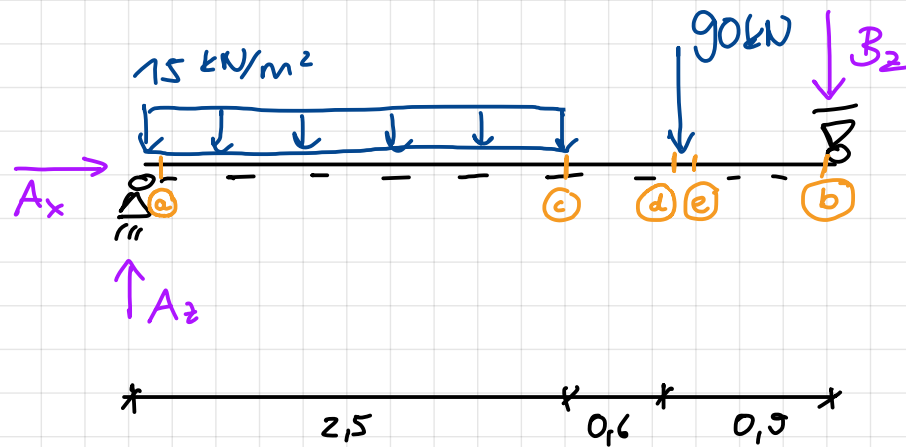


Übung 8

a) Auflagerkräfte: Pendelstab kann durch einseitiges Lager ersetzt werden



$$\sum \vec{F}_x = 0 : A_x = 0$$

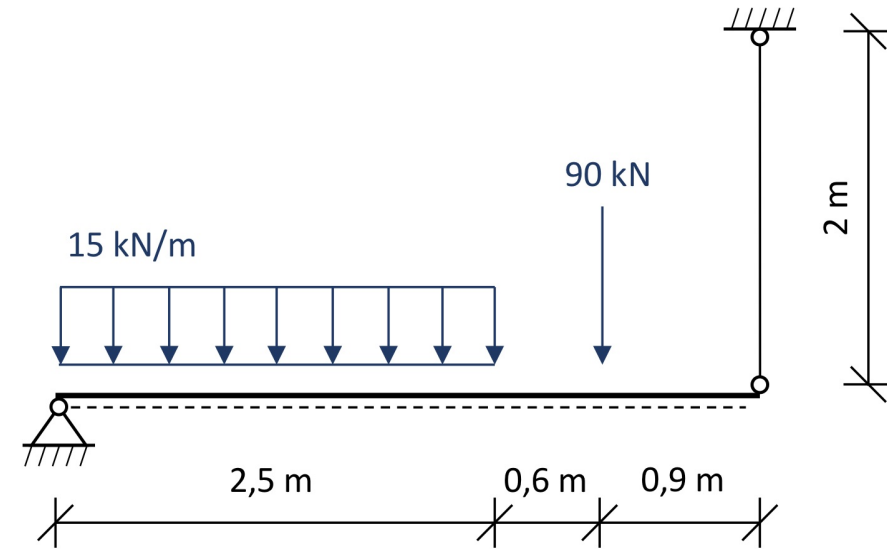
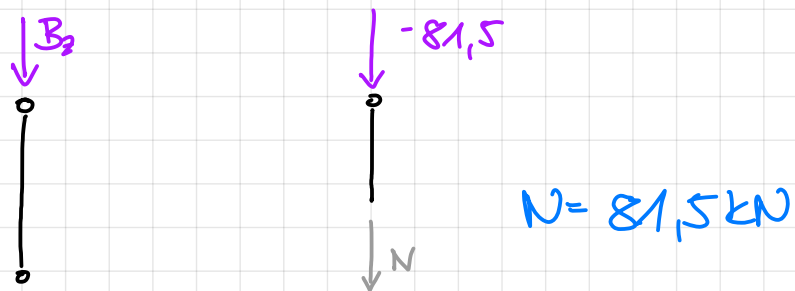
$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_a = 0 : -B_2 \cdot 4\text{ m} - 90\text{ kN} \cdot 3,1\text{ m} - 15\text{ kN/m} \cdot 2,5\text{ m} \cdot \frac{2,5\text{ m}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow B_2 = -81,5\text{ kN}$$

$$\sum F_z \downarrow = 0 : -81,5\text{ kN} + 15\text{ kN/m} \cdot 2,5\text{ m} + 90\text{ kN} - A_z = 0$$

$$\Leftrightarrow A_z = 46\text{ kN}$$

Normalkraft im Pendelstab:



a):

$$N_a = 0\text{ kN}$$

$$M_a = 0\text{ kNm}$$

$$V_a = 46\text{ kN}$$

b):

$$N_b = 0\text{ kN}$$

$$M_b = 0\text{ kNm}$$

$$V_b = -81,5\text{ kN}$$

c):

$$N_c = 0\text{ kN}$$

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_c = 0 : -46\text{ kN} \cdot 2,5\text{ m} + 15\text{ kN/m} \cdot 2,5\text{ m} \cdot \frac{2,5\text{ m}}{2} + M_c = 0$$

$$\Leftrightarrow M_c = 68,1\text{ kNm}$$

$$\sum F_z \downarrow = 0 : -46\text{ kN} + 15 \cdot 2,5 + V_c = 0 \Leftrightarrow V_c = 8,5\text{ kN}$$

d):

$$N_d = 0\text{ kN}$$

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_d = 0 : -M_d - (81,5\text{ kN}) \cdot 0,9\text{ m} = 0 \Leftrightarrow M_d = 73,4\text{ kNm}$$

$$\sum F_z \downarrow = 0 : -V_d + 90\text{ kN} + (-81,5\text{ kN}) = 0 \Leftrightarrow V_d = 8,5\text{ kN}$$

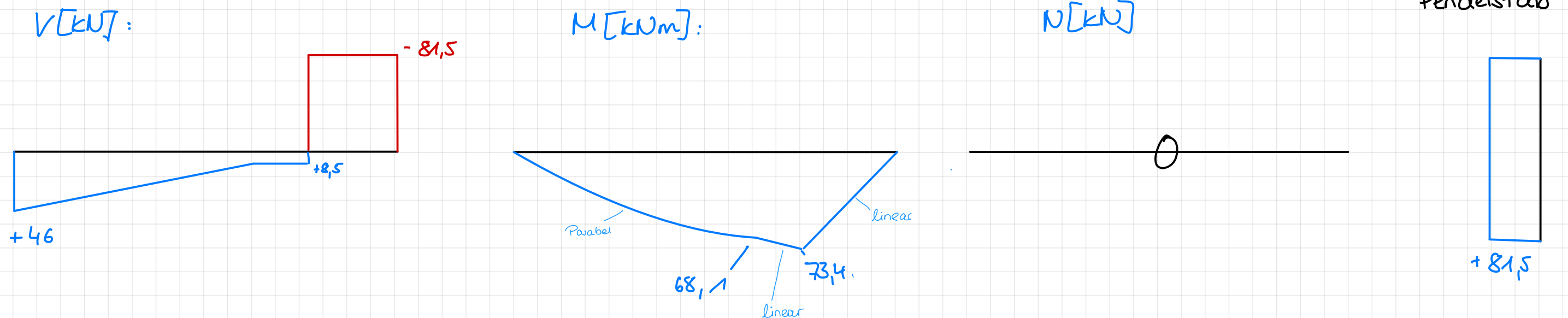
e):

$$N_e = 0\text{ kN}$$

$$M_e = 73,4\text{ kNm} = M_d$$

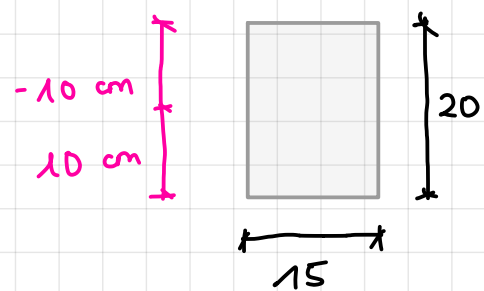
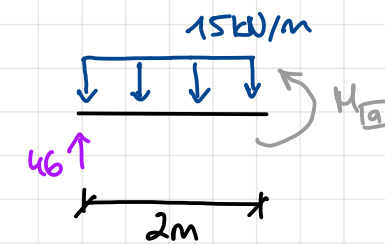
$$\sum F_z \downarrow = 0 : -V_e + (-81,5\text{ kN}) = 0 \Leftrightarrow V_e = -81,5\text{ kN}$$

Schnittkraftverläufe:



b) Spannungen in Balken & Pendelstab

$$M_{\max} = 73,4 \text{ kNm} \quad \parallel \quad \sum \overset{\curvearrowright}{M}_a = 0: M_a + 15 \text{ kN/m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{2 \text{ m}}{2} - 46 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 0 \Leftrightarrow M_a = 62 \text{ kNm}$$



$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{15 \cdot 20^3}{12} = 10\,000 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = \frac{M [kNm]}{W [cm^3]} \quad W = \frac{I [cm^4]}{z [cm]}$$

(1) am oberen Rand des Querschnitts:

$$\sigma_{1, M_{\max}} = \frac{73,4 \text{ kNm} \cdot 100 \frac{\text{cm}}{\text{m}}}{\frac{10\,000 \text{ cm}^4}{-10 \text{ cm}}} = -7,34 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{1, M_a} = \frac{62 \text{ kNm} \cdot 100 \frac{\text{cm}}{\text{m}}}{\frac{10\,000 \text{ cm}^4}{-10 \text{ cm}}} = -6,2 \text{ kN/cm}^2$$

(2) 5 cm unterhalb des oberen Querschnittsrandes:
 $z = -5 \text{ cm}$

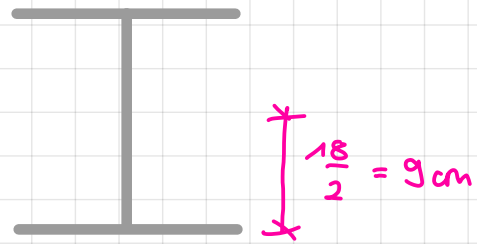
$$\sigma_{2, M_{\max}} = \frac{73,4 \cdot 100}{\frac{10\,000}{-5}} = -3,67 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{2, M_a} = \frac{62 \cdot 100}{\frac{10\,000}{-5}} = -3,1 \text{ kN/cm}^2$$

(3) am unteren Querschnittsrand:

$$\sigma_{3, M_{\max}} = \frac{73,4 \cdot 100}{\frac{10\,000}{10}} = 7,34 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{3, M_a} = \frac{62 \cdot 100}{\frac{10\,000}{10}} = 6,2 \text{ kN/cm}^2$$



(4) unterer Rand HEB 180

$$\sigma_{4, M_{\max}} = \frac{73,4 \text{ kNm} \cdot 100 \frac{\text{cm}}{\text{m}}}{\frac{3830 \text{ cm}^4}{9 \text{ cm}}} = 17,2 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{4, M_{\min}} = \frac{62 \text{ kNm} \cdot 100 \frac{\text{cm}}{\text{m}}}{\frac{3830 \text{ cm}^4}{9 \text{ cm}}} = 14,6 \text{ kN/cm}^2$$

(5) Zugspannung im Pendelstab

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1,5 \text{ cm})^2 = \frac{9}{4} \pi \approx 7,07 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_5 = \frac{N}{A} = \frac{81,5 \text{ kN}}{\frac{9}{4} \pi \text{ cm}^2} = 11,53 \text{ kN/cm}^2$$

c) zulässige Spannung S235 = 23,5 kN/cm² ⇒ alle Spannungen sind im zulässigen Bereich

d) Verlängerung des Pendelstabs: $E_{\text{Stahl}} = 210\,000 \text{ N/mm}^2 = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$

$$EA = E_{\text{Stahl}} \cdot A_{\text{Pendelstab}}$$

$$\Delta l = \frac{N}{EA} \cdot l = \frac{81,5 \text{ kN}}{21\,000 \text{ kN/cm}^2 \cdot \frac{9}{4} \pi \text{ cm}^2} \cdot 200 \text{ cm} \approx 0,11 \text{ cm} \hat{=} \underline{1,1 \text{ mm}}$$

Durchbiegung:

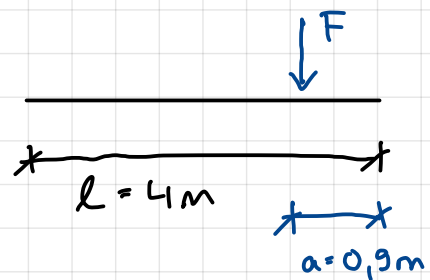
$$EI = 3830 \text{ cm}^4 \cdot 21\,000 \text{ kN/cm}^2 \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{(100 \text{ cm})^2} = 8043 \text{ kNm}^2$$

aus Einzellast:

1.1.1 Träger auf zwei Stützen, $\alpha = a/l$, $\beta = b/l$

$El = \text{konst.}$ 	Auflagerkräfte 	M-Linie 	Biegelinie
$\frac{F}{2}$ 	βF αF	$\alpha \beta F l$ bei $\xi_0 = \alpha$	$\alpha \leq \frac{1}{2}$: $\frac{3-4\alpha^2}{48EI} \alpha F l^3$

weil $\alpha \leq \frac{1}{2}$ sein muss:



$$\Rightarrow \alpha = \frac{a}{l} = \frac{0,9}{4} = 0,225$$

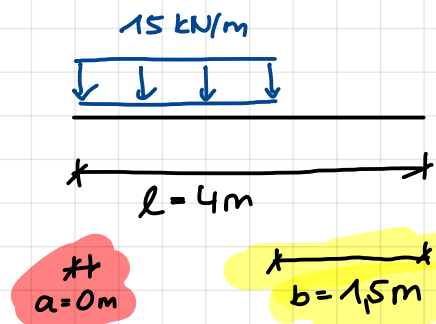
$$w_{\text{Mitte}} = \frac{3-4\alpha^2}{48 \cdot EI} \cdot \alpha \cdot F \cdot l^3$$

$$= \frac{3-4 \cdot 0,225^2}{48 \cdot 8043} \cdot 0,225 \cdot 90 \cdot 4^3 = 9,39 \cdot 10^{-3} \text{ m} \hat{=} \underline{9,39 \text{ mm}}$$

aus Streckenlast:

Träger auf zwei Stützen (Fortsetzung), $\alpha = a/l$, $\beta = b/l$, $\gamma = c/l$

$EI = \text{konst.}$ 	Auflagerkräfte 	M-Linie 	Biegelinie
$F = qc$ 	$A = \varepsilon F$ $B = \delta F$	$\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \delta \varepsilon Fl$ bei $\xi_0 = \alpha + \gamma \varepsilon$	$\left[\frac{5}{8} - (1,5 - \alpha^2) \alpha^2 - (1,5 - \beta^2) \beta^2 \right] \frac{ql^4}{48EI}$ wenn $\alpha \leq 0,5$ und $\beta \leq 0,5$
$\delta = \alpha + \gamma/2$, $\varepsilon = 1 - \delta$			



$$\Rightarrow \alpha = \frac{0 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 0$$

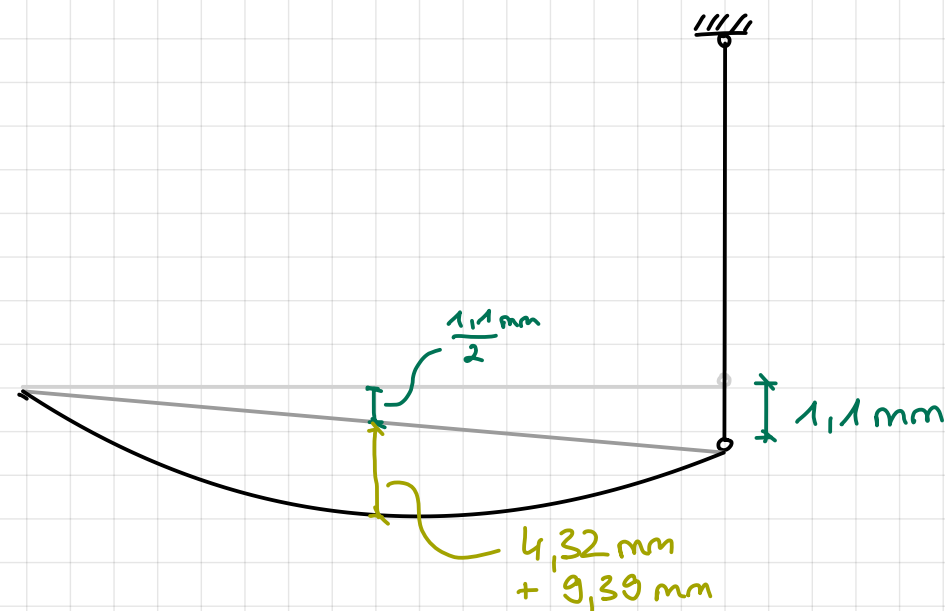
$$\beta = \frac{1,5 \text{ m}}{4 \text{ m}} = \frac{3}{8}$$

$$w_{\text{Mitte}} = \left[\frac{5}{8} - (1,5 - \alpha^2) \alpha^2 - (1,5 - \beta^2) \beta^2 \right] \cdot \frac{q \cdot l^4}{48 EI}$$

weil $\alpha = 0$

$$= \left[\frac{5}{8} - (1,5 - \left(\frac{3}{8}\right)^2) \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \right] \cdot \frac{15 \cdot 4^4}{48 \cdot 8043} \approx 4,32 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx \underline{\underline{4,32 \text{ mm}}}$$

Verformung in Feldmitte:



Gesamtverformung:

$$w_{\text{Mitte, gesamt}} = \frac{1,1 \text{ mm}}{2} + 9,39 \text{ mm} + 4,32 \text{ mm} = \underline{\underline{14,26 \text{ mm}}}$$