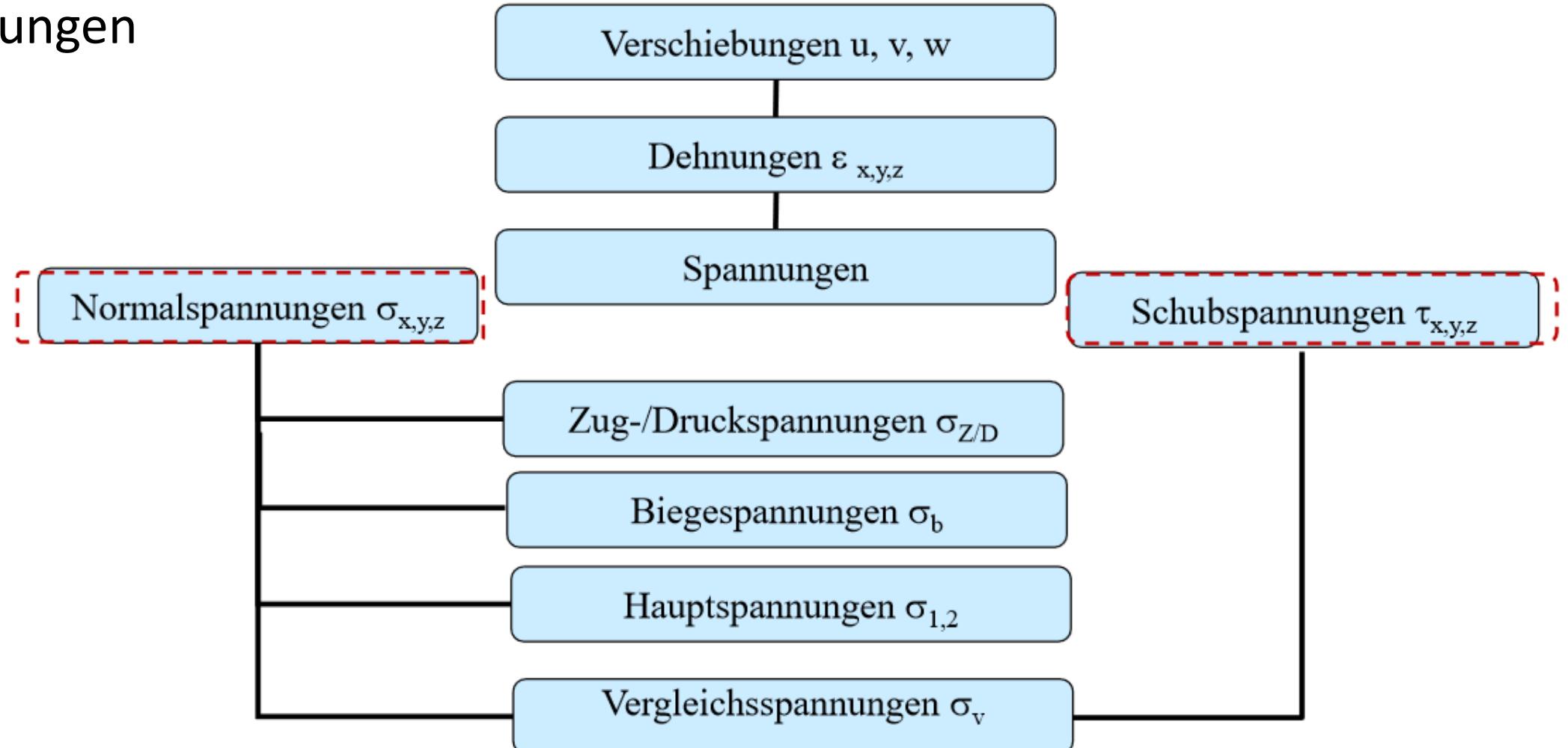
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z)]$$



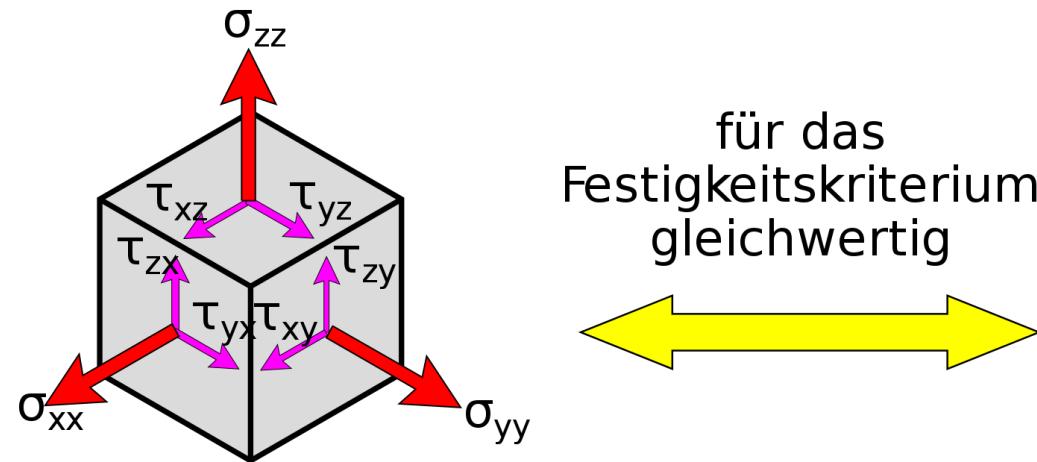
Spannungen am 3D Körper

σ = Normalspannungen
 τ = Schubspannungen

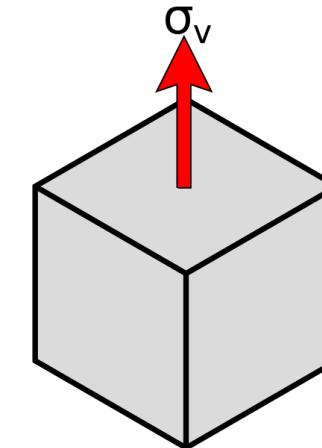
Spannungen



Vergleichsspannung (von Mises)



für das
Festigkeitskriterium
gleichwertig



**Komplexer mehrachsiger
Spannungszustand**
=> Kein Vergleich möglich

**Einfacher, einachsiger
Spannungszustand**
=> Vergleich mit Zugfestigkeit aus
Zugversuch

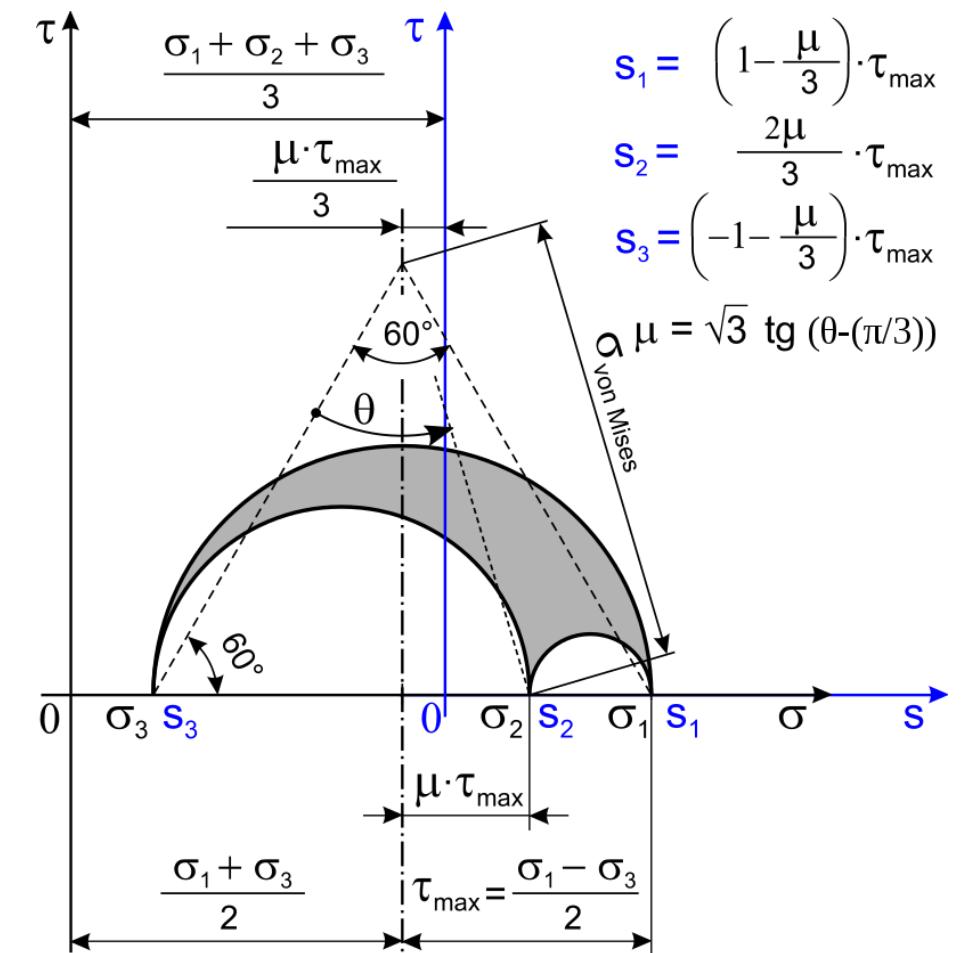
Berechnung der von Mises-Spannung

Beschreibung im ebenen Spannungszustand:

$$\sigma_{v,M} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

Beschreibung durch Biegung und Torsion:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \tau_t^2}$$



Mohrscher Spannungskreis

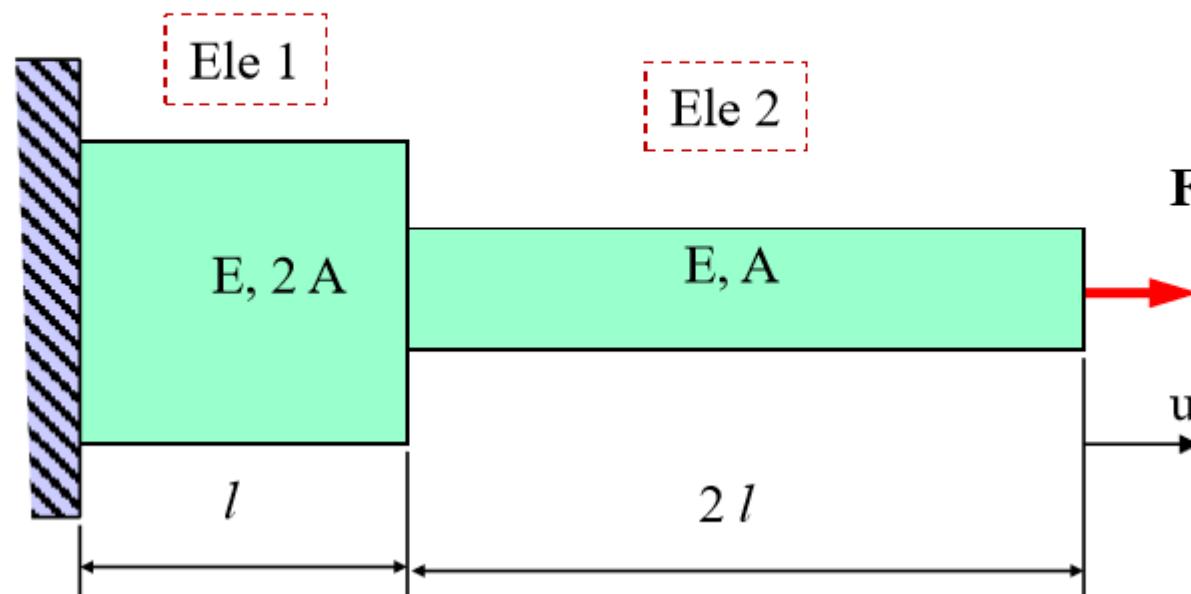
Grundsätzliches Vorgehen bei der Berechnung mittels FEM

1. Beispiel:

Stab mit 2 unterschiedlichen Querschnitte wird auf Zug belastet.

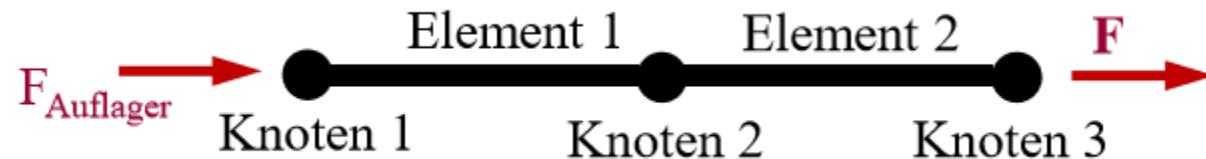
Geg.: Balken (mit E , A , L), einseitig eingespannt auf Zug belastet mit der Kraft F , $F_{\text{Gewicht}} \ll F$

Ges.: Verschiebung u am Kraftangriffspunkt, Auflagerkraft F_{Auflager}



1. Schritt: Aufteilen des Bauteils in Finite Elemente (FE)

Verbindungsstellen sind Knoten (K)



Knoten:

- Sprunghafte Änderung von
 - Geometrie
 - Material
 - Äußere Kräfte
- Äußere Kräfte
- Innere Kräfte der Elemente $F_{n,m}$

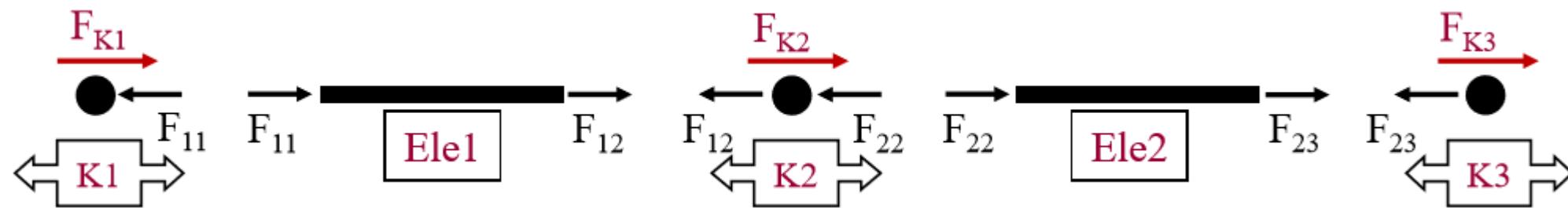
Finite Elemente:

Innere Kräfte $F_{n,m}$

n = Nummer Element

m = Nummer Knoten

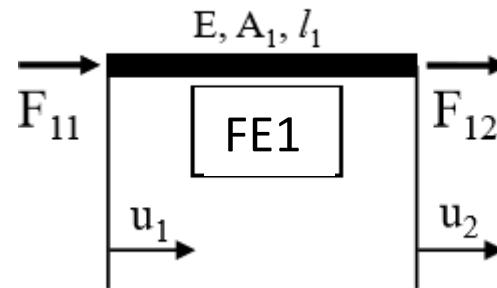
Freischneiden



TIPP:

Gedanklich die Knoten in Kraftrichtung verrücken und
Orientierung der resultierende Kräfte einzeichnen

2. Schritt: Betrachtung am Element



Annahme:

Die Kraft $F_{n,m}$ erzeugt am Finiten Element n die Verschiebung u_m

Es herrscht Kräftegleichgewicht am Element:

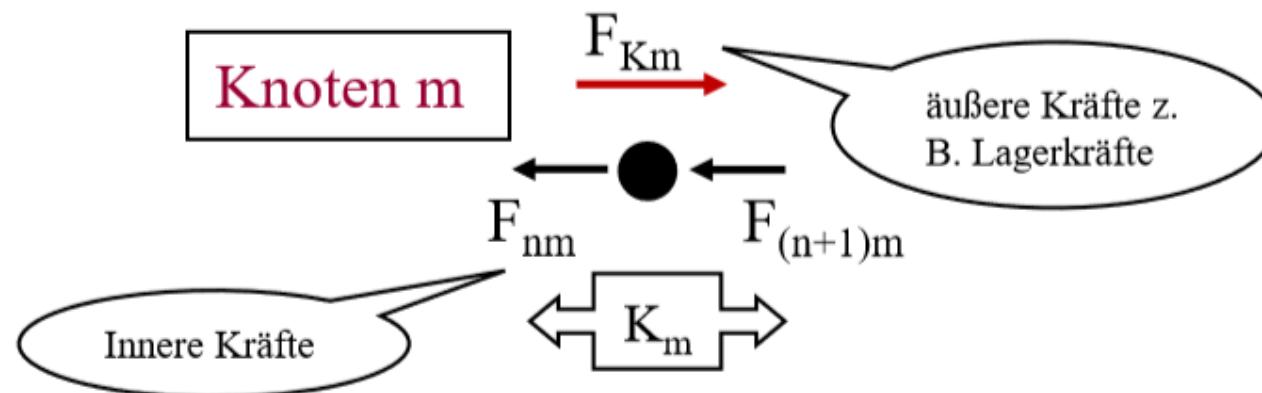
$$F_{11} + F_{12} = 0$$

3. Schritt: Bestimmung der Elementen-Steifigkeit k_i

Allgemeine Form der Elementen-Steifigkeit:

$$k_i = \frac{A_i, E_i}{l_i}$$

4. Schritt: Betrachtung am Knoten:



5. Schritt: Aufstellen der Gleichungen => Matrizenform

6. Schritt: Randbedingungen

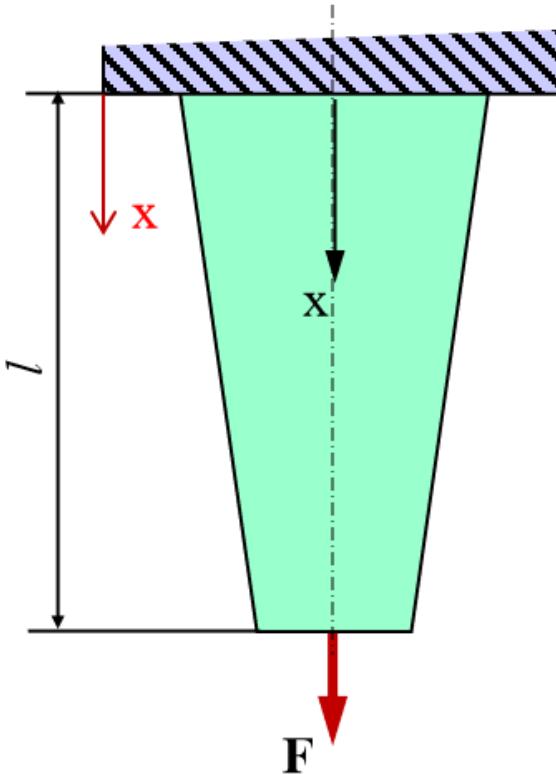
7. Schritt: Einsetzen der Randbedingungen und lösen der Gleichungen

8. Schritt: Streichen der Zeilen und Spalten (für $u=0$)

9. Schritt: Berechnung der Verschiebungen

10. Schritt: Berechnung der Lager-Reaktion

11. Schritt: Ermittlung der Spannungen



Beispiel 2

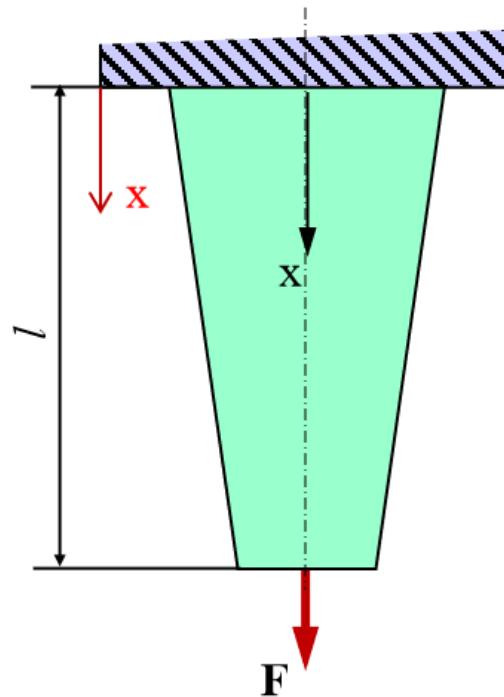
Gegeben

Balken ($E, A(x), l$),
einseitig eingespannt, auf Zug belastet mit
Kraft F , (Eigengewicht wird vernachlässigt)

Gesucht

- Verschiebung u im Kraftangriffspunkt
- Auflagerkraft F_{AL}
- maximale Spannung σ_x

Analytische Betrachtung



$$A(x) = A_0 (1 - x/2l)$$

Analytische Lösung:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E(x)} = \frac{F(x)}{A(x) * E(x)}$$

$$u(x) = \int_0^l \frac{F}{EA(x)} dx = \int_0^l \frac{F}{EA_0(1 - \frac{x}{2l})} dx$$

$$u(l) = \frac{-2l}{EA_0} \ln\left(1 - \frac{l}{2l}\right) F = \frac{-2l}{EA_0} \ln(0,5) F = 1,386 \frac{l F}{EA_0}$$

Integraltafel:

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax + b|$$

Berechnung an der Tafel

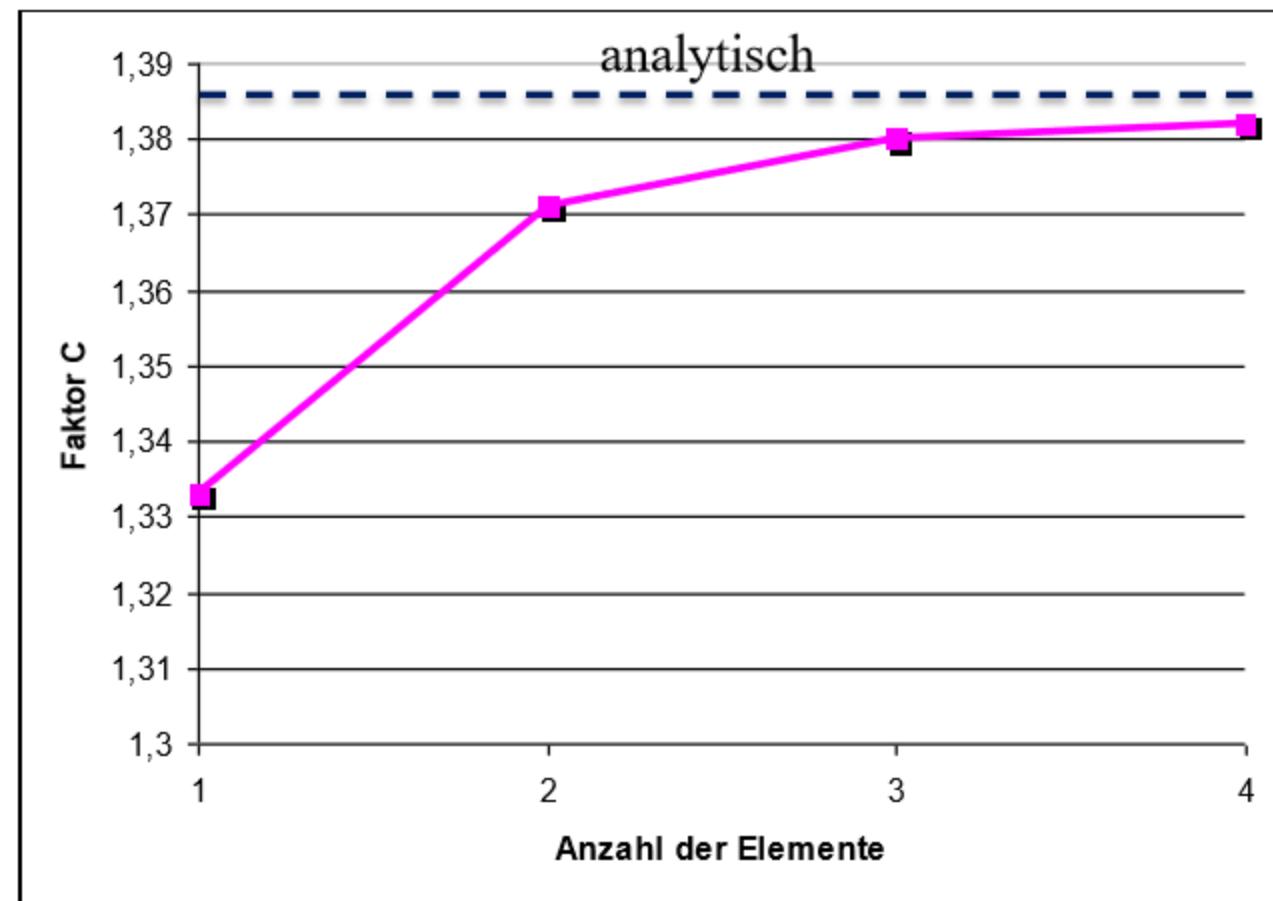
- 1 Element
- 2 Elemente

Vergleich von Analytischer und FEM Rechnung für den Faktor C

Faktor C für	$u(x = l)$
analytisch	1,386
1 Element	1,333
2 Elemente	1,371
3 Elemente	1,380
4 Elemente	1,382

Es ist:

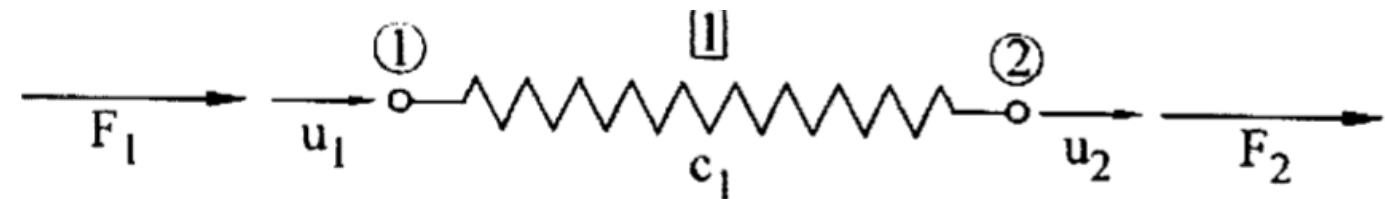
$$u_i = C * l * F / (E A_0)$$



Alternative Berechnungsmethoden

Matrix-Steifigkeits-Methode 1

Federelement



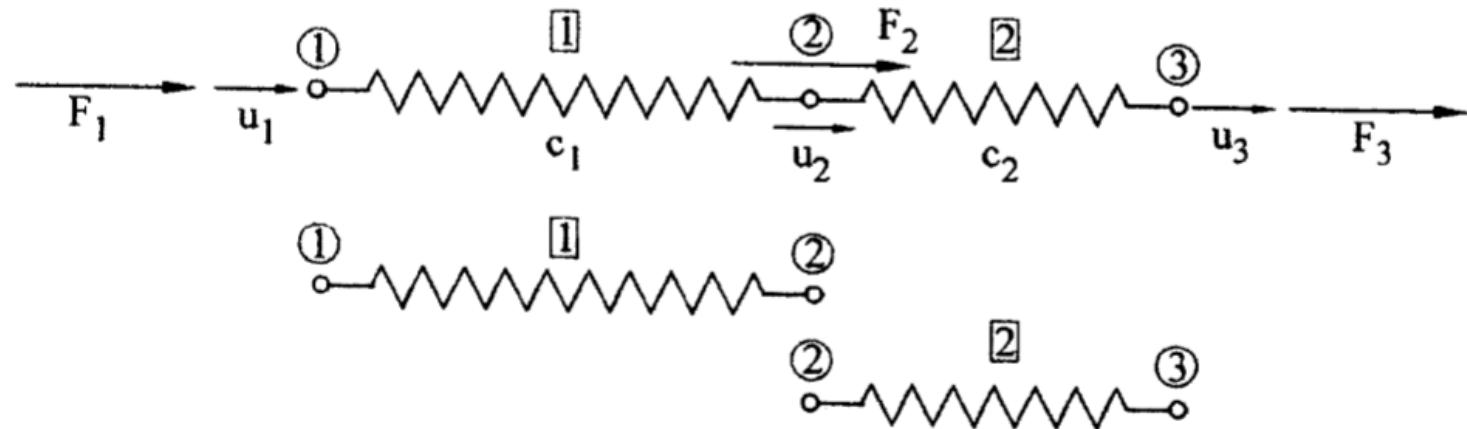
$$F_1 = c_1 u_1 - c_1 u_2$$

$$F_2 = c_1 u_2 - c_1 u_1$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e$$

Matrix-Steifigkeits-Methode 2

2 Feder Elemente



$$u_1 = u_2 = 0: \quad F_3 = c_2 u_3, \quad F_2 = -F_3, \quad F_1 = 0$$

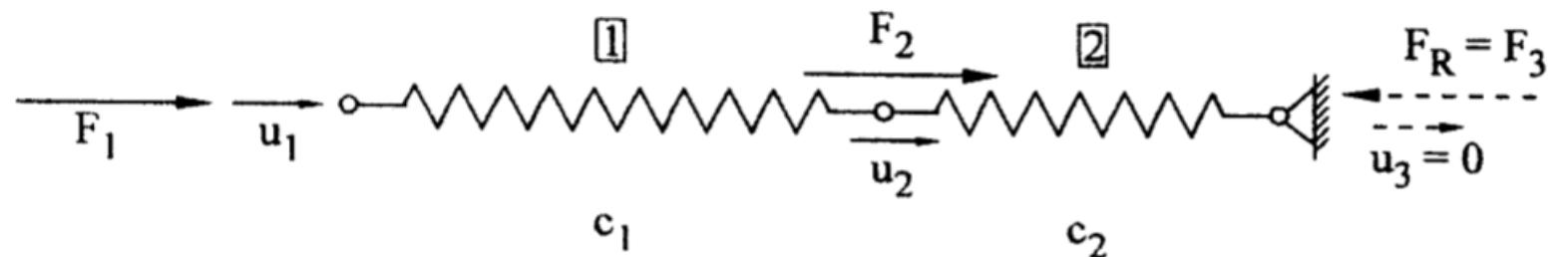
$$u_1 = u_3 = 0: \quad F_2 = (c_1 + c_2)u_2, \quad F_1 = -c_1 u_2, \quad F_3 = -c_2 u_2$$

$$u_2 = u_3 = 0: \quad F_1 = c_1 u_1, \quad F_2 = -F_1, \quad F_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{f} = \mathbf{Ku} \quad (\det \mathbf{K} = 0)$$

Matrix-Steifigkeits-Methode 3

Gebundenes
System



$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

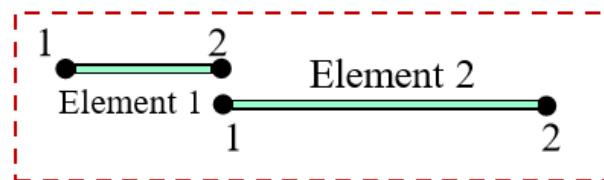
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad F_3 = [0 \quad -c_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) F_1 + \frac{1}{c_2} F_2, \quad u_2 = \frac{1}{c_2} F_1 + \frac{1}{c_2} F_2, \quad F_3 = -(F_1 + F_2)$$

Koinzidenz-Matrix

Vorgehen

1. Struktur des Bauteils



Modell für das Beispiel

Elementknoten:	1	Ele 1	2, 1	Ele 2	2
	1		2, 1		2
Systemknoten:	I		II		III
		$\rightarrow u_1$	$\rightarrow u_2$	$\rightarrow u_3$	

2. Ermitteln der Elementsteifigkeiten

Element 1

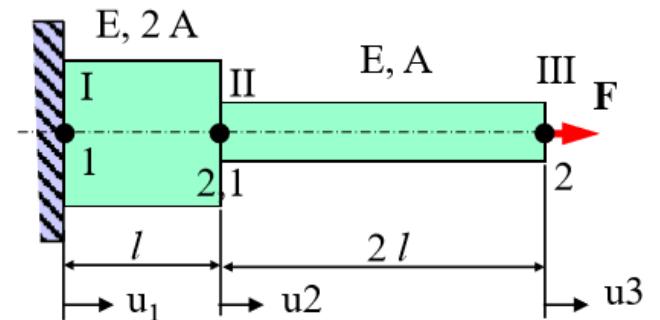
	1	2
1	k_1	$-k_1$
2	$-k_1$	k_1

Element 2

	1	2
1	k_2	$-k_2$
2	$-k_2$	k_2

\rightarrow
 $k_1 = 2EA/l = k$;
 $k_2 = EA/2l = k/4$

Beispiel



Element 1

	1	2
1	k	$-k$
2	$-k$	k

Element 2

	1	2
1	$k/4$	$-k/4$
2	$-k/4$	$k/4$

Koinzidenz- Matrix

3. Kompatibilität der Verschiebungen an den Knoten herstellen \rightarrow Koinzidenzmatrix

Modell für das Beispiel

Element-Knoten

Element 1: (1,2) auf
Element 2: (1,2) auf

System-Knoten

$$\begin{pmatrix} \text{I} & \text{II} \\ \text{II} & \text{III} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Koinzidenzmatrix}$$

Koinzidenz-Matrix

4. Aufstellen der System-Steifigkeitsmatrix

Diese Matrix verknüpft die äußeren Knotenkräfte (hier 3) mit den Verschiebungen (hier 3). Die Anzahl der Zeilen N_Z und Spalten N_S ist gleich; sie entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade (FG) des Systems:

hier $\rightarrow N_Z = N = 3 \text{ FG } (u_1, u_2, u_3)$,

Knoten		I	II	III
	FG	u1	u2	u3
I	u1			
II	u2			
III	u3			

Koinzidenzmatrix

5. Platzieren der Elementsteifigkeitsmatrizen in der Systemsteifigkeitsmatrix entsprechend der Koinzidenzmatrix

1. Positionieren der Matrixelemente von Element 1

	1	2
1	k_1	$-k_1$
2	$-k_1$	k_1

Element 1

Element 2

2. Positionieren der Matrixelemente von Element 2

	1	2
1	k_2	$-k_2$
2	$-k_2$	k_2

Kno ten		I	II	III
	FG	u_1	u_2	u_3
I	u_1	k_1	$-k_1$	
II	u_2	$-k_1$	k_1+k_2	$-k_2$
III	u_3		$-k_2$	k_2

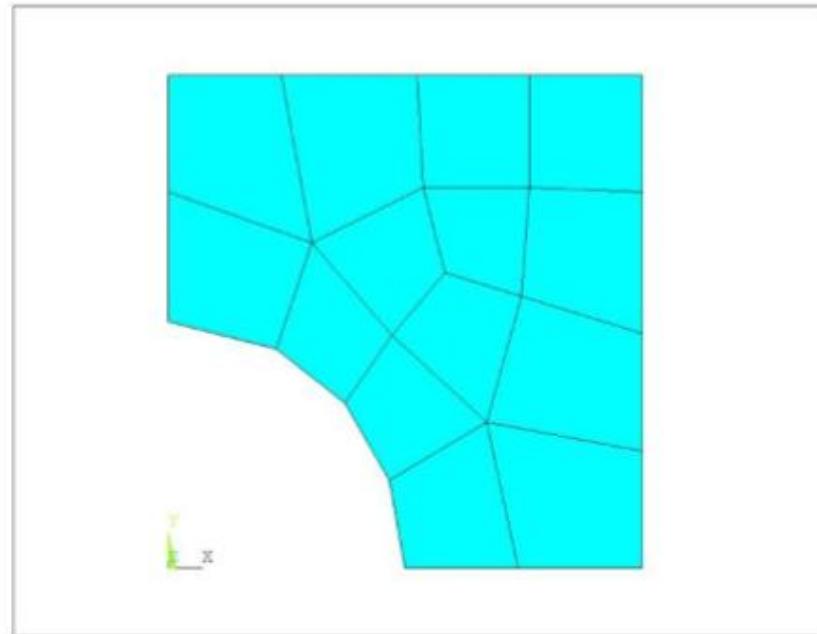
Numerische Berechnungsmethoden

H-Element-Methode

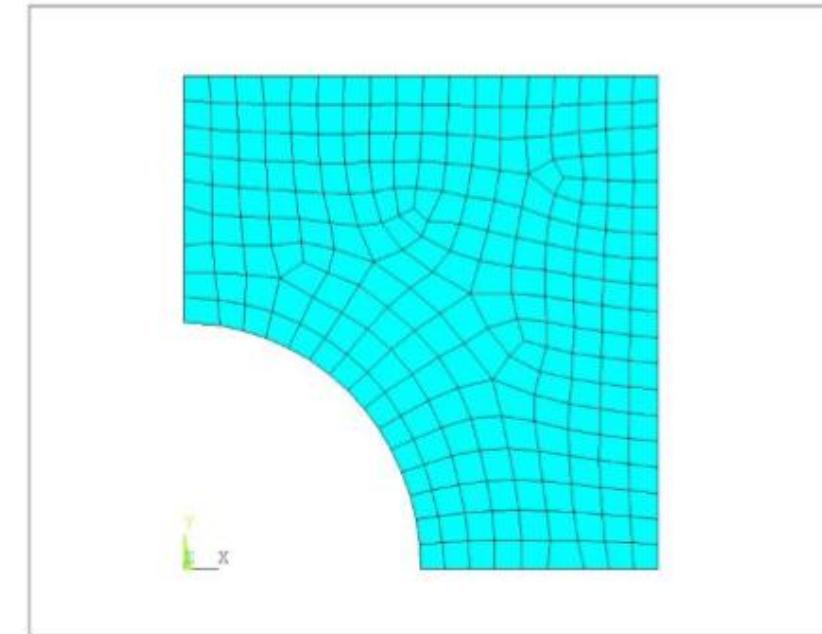
- Auch kurz „h-Methode“ genannt
- Häufig verwendete Methode (ANSYS)
- große Anzahl von Elementen
- relativ einfachen Lösungsansätzen
- Nachteilig:
 - feine Strukturen werden nicht gebraucht, wo keine großen Spannungsgradienten auftreten
 - Wo große Spannungsgradienten auftreten, benötigt man feine FEM-Netze
 - Feine Netze bedingen einen hohen Aufwand an Netzgenerierung und Rechenleistung.
 - Wo sich hohe Spannungsgradienten befinden, erhält man erst nach der ersten Rechnung der Struktur

Verfeinerung mittels h-Element-Methode

=> Steigerung der Genauigkeit durch eine Erhöhung der Elementdichte



Verrundung, Kante mit 4 Elementen



Verrundung, Kante mit 15 Elementen

H-Element-Methode

„h-Adaptivität“

Steigerung der Genauigkeit erfolgt durch eine Erhöhung der Netzdichte
=> zusätzliche Elemente hinzugefügt werden

„r-Adaptivität“

Erhöhung der Netzdichte, durch Verschieben der Knoten in Bereiche hoher Spannungsgradienten;
=> Anzahl der Elemente bleibt konstant

p-Element-Methode

Theoretisch möglich:

Erzeugung von Elementen mit beliebig hoher Ordnung der Ansatzfunktion durch Hinzufügen weiterer Potenzen.

Praktisches Problem:

Die Anzahl der zu berechnenden Freiheitsgrade, steigt vor allem bei 2- bzw. 3-dimensionalen Problemen, rapide an:

Dreieckselement mit quadratischer Ansatzfunktion => sechs Freiheitsgrade,

Dreieckselement mit kubischer Ansatzfunktion => zehn Freiheitsgrade

Bei FE-Modelle mit über hunderttausend Elementen

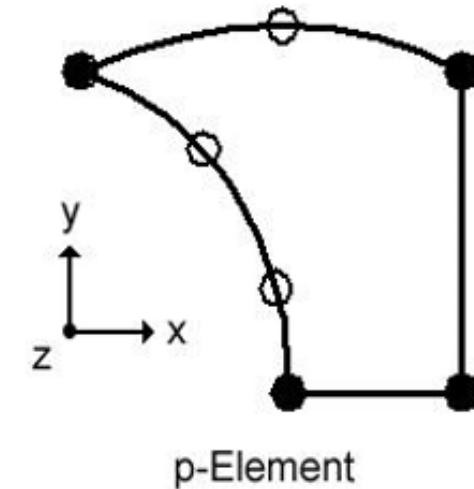
=> mathematischer Aufwand nimmt exorbitante Dimensionen an

=> daher vollständige Polynomansätze, meist nur bis zum kubischen Ansatz verwendet.

p-Element-Methode

Zusätzlicher Elementtyp, „p-Element“ genannt

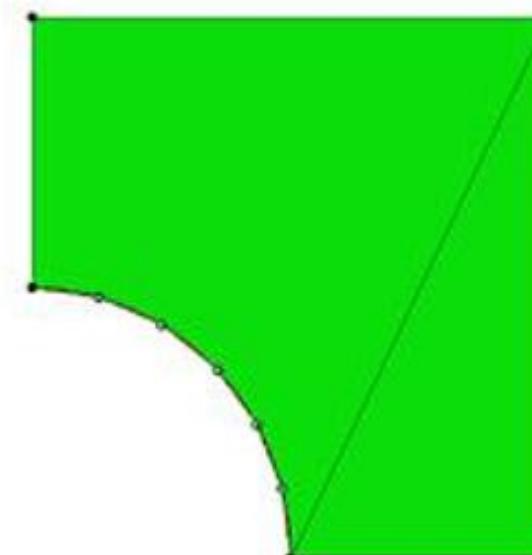
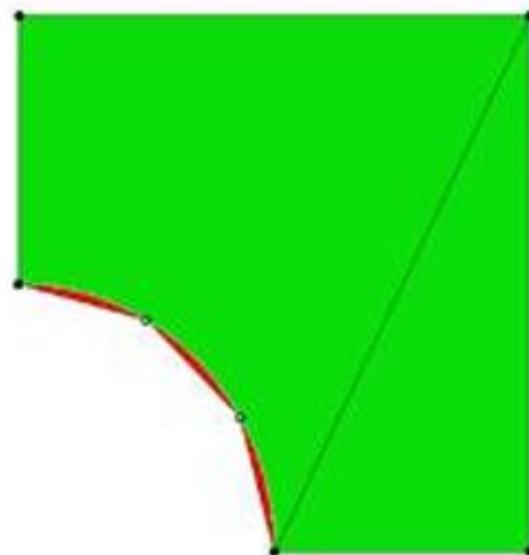
- ⇒ keine fest vorgegebenen Ansatzfunktionen
- ⇒ bei Bedarf in ihrem Polynomgrad variieren
- ⇒ Reduktion des mathematischen Aufwand bei vergleichsweise hoher Qualität der Simulation



Creo Simulate

- Creo-Simulate benutzte Geometrie Elemente Analyse (GEA) basiert auf dem Prinzip der sogenannten „p-Methode“
- Die Steigerung der Genauigkeit erfolgt bei der „p-Methode“ durch das Erhöhen der Polynomordnung der Ansatzfunktionen
- bestehendes FE-Netz bleibt erhalten
- Creo-Simulate steuert den Grad der Ansatzfunktionen automatisch
- Es werden nur diejenigen Elementkanten mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung versehen, bei denen es auch tatsächlich notwendig ist

Im rechten Bild wurde die Ordnung der Ansatzfunktion der gekrümmten Elementkante von einem Polynom dritten Grades (3 Elemente auf dem Kreisbogen) auf ein Polynom sechsten Grades (6Elemente) erhöht



Hierzu verwendet Creo-Simulate zwei unterschiedliche Konvergenzmethoden:

„Adaptive Einschritt-Konvergenz“

„Adaptive Mehrfach-Konvergenz“

Adaptive Einschritt-Konvergenz (E)

- Rechenlauf in 2 Schritten beginnend mit Polynomgrad 3
- Spannungsfehler werden berechnet
- anhand dieser Fehler erfolgt neue Polynomgradverteilung
- Die Methode ist empfehlenswert

Vorteile:

- höhere Geschwindigkeit, nur zwei Berechnungsschritte
- weniger Verbrauch von Plattenplatz
- Keine unnötigen Freiheitsgrade im Modell
- Direkte, auf die Spannung bezogene Fehlerabschätzung
- Spannungsberechnung auf zwei Arten
- Singularitäten treiben nicht den lokalen Polynomgrad

Nachteile:

- Keine Konvergenzkurve
- Keine Konvergenzvorgabe
- Fehlerwert schwierig zu interpretieren
- Spannungsbild oft zackig und ausgefranst, obwohl gute Ergebnisse
- Symmetrische Bauteile haben ein etwas unsymmetrisches Spannungsbild

Adaptive Mehrfach-Konvergenz

- Creo 2.0 Simulate führt mehrere Rechenläufe durch
- jeweils Erhöhung des Polynomgrades bis max. 9.
- Konvergenzgrad wird angegeben (Ergebnisdifferenz zweier aufeinanderfolgender Rechenläufe in %).
- Der Konvergenzgrad wird vorgegeben; die Berechnung schließt ab, wenn der Vorgabewert erreicht ist!

Vorteile:

- Gemischte Modelle (Balken, Schalen, Tetraeder)
- Modelle mit isotropem Materialverhalten
- Angabe der Konvergenz

Neues Thema:
Energieprinzip

Ansatz

- Wird ein elastisches System unter Einwirkung einer äußeren Kraft F verformt, so wird dabei eine Arbeit W verrichtet.
- Die inneren Kräfte arbeiten unter dem Einfluss der Normalkraft der äußeren Kraft entgegen
- Die Formänderungsenergie wird hierbei als innere Energie gespeichert
- Hierfür wird das Gesamt-Potential Π eingeführt
- Es ist

$$\Pi = U_a + U_i$$

U_a = potentielle (äußere) Energie der äußeren Kräfte
 U_i = gespeicherte innere Energie im elastisch verformten System

Allgemeine Form der DGL:

$$\Pi = U_i + U_a = \int_V \varepsilon \sigma dV - \sum_{i=1}^n F_i u_i + \int_V p dV + \int_O q dO$$

F - konzentrierte Einzellasten

p – Volumenkräfte (Eigengewicht, Fliehkräfte)

q – verteilte Oberflächenlasten

O - Oberfläche

Äußere Energie:

$$\begin{aligned} U_a &= - \int F \, ds \\ &= - F \cdot u \end{aligned}$$

Annahmen:

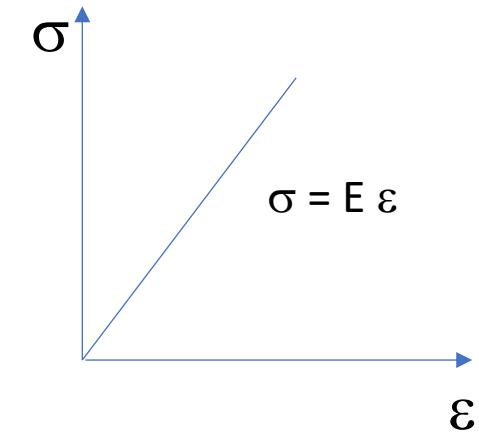
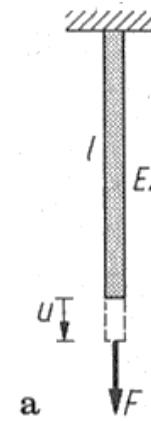
- Die Kraft ist Konstant über den gesamten Weg ds
- Der Weg ds ist sehr klein gegenüber der Gesamtlänge l
- Es gehen nur die äußeren Belastungen, nicht die Auflagerreaktionen ein

Innere Energie

Die innere Energie U_i gleicht dem Produkt aus Energiedichte \tilde{U}_i und Volumen V

$$U_i = \tilde{U}_i V$$

$$\Rightarrow \tilde{U}_i = \int_0^{\varepsilon} \sigma_x d\varepsilon$$



Innere Energie : U_i = $\tilde{U}_i V$ mit $\tilde{U}_i = \int_0^{\varepsilon} \sigma_x d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ $(u_i - u_k)/l = \varepsilon$
(Für den Stab)

$$U_i = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon V_{\text{Stab}} = \frac{1}{2} \frac{E(u_i - u_k)^2}{l^2} A l = \frac{1}{2} \frac{A E}{l} (u_i - u_k)^2 = \frac{1}{2} k (u_i - u_k)^2$$

Energieprinzip

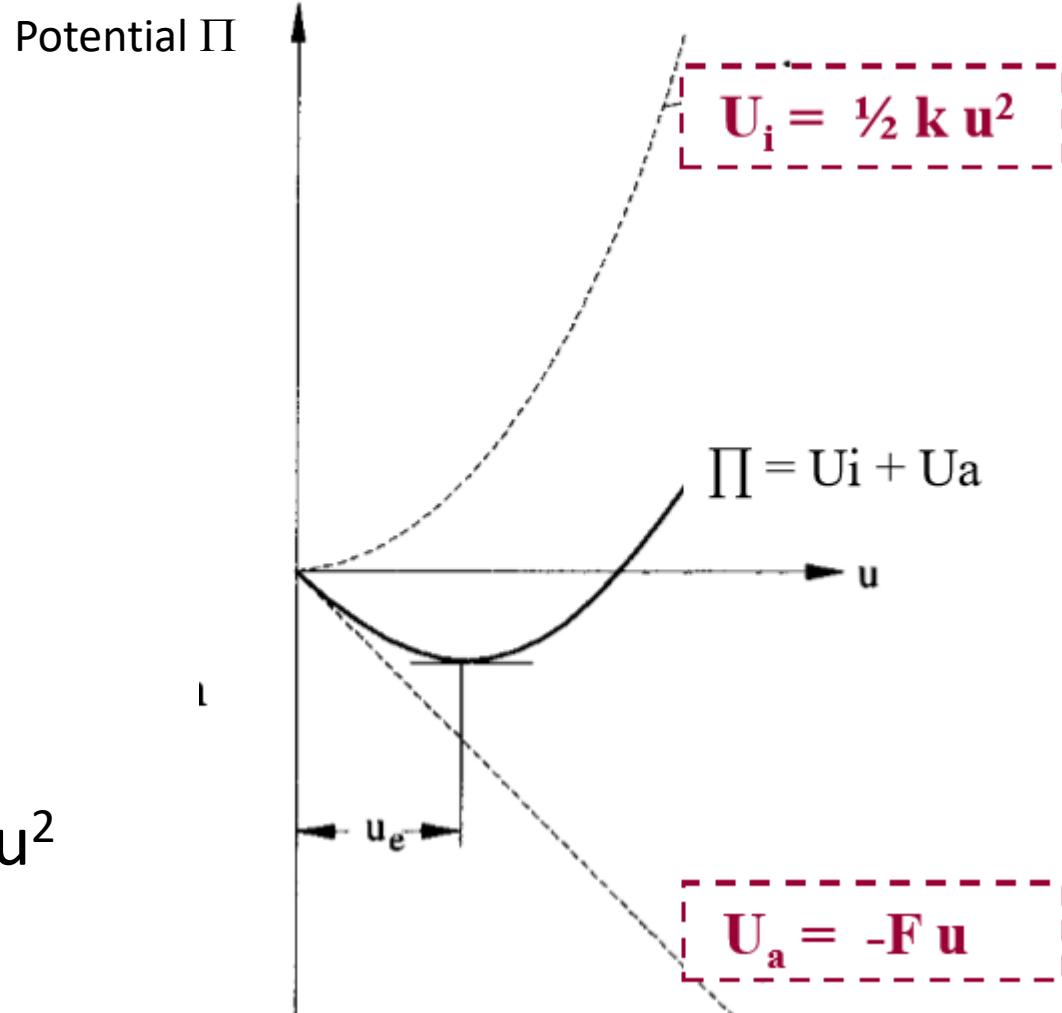
Extrema- / Variationsprinzip

Das System ist im Gleichgewicht, wenn das Gesamtpotential Π stationär ist => es nimmt ein Extremum (Minimum) an

$$U_i = \frac{1}{2} k u^2$$

$$U_a = F u$$

$$\Pi = U_i + U_a = \frac{1}{2} k u^2 - k u u = -\frac{1}{2} k u^2$$



1.) Galerkin-Verfahren

Methode des gewichteten Restes

Näherungsfunktion / Gewichtungsfunktion => gleicher Ansatz

Ergebnis => Lösung + Rest (Rest soll möglichst klein sein)

2.) Rayleigh-Ritz

Prinzip der virtuellen Verrückung

Variationsprinzip => Ersatzgleichgewichtsfunktion
 => Gleichheit der inneren und äußeren Arbeit

Gleichung wird nicht direkt gelöst

Lösung über Ansatzfunktion, RB einsetzen und auflösen

Finites Element	Gesamtpotential Π	<i>EULERSche Differentialgleichung</i>
Zugstab unter Belastung $p(x)$	$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} [EAu'^2 - 2p(x)u]dx$	$(EAu')' + p(x) = 0$
Knickstab	$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} (EIv''^2 - Pv'^2)dx$	$(EIv'')'' + Pv'' = 0$
Biegebalken	$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} [EIv''^2 - 2q(x)v]dx$	$(EIv'')'' - q(x) = 0$
Balkenschwingung	$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} (EIv''^2 - \omega^2 \rho A v^2)dx$	$(EIv'')'' - \omega^2 \rho A v = 0$
Zugstab unter Belastung F_N	$\frac{1}{2} \int_0^1 [EA u'^2]dx - F u _1$	$(EAu')' + F = 0$

Gesamtpotenzial [5]

Quelle:

Bretten, FEM für Ingenieure, Springer

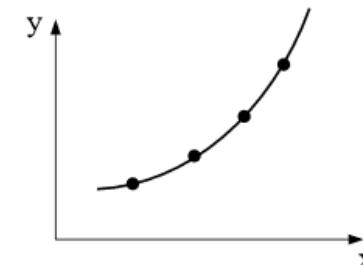
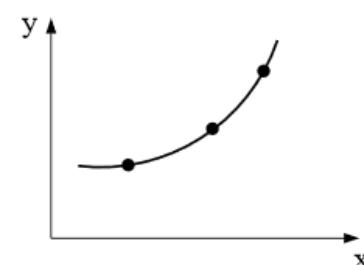
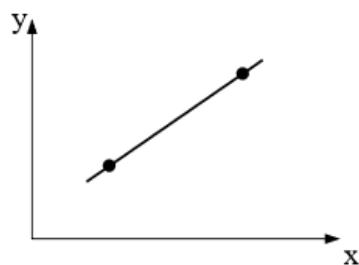
Diese Integralgleichungen gilt es zu lösen, um die gesuchten Verschiebungen u zu erhalten. Nach Galerkin wird dazu für die gesuchte Größe u ein Ansatz gemacht und das Integral des Restes muss möglichst klein sein. Diesen Ansatz nennt man Formfunktion. (Methode des gewichteten Restes).

Verformung:
Längenänderung u
Durchbiegung $v + w$
Streckenlast $p(x)$ in normalen Richtung
Kraft $P \rightarrow F$

Die Formfunktion $N(x)$ bzw. $g(x)$ hat die Eigenschaft, dass sie am Knoten i eines Elementes zu 1 wird, an allen anderen Knoten ist sie Null. Sie bestimmt den Anteil einer Komponente am Gesamtergebnis. Sie wird ermittelt über eine Ansatzfunktion z.B.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x) \quad \text{mit} \quad u_i(x) = x^{i-1}$$

Die Qualität der Näherungslösung hängt davon ab, wie gut die tatsächliche Lösung durch die Ansatzfunktion angenähert werden kann. Je höher die Zahl der Ansatzfunktionsglieder, desto besser. Nicht geeignete Ansatzfunktionen fallen heraus. Sie muss die Randbedingungen erfüllen. Zur Orientierung: Die Ansatzfunktion sollte so viele Glieder haben wie Freiheitsgrade im System sind. Hat ein Element 2 Knoten, so kann die Verschiebung maximal linear sein, bei 3 Knoten – quadratisch, bei 4 Knoten- kubisch.



Polynomgrad der Ansatzfunktion $u(x)$

2 Punkte

$u(x) = a_1 + a_2 x$
linear

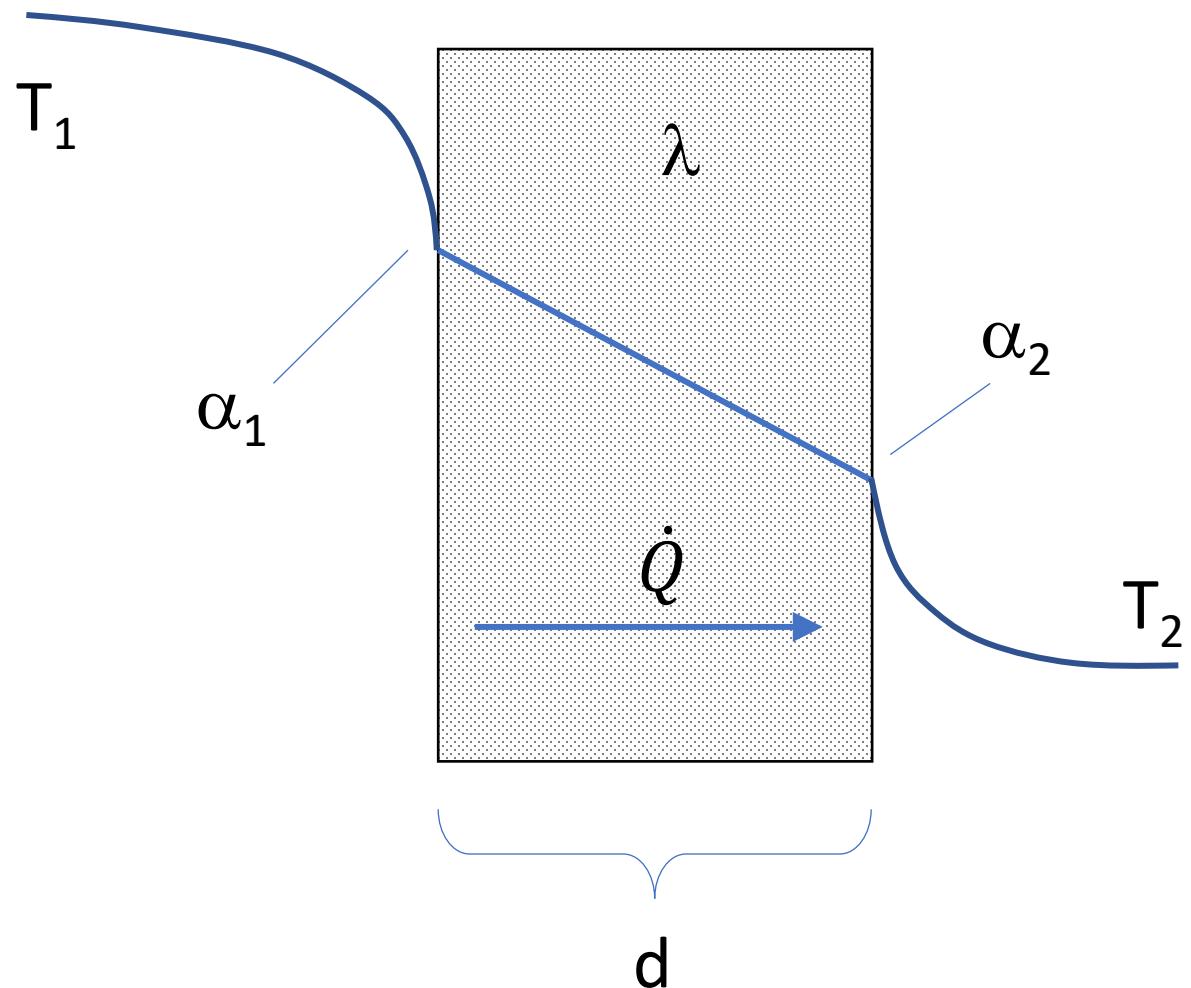
3 Punkte

$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$
quadratisch

4 Punkte

$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$
kubisch

Wärmeleitung und Wärmeübertragung



Wärmeleitung durch ebene Wand

- Konvektion innen
- Wärmeleitung Wand
- Konvektion außen

$$\dot{q} = \frac{1}{R} (T_1 - T_2)$$

\dot{Q} = Wärmestrom [W]

R = Wärmewiderstand [K/W]

α = Wärmeübergangskoeffizient [W/mK]

Die Wärmeleitung erfolgt analog der elektrischen Leitung

$$\Delta U = R_{el} * I \quad <=> \quad \Delta T = R_{therm} * \dot{Q}$$

Die einzelnen Widerstände können (bei Reihenschaltung) einfach addiert werden:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \frac{d}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\alpha 1} + R_{\lambda} + R_{\alpha 2}} = \frac{T_1 - T_2}{R_k}$$

Arten des Wärmeübergangs:

- 1.) Wärmeleitung: $R_\lambda = \frac{d}{\lambda \cdot A}$ (mit λ = Wärmeleitfähigkeit [W/mK])
- 2.) Konvektion: $R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot A}$ (mit α = Wärmeübergangskoeffizient [W/m²K])
- 3.) Strahlung (nicht näher betrachtet)

In Creo Simulate erfolgt die eigentliche Berechnung nur im Inneren des Festkörpers, die Wärmeübertragung an das angrenzende Fluid sind nur als Randbedingung betrachtet.

Natürliche Konvektion

Berechnung an der Tafel (für 100 x 100 mm Fläche, 80°C Wandtemperatur)

⇒ Wärmeübergangskoeffizient $\alpha \approx 5 \text{ [W/m}^2\text{K]}$

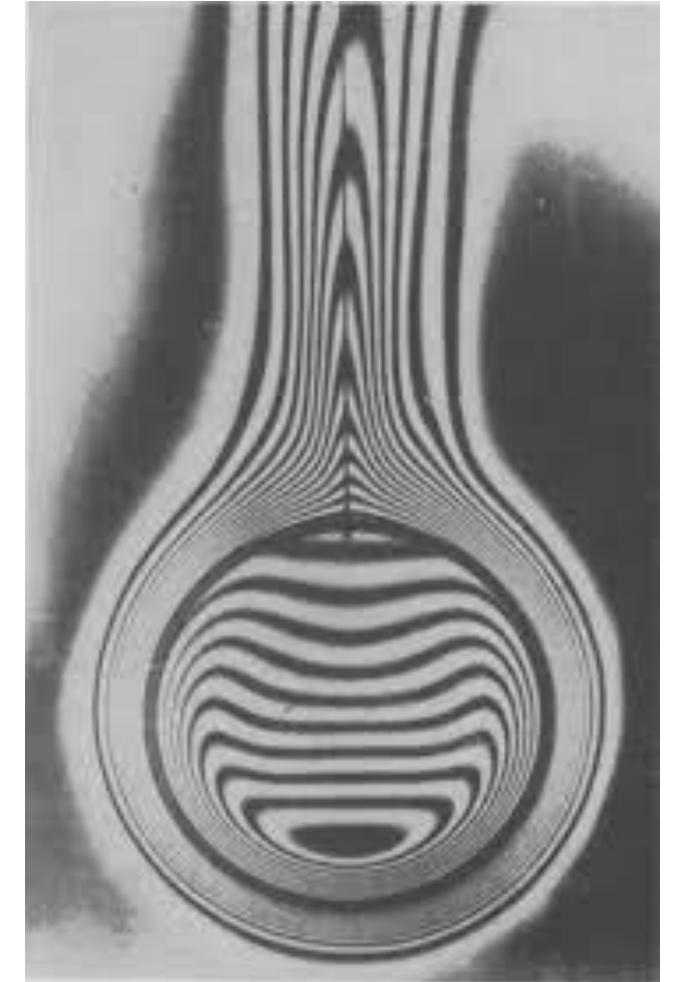
⇒ Sehr gering !!

Verbesserung mittels Strömung und dichtere Fluide:
näherungsweise (Quelle: Wikipedia)

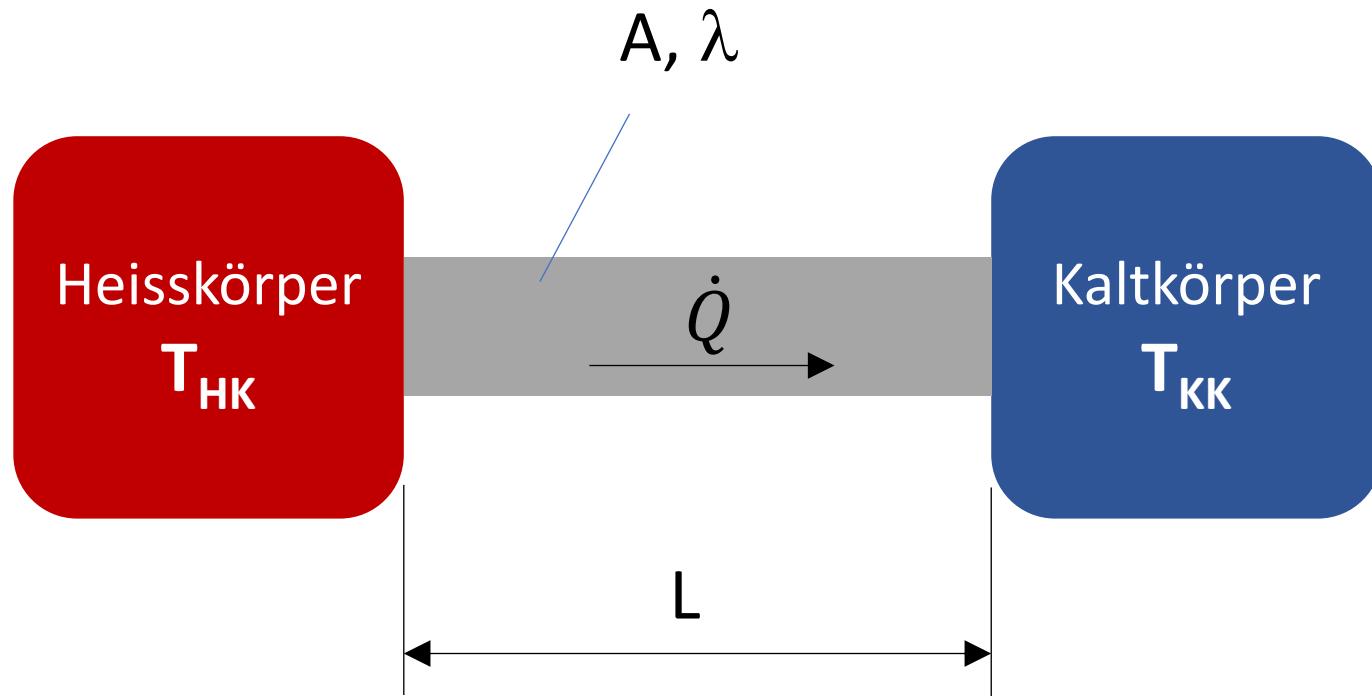
- **Medium Luft:** $\alpha = 12 \cdot \sqrt{v} + 2 \quad \text{[W/m}^2\text{K]}$

- **Medium Wasser:** $\alpha = 2100 \cdot \sqrt{v} + 580 \quad \text{[W/m}^2\text{K]}$

Mit
Strömungs-
geschwindigkeit
 v [m/s]



Beispiel: Rundstab



Berechnen Sie den
Wärmestrom \dot{Q}

$M = \text{Kupfer}$

$L = 0,3 \text{ m}$

$\varnothing = 8 \text{ mm}$

$A = 0,00005 \text{ m}^2$

$\dot{Q} = 100 \text{ W}$

$T_{KK} = 0^\circ\text{C}$

Wie hoch muss T_{HK} sein?
Wie hoch ist α ?

Wenn man z. B. über einen massiven Kupferstab mit 8 mm Durchmesser über eine Länge von 300 mm eine Wärmemenge von 100 Watt übertragen, würde man ein treibendes Temperaturgefälle von theoretisch $1493\text{ }^{\circ}\text{C}$ benötigen, ein utopischer Wert der jenseits der Schmelztemperatur von Kupfer liegt. Eine Heatpipe schafft den gleichen Wärmedurchsatz mit einem treibenden Temperaturgefälle von ca. $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$

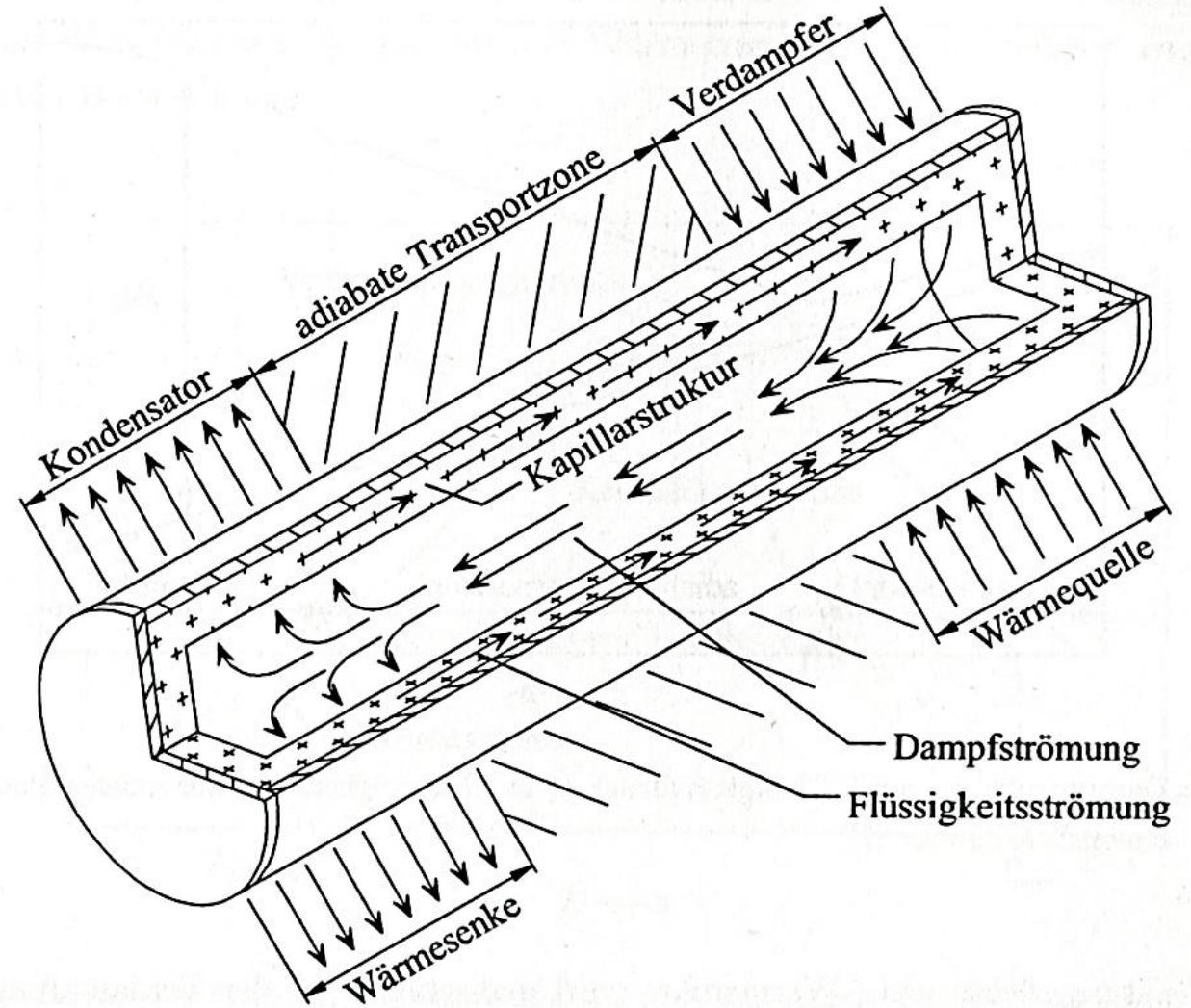
Wärmerohre (Heat pipes)

Wärmeleitfähigkeit Kupfer

$$\lambda_{\text{Cu}} = 400 \text{ W/mK}$$

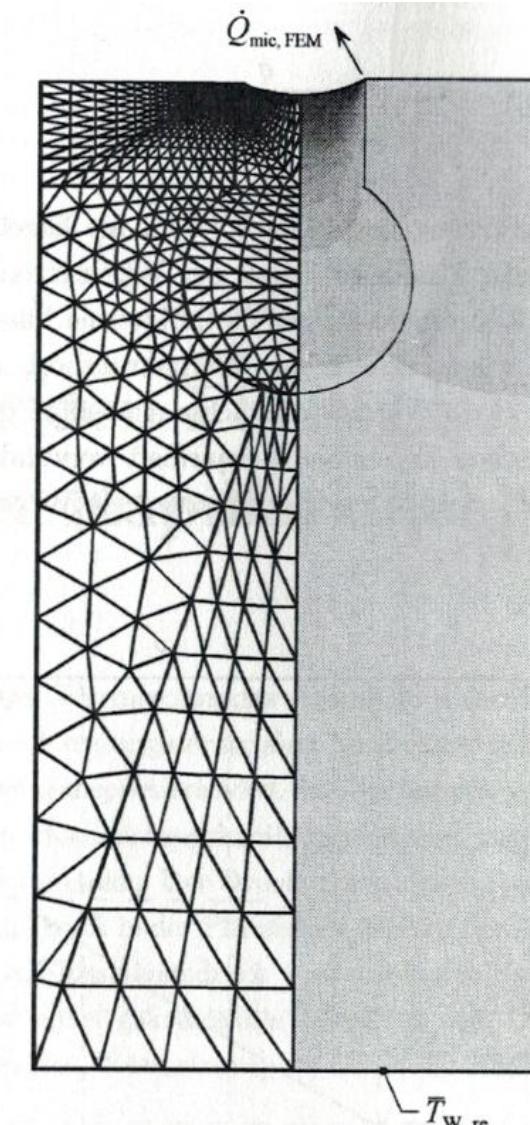
Wärmeleitfähigkeit Heat Pipe

$$\lambda_{\text{HP}} = 100.000 \text{ W/mK}$$



Numerische Simulation bei der Erforschung des lokalen Wärmeübergangs bei der Verdampfung aus einer Kapillarstruktur

- Sehr hohe Auflösung im Bereich der „Mikrozone“
- Finite Elemente $< 0,1 \mu\text{m}$
- Mäßige Auflösung im Bereich der Makrozone
- Finite Elemente $< 1 \text{ mm}$



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !

Hinweis

Diese Folien sind ausschließlich für den internen Gebrauch im Rahmen der Lehrveranstaltung an der Frankfurt University of Applied Sciences bestimmt. Sie sind nur zugänglich mit Hilfe eines Passwortes, dass in der Vorlesung bekannt gegeben wird.