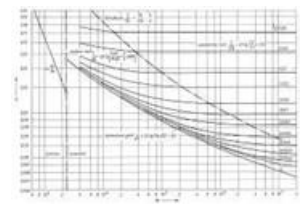
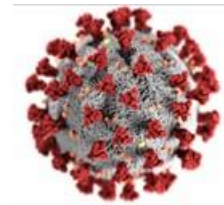
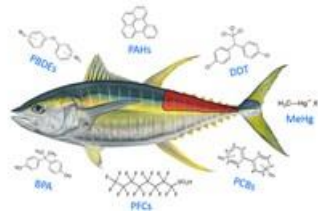
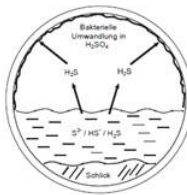
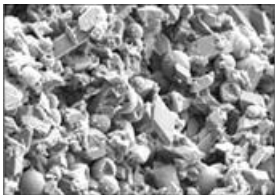


Bachelor Infrastruktur

Vorlesung und Übung: Naturwissenschaftliche Grundlagen

Prof. Dr. Welker, Frankfurt University of Applied Sciences



Naturwissenschaftliche Grundlagen

1. Physikalische Grundlagen (Wasser)

1.1 Hydrostatik/ Hydrodynamik

- Hydrostatik
 - Schweredruck (Fluide und Gase)
 - Auftrieb

- Hydrodynamik
 - Bernoulli
 - GMS

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck

„Maß des **Widerstandes**, den Materie einer **Verkleinerung** ihres Raumes entgegensetzt.“

Wirken einer Kraft F senkrecht zur Fläche A

$$p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A}$$

m [kg]; g : 9,81 [m/s²]; F [N]; A [m²]

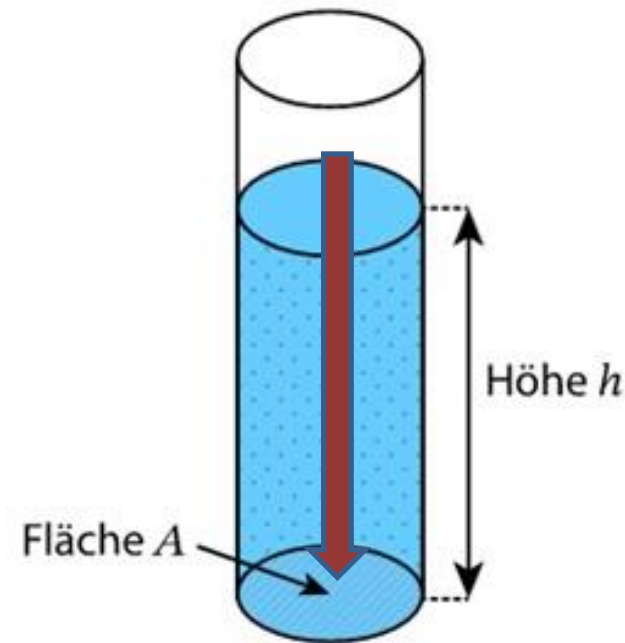


Abb. 1 Schweredruck am Boden einer Wassersäule

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck

Umrechnen Einheiten Druck

- SI-Einheit Pascal (Pa), aber auch: N/m^2 ; bar; mWS
- $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$
- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 100.000 \text{ Pa}$
- $1 \text{ mWS} = 9.807 \text{ Pa} = 0,1 \text{ bar}$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck

	bar	mbar	Pa (N/m ²)	kPa (kN/m ²)	Torr mmHg (0 °C)	mWs (4 °C)	at kp/cm ²	inch Hg (0 °C)	inch H ₂ O (4 °C)	PSI lb/inch ²	atm
bar	1	1000	100000	100	750,062	10,1972	1,01972	29,53	401,463	14,5038	0,986923
mbar	0,001	1	100	0,1	0,750062	0,0101972	0,00101972	0,02953	0,401463	0,014504	0,000986923
Pa (N/m ²)	0,00001	0,01	1	0,001	0,007501		1,01972 x 10 ⁻⁵	0,0002953	0,004015	0,000145038	9,86923 x 10 ⁶
kPa (kN/m ²)	0,01	10	1000	1	7,501	0,10197	0,010197	0,2953	4,015	0,145038	0,00986923
Torr mmHg	0,00133322	1,33322	133,322	0,133322	1	0,0135951	0,00135951	0,03937	0,53524	0,019337	0,00131579
mWs (4 °C)	0,098067	98,0665	9806,65	9,80665	73,5559	1	0,1	2,8959	39,3701	1,42233	0,096784
at kp/cm ²	0,980665	980,665	98066,5	98,0665	735,559	10	1	28,959	393,701	14,2233	0,967841
inch Hg (0 °C)	0,033864	33,8639	3386	3,386	25,4	0,345316	0,034532	1	13,5951	0,491154	0,033421
inch H ₂ O (4 °C)	0,00249089	2,49089	249,089	0,249089	1,86832	0,0254	0,00254	0,073556	1	0,03613	0,002458
PSI lb/inch ²	0,06895	68,9476	6894,76	6,89476	51,7149	0,70307	0,070307	2,03602	27,68	1	0,068046
atm	1,01325	1013,25	101325	101,325	760	10,3323	1,03323	29,921	406,78	14,6959	1

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

Herleitung

Der Druck wird definiert als Gewichtskraft F_G pro Fläche A .

Die Gewichtskraft F_G der Flüssigkeit = Masse m · Erdbeschleunigung g

$$p = \frac{F_G}{A} = \frac{m \cdot g}{A}$$

Die Masse m der Säule ergibt sich aus dem Produkt von Volumen V und Dichte ρ der Flüssigkeit: $m = V \cdot \rho$

$$p = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{A}$$

Das Volumen berechnet man mit $V = A \cdot h$

→ **Schweredruck p :**

$$p = \frac{\rho \cdot g \cdot \cancel{A} \cdot h}{\cancel{A}} = \rho \cdot g \cdot h$$

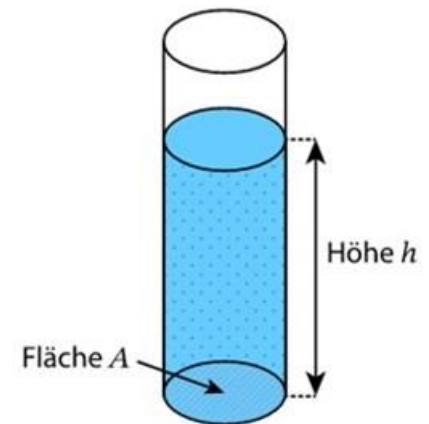


Abb. 1 Schweredruck am Boden einer Wassersäule

Naturwissenschaftliche Grundlagen

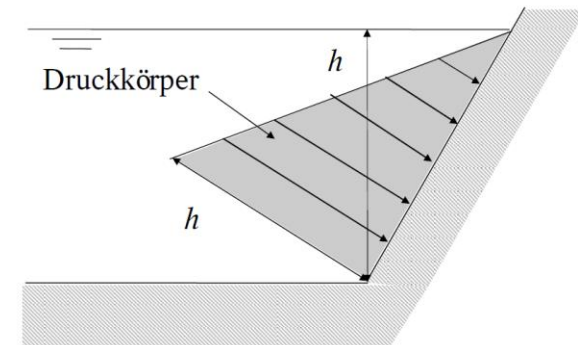
Schweredruck, Flüssigkeiten

Pascalsches Gesetz (Druckausbreitungsgesetz):

- An einem Ort innerhalb einer **ruhenden Flüssigkeit** wirkt der Druck in allen Richtungen mit **gleichem Betrag**.
- Der **Flüssigkeitsdruck** wirkt immer **senkrecht** auf das gedrückte Flächenelement.

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

ρ [kg/m³]; $g = 9,81$ [m/s²]; h [m];
 p [Pa]; p_0 : Atmosphärendruck [100.000 Pa]



Der **Wasserdruck p** nimmt **linear** mit der **Wassertiefe h** zu.
Der **Wasserdruck p** bleibt in einer **Horizontalebene konstant (h ändert sich nicht)**.

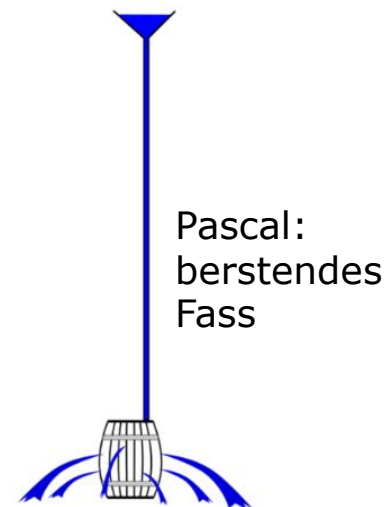
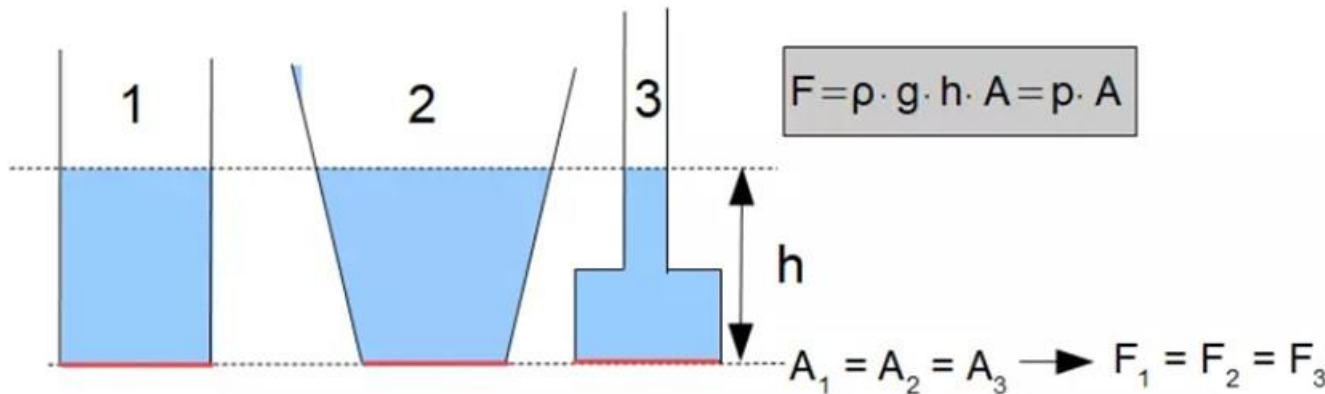
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

Hydrostatisches Paradoxon: Druck p am Boden des Gefäßes ist überall gleich, obwohl Fluidmassen unterschiedlich

Flächen A gleich $\rightarrow$ Druckkraft $F = p \cdot A$ gleich

Druck einer Flüssigkeitssäule wirkt **unabhängig von Form oder Querschnitt**, nur von der **Füllhöhe h** abhängig

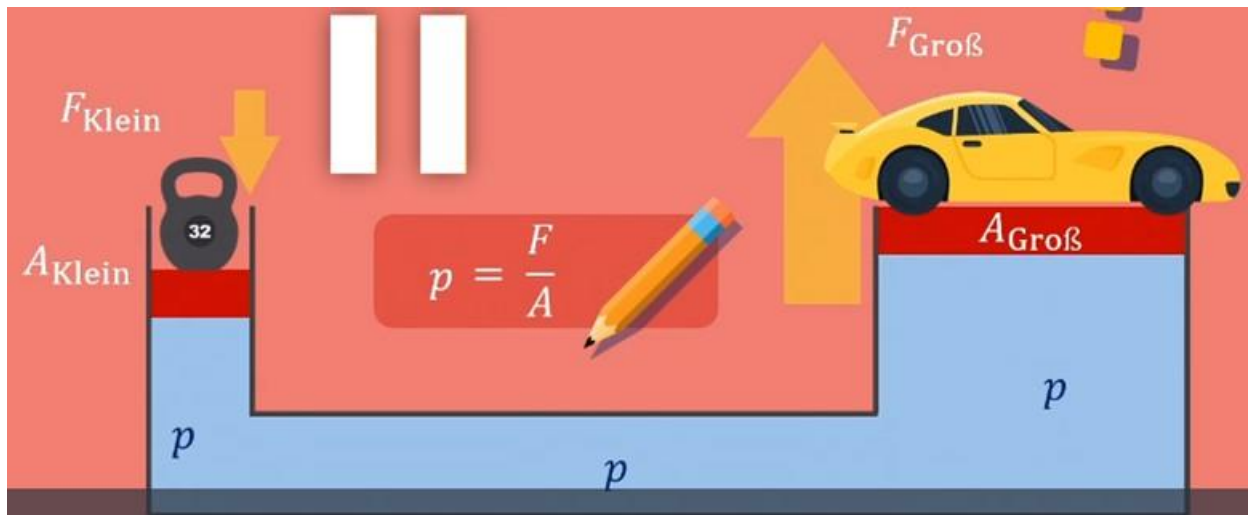


Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

Pascalsches Gesetz: Anwendung hydraulische Hebebühne

$$p = \frac{F}{A} \rightarrow \frac{F_{\text{klein}}}{A_{\text{klein}}} = \frac{F_{\text{groß}}}{A_{\text{groß}}}$$

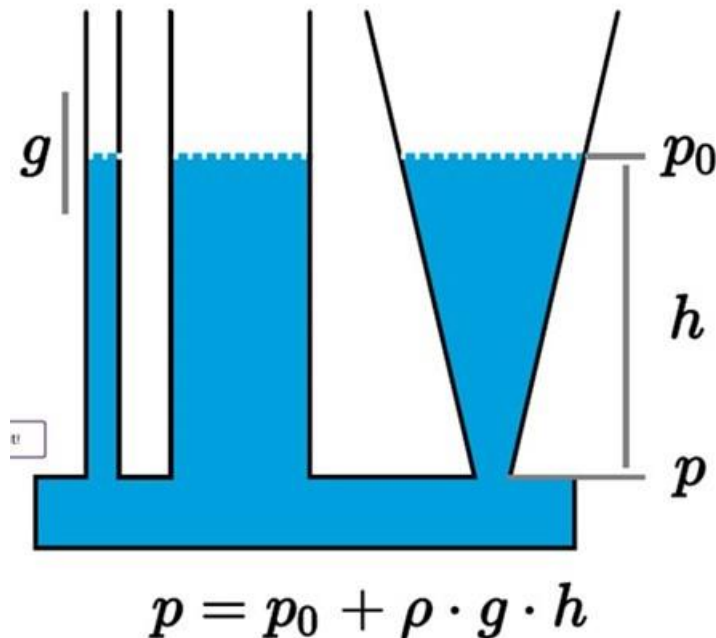


p überall gleich

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

kommunizierende Röhren: Wasserstand h unabhängig von Querschnittsfläche und Form



p_0 ist z.B. der
Atmosphärendruck

da ρ , g und p_0 gleich
→ Wasserstand h gleich

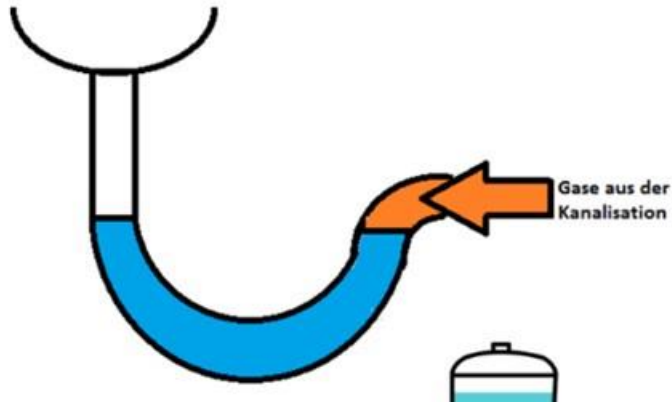
<https://www.leifiphysik.de/mechanik/druck-und-auftrieb/grundwissen/schweredruck>

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

Anwendung kommunizierende Röhren:

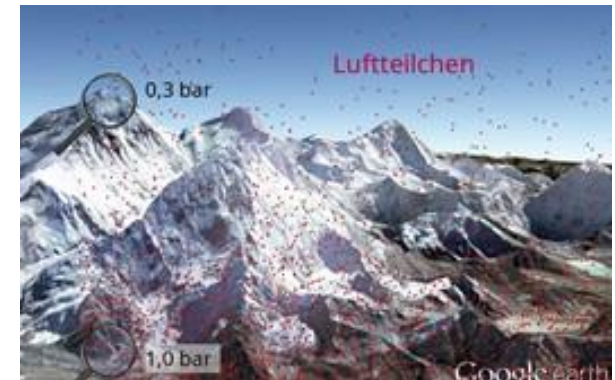
- Geruchsverschlüsse Siphons
- Wassertürme (Sicherstellung Wasserdruck in Gebäuden)



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Gase

- **Druck** von Luft nimmt infolge **Schwerkraft (Luftmasse auf Flächenelement wird größer) mit der Tiefe zu**
- aber nicht **linear wie bei Flüssigkeiten**
- **Unterschied zu Flüssigkeiten**, da sich in Gasen (z.B. Luft) die **Dichte** mit der Tiefe infolge der **Kompressibilität der Gase** erheblich **erhöht**.



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Gase

Druck von Luft nimmt **mit der Höhe ab** (Luftmasse auf Flächenelement wird kleiner) → **Barometrische Höhenformel (bei T= konst.)**

h_0 : Bezugshöhe; h : Höhe

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-h/h_0}$$

$$h = h_0 \cdot \ln \left(\frac{p_0}{p} \right)$$

Nutzung bei
Höhenbestimmung
durch Messung Druck p

Beispiel:

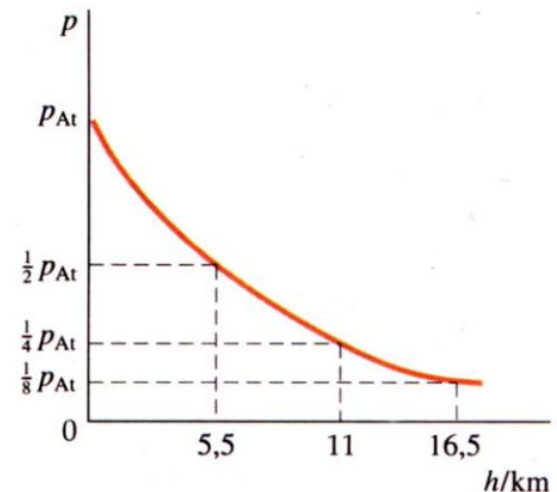
Meeresniveau h_0 : 0 m; $p_0 = 101.325$ Pa

2.000 m: $p = \text{ca. } 78.000$ Pa

5.500 m: $p = \text{ca. } 50.662$ Pa

11.000 m: $p = \text{ca. } 25.331$ Pa

Luft- oder Atmosphärendruck:
veränderlich (**Höhe/ Wetterlage**)



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Gase

- **Flüssigkeitsbarometer zur Messung Luftdruck (Torricelli: 1608–1647)**
- **Vakuum** (kein Gas, das Druckkräfte erzeugt)
 - $p_0 = 0$ über Quecksilber
 - Luftdruck p_L an Höhe h der Quecksilbersäule über der Linie A-B ablesbar

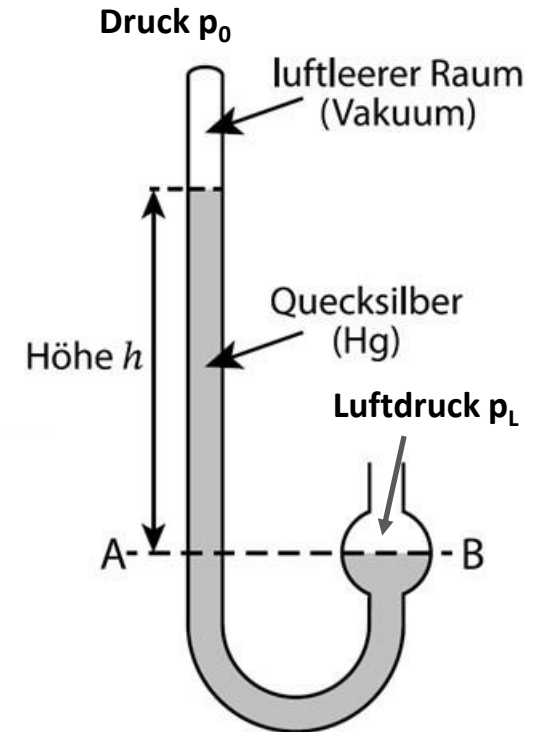


Abb.
Flüssigkeitsbarometer
nach Torricelli

pixabay license / Ernesto Orihuela via pixabay

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Gase

- **Flüssigkeitsbarometer zur Messung Luftdruck (Torricelli: 1608–1647)**
- **Normaldruck Luft bei Quecksilber Hg:**
 $h = 750 \text{ mm (7,5 cm) Hg} = 750 \text{ Torr} = 1 \text{ atm}$
 $= 1 \text{ bar} = 1.000 \text{ mbar} = 100.000 \text{ Pa}$
- **Einheit Torr** noch heute Anwendung bei **Blutdruckmessung**
- **Normaldruck Luft bei Wasser H₂O:**
 $h = 10.000 \text{ mm (10 m) H}_2\text{O}$

Ursache: unterschiedliche Dichte von Hg und H₂O

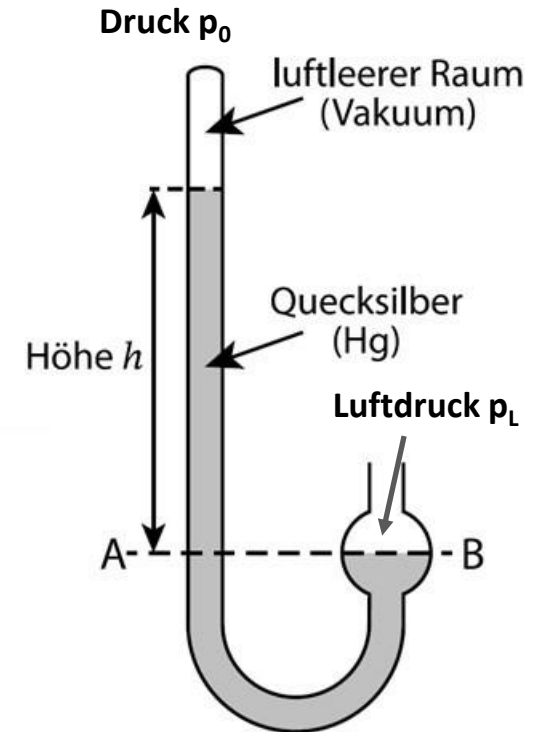


Abb.
Flüssigkeitsbarometer
nach Torricelli

pixabay license / Ernesto Orihuela via pixabay

Naturwissenschaftliche Grundlagen

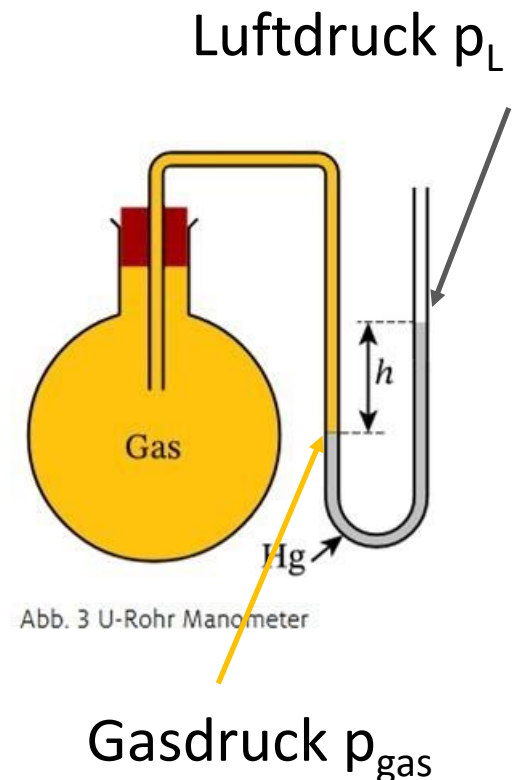
Druck, Schweredruck Gase

offenes U-Rohr-Manometer: Messung von Druckänderungen oder Druckunterschieden (hier: Unterschied Luftdruck zu Gasdruck)

Hinweis: Die Dichte von Quecksilber (Hg) beträgt

$$\rho = 13,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

a) Berechnen Sie, wie groß der Unterschied zwischen **Gas**druck und **Luft**druck ist, wenn $h = 37 \text{ mm}$ ist.



pixabay license / Ernesto Orihuela via pixabay

Naturwissenschaftliche Grundlagen

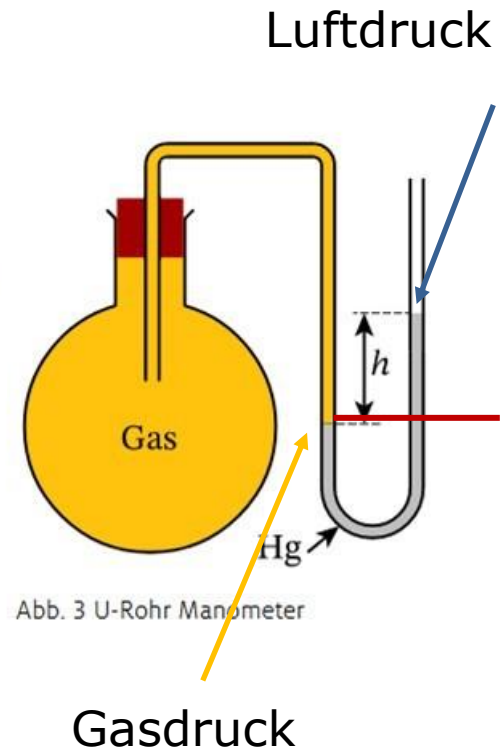
Druck, Schweredruck Gase

Der Druck p_{Hg} am Boden (Bezugspunkt rote Linie) einer Quecksilbersäule der Höhe h beträgt

$$p_{\text{Hg}} = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow p_{\text{Hg}} = 13,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,037 \text{ m} = 4,9 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Der **Unterschied** zwischen dem **Gasdruck** und dem **Luftdruck** ist

$$p_{\text{Hg}} = 4,9 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 4.900 \text{ Pa} = 49 \text{ hPa}$$



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck Gase

b) Berechnen Sie, wie groß der **Gasdruck** p_{Gas} ist, wenn der Luftdruck $p_L = 925 \text{ hPa}$ (oft ca. 1.000 hPa) ist.

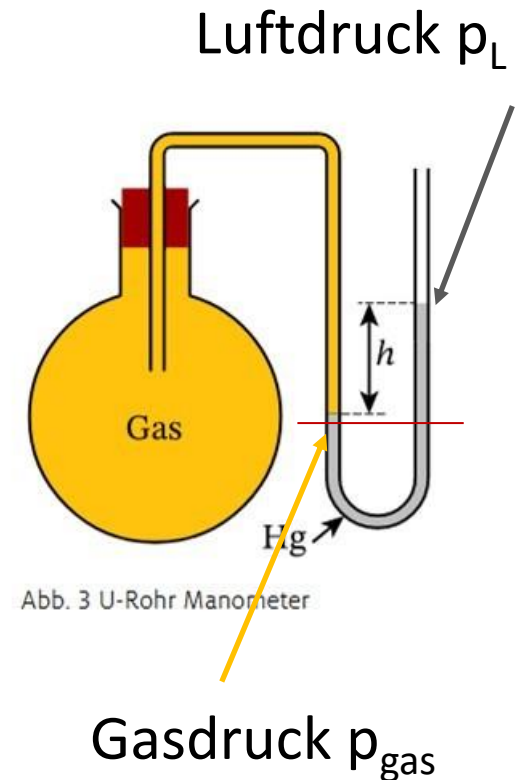
Hinweis: $1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$

Es gilt **$p_{\text{Gas}} = p_L + p_{\text{Hg}}$**

da Gasdruck > Luftdruck

$p_{\text{Hg}} = 49 \text{ hPa}$

$p_{\text{Gas}} = 925 \text{ hPa} + 49 \text{ hPa} = 974 \text{ hPa} = 97.400 \text{ Pa}$



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Auftriebskraft

- **Auftriebskräfte** wirken auf Körper, die ganz oder teilweise in eine **Flüssigkeit** eingetaucht sind.
- Ein eingetauchter Körper erfährt einen **senkrecht** nach oben gerichteten **Auftrieb**.
- Die **Auftriebskraft** F_A entspricht der **Gewichtskraft** F_G der **verdrängten Flüssigkeit**, somit abhängig vom **Volumen (nicht von der Masse) des Körpers**.
- Auftrieb ist **unabhängig** von der **Eintauchtiefe** in der Flüssigkeit.

$$F_A = F_{G \text{ von Fluid}}$$

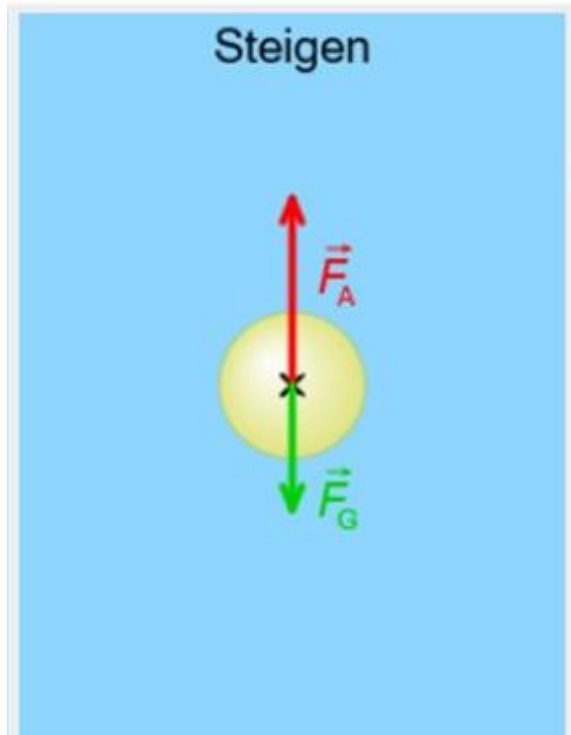
Gesetz des Archimedes

$$F_A = m_{\text{von Fluid}} \cdot g$$

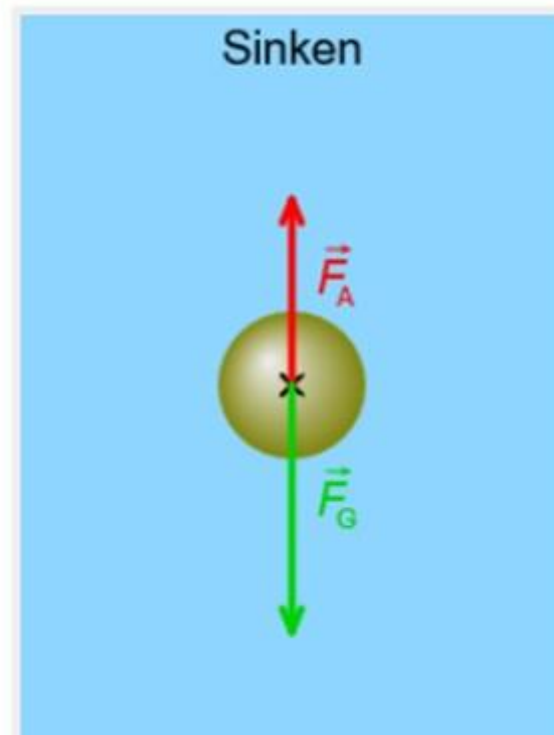
$$F_A = \rho_{\text{Fluid}} \cdot V_K \cdot g$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck, Auftriebskraft



$$F_A > F_G$$



$$F_A < F_G$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Auftriebskraft

Beispiel: Eis hat bei 0° die Dichte $\rho = 0,9168 \text{ kg/l}$



Ein **würfelförmiger Eisblock** von der Kantenlänge 10 m schwimmt in **Wasser** der Dichte $\rho = 1,000 \text{ kg/l}$

- a) Wie viel **%** schaut heraus?
- b) Sinkt der Eisblock in **Spiritus** (geringere Dichte) oder **Zuckerwasser** (größere Dichte) tiefer ein?
- c) Wenn man den Eisblock komplett unter Wasser taucht und loslässt, mit welcher **Kraft** wird er nach oben gedrückt? Eine Skizze der Kräfte (Auftrieb und Gewichtskraft) und Überlegungen zu deren Ursache sind hilfreich.

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Auftriebskraft

Lösung:

a) Ansatz Schwimmen: $F_G = F_A$

$$m \cdot \cancel{g} = \rho_w \cdot V_{\text{einget}} \cdot \cancel{g}$$

$$\rho_{\text{Eis}} \cdot V_{\text{ges}} = \rho_w \cdot V_{\text{einget}}$$

$$\rho_{\text{Eis}} / \rho_w = V_{\text{einget}} / V_{\text{ges}}$$

$$0,9168 \text{ kg/l} / 1 \text{ kg/l} = 0,91$$



→ d.h. **91 % des Eisbergs sind unter Wasser, 9 % über Wasser**
(Ursache Titanic Untergang)

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Auftriebskraft

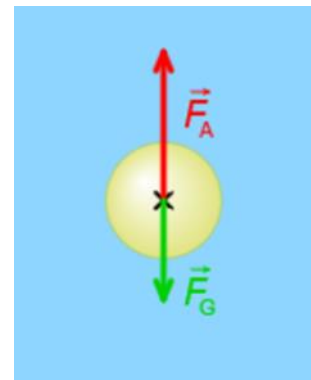
b) Bei **Spiritus (geringere Dichte, Süßwasser)** muss mehr verdrängt werden um die gleiche Masse zu erhalten, also sinkt der Eisblock **tiefer**. Im **Zuckerwasser (höhere Dichte, Salzwasser)** umgekehrt.

c) Wenn der **Eisblock komplett unter Wasser** ist, verdrängt er ein Volumen V_{einget} von $10 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 1.000 \text{ m}^3 = 1.000.000 \text{ l}$ **Wasser**, das ca. $1.000.000 \text{ kg}$ wiegt
→ Auftriebskraft F_A

$$F_A = \rho_w \cdot V_{\text{einget}} \cdot g = m \cdot g = 1.000.000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = \mathbf{9.810.000 \text{ N}}$$

$$F_{G, \text{Eisblock}} = m \cdot g = 916.800 \text{ kg (mit } V_{\text{einget}} 1.000.000 \text{ l} \cdot \rho = 0,9168 \text{ kg/l)} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = \mathbf{8.999.381 \text{ N}}$$

$$F_{\text{ges}} = 9.810.000 \text{ N} - 8.999.381 \text{ N} = \mathbf{810.619 \text{ N} = 811 \text{ kN}}$$



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck, Auftriebskraft

Bei einem **schwimmenden Körper** ist die **Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft** ($F_A = F_G$)

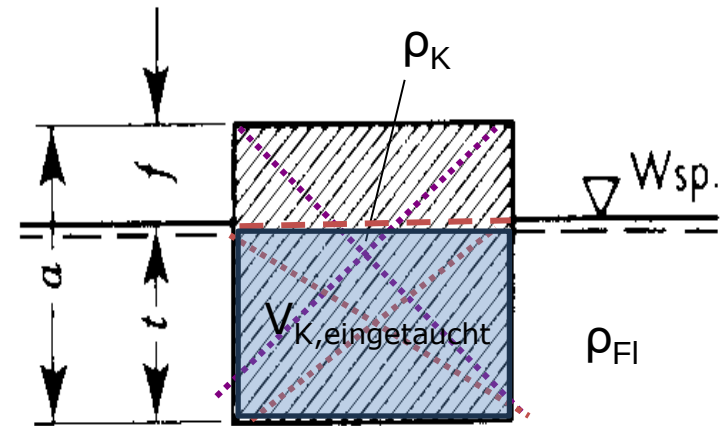
- **Eintauchtiefe t**
- **Freibord f** (Höhe über Wasserspiegel)
- **Höhe a = Eintauchtiefe t und Freibord f**

$$F_G = F_A$$

$$m_K \cdot g = \rho_w \cdot V_{K,\text{eingetaucht}} \cdot g$$

$$\rho_K \cdot V_K \cdot g = \rho_w \cdot A \cdot t \cdot g$$

$$\rho_K \cdot \cancel{A} \cdot a \cdot g = \rho_w \cdot \cancel{A} \cdot t \cdot g$$



$$t = a \cdot \frac{\rho_K g}{\rho_{Fl} g}$$

$$f = a - t$$

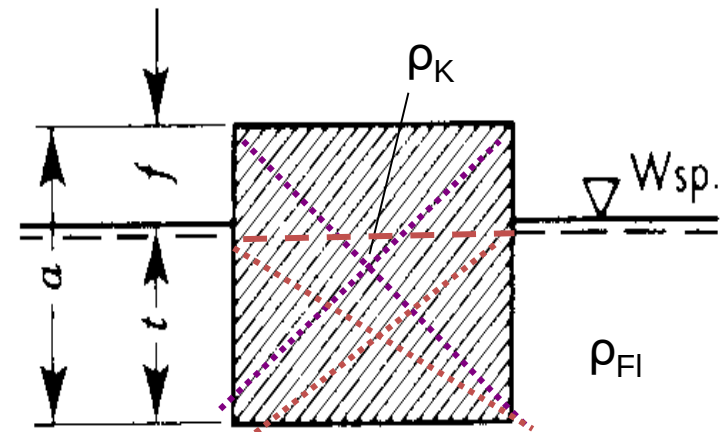
$V_{K,\text{eingetaucht}}$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck, Auftriebskraft

Floß: schwimmender Körper

- **Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft ($F_A = F_G$)**
- **Daten Floß:**
 - Breite B : 3 m, Länge L : 5 m, Höhe a : 1,5 m
 - Masse Floß $m_{\text{Floß}}$: 2.800 kg
 - Dichte Wasser ρ_w : 1.000 kg/m³
- **Wie tief sinkt das Floß durch das Eigengewicht in das Wasser ein (Eintauchtiefe t)?**



$$f = a - t$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck, Auftriebskraft

Floß: schwimmender Körper

- **Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft ($F_A = F_{G, \text{Floß}}$)**

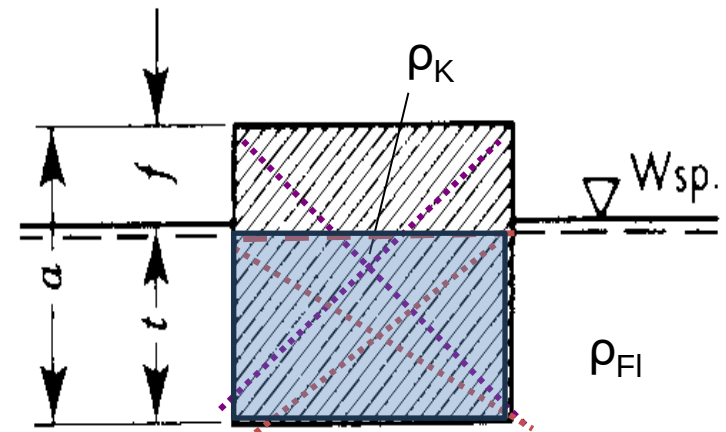
- $F_{G, \text{Floß}} = m_{\text{Floß}} \cdot g$
- $F_A = \rho_w \cdot V_{\text{einget}} \cdot g$

$$\rightarrow m_{\text{Floß}} \cdot g = \rho_w \cdot V_{\text{einget}} \cdot g$$

$$\text{mit } V_{\text{einget}} = L \cdot B \cdot t = \boxed{A \cdot t}$$

$$\rightarrow m_{\text{Floß}} \cdot g = \rho_w \cdot \boxed{A \cdot t} \cdot g$$

Auflösung nach t



$$f = a - t$$

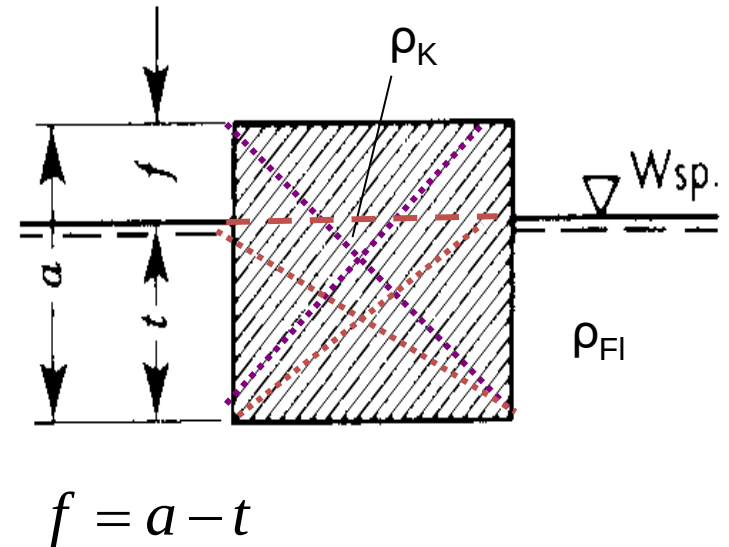


Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck, Auftriebskraft

$$t = \frac{m_{\text{Floß}} \cancel{g}}{A_{\text{Floß}} \cdot \rho_W \cdot \cancel{g}} = \frac{m_{\text{Floß}}}{A_{\text{Floß}} \cdot \rho_W}$$

$$t = \frac{2.800 \text{ kg}}{(3 \text{ m} \cdot 5 \text{ m}) \cdot 1.000 \text{ kg/m}^3} = 0,187 \text{ m}$$



Eintauchtiefe Floß $t = 0,187 \text{ m}$

Es ragt noch mit **Freibord $f = 1,313 \text{ m}$** aus dem Wasser heraus.
 mit $f = a - t = 1,5 \text{ m} - 0,187 \text{ m}$)

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck, Auftriebskraft

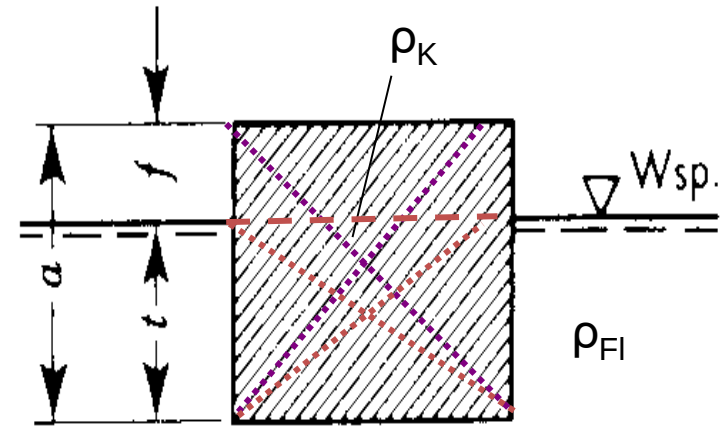
Hinweis für weitere Anwendungen:

1. Berechnung Eintauchtiefe t mit

Dichteangaben ρ_K und ρ_{Fl} sowie Höhe a
(siehe Seite 30)

$$\rho_K \cdot \cancel{A} \cdot a \cdot g = \rho_w \cdot \cancel{A} \cdot t \cdot g$$

dann keine **Flächenangabe** notwendig!



$$f = a - t$$

2. Berechnung zulässige Zuladung ($m_{Zuladung}$) Angabe Freibord f

- Ermittlung Eintauchtiefe $t = a - f$
- Umstellung der Formel nach $m_{Flo\beta} = m_{Flo\beta, ohne Zuladung} + m_{Zuladung}$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Die Hydrodynamik ist Teil der Strömungslehre, die sich mit der **Bewegung von Flüssigkeiten** (Hydrodynamik) und **Gasen** (Aerodynamik) beschäftigt.

Zentrale Größen zur **Beschreibung von Strömungen** sind

- die Geschwindigkeit v
- der Druck p
- die Dichte ρ
- die Temperatur T und
- die Viskosität ν

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Kontinuitätsgesetz/ Massenerhaltung

Geschwindigkeit v

$$\frac{s}{t} = v$$

$$s = v \cdot t$$

Dichte ρ

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = \rho \cdot s \cdot A$$

$$m = \rho \cdot v \cdot t \cdot A$$

Die Größe $\frac{dm}{dt} = \rho \cdot v \cdot A$ bezeichnet man als **Massenstrom**.

Bei einer **stationären Strömung** ist wegen der **Massenerhaltung** der **Massenstrom** an allen Querschnittsflächen **konstant**.

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho \cdot v_2 \cdot A_2$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Kontinuitätsgesetz/ Massenerhaltung

inkompressible Flüssigkeiten: Massenstrom proport. **Volumenstrom**
Dichte $\rho = m/V$ des Massenstroms jeweils gleich

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho \cdot v_2 \cdot A_2$$

$$\frac{dV}{dt \cdot \rho} = \cancel{\rho} \cdot v_1 \cdot A_1 = \cancel{\rho} \cdot v_2 \cdot A_2$$

$$\frac{dV}{dt} = Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Kontinuitätsgesetz/ Massenerhaltung

$$\frac{dV}{dt} = Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

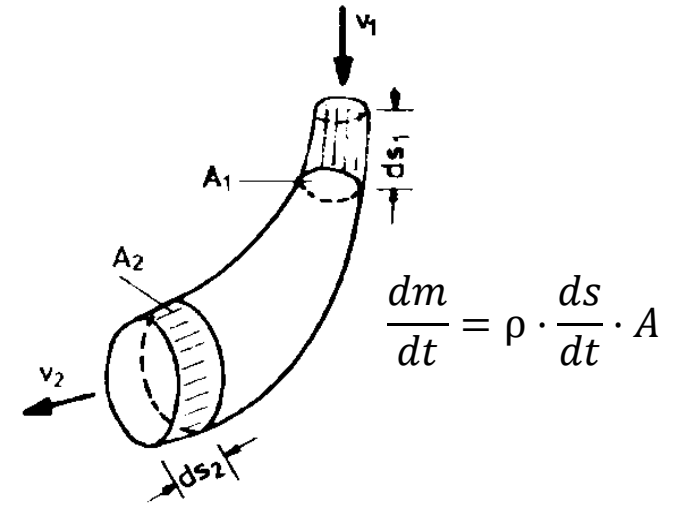


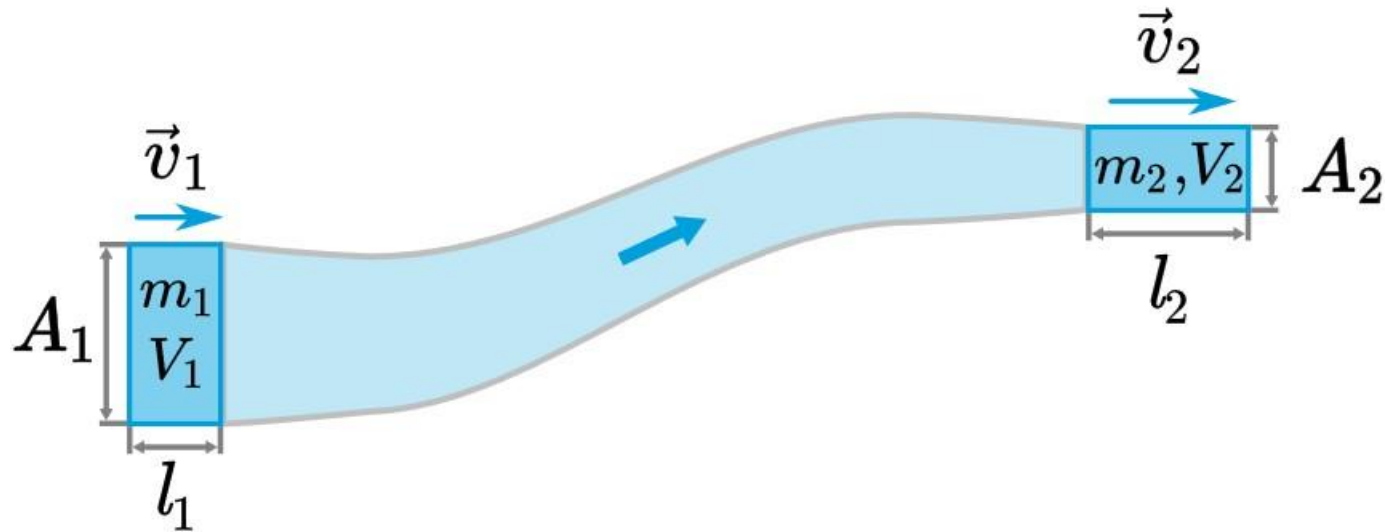
Abb. 4.2: Stromröhre

- $Q_{zu} = Q_{ab}$
- Q : Änderung des Volumens über die Zeit = **Volumenstrom**:
 $Q = dV/dt = A \cdot v \rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$
- Q steht für den **Durchfluss**, je nach „Richtung“ auch für Zu- bzw. Abfluss
- Einheit: z.B. $[m^3/s]$, $[l/s]$, $[m^3/h]$ (Längeneinheit³/Zeiteinheit)

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Massenerhaltung: was rein geht muss auch raus!



$$\frac{m}{t} = \rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho \cdot v_2 \cdot A_2$$

$$\frac{V}{t} = Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Energieerhaltung

- Die **Summe** der **Lageenergie (E_L)**, der **kinetischen Energie (E_K)** und der **Druckenergie (also der verrichteten Arbeit E_D)** entlang der Stromröhre **bleibt erhalten**.
- Die **BERNOULLI-Gleichung** liefert einen Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit v und Druck p
- gilt nur für **stationäre, verlustfreie Strömung** eines **inkompressiblen** Fluides

$$E = E_L + E_D + E_K$$

Lage-
energie

Druck-
energie

Kinetische
Energie

$$= m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot p}{\rho} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Energiegleichung

Einheit: Joule

1 J = 1 kg m²/s² = 1 N m

$$E = E_L + E_D + E_K$$

Lage-
energie Druck-
energie Kinetische
Energie

$$\text{konst.} = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot p}{\rho} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$\text{konst.} = F_G \cdot h + V \cdot p + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

1. Division durch
Masse m

$$\text{konst.} = g \cdot h + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

2. Multiplikation
mit Dichte ρ

$$\text{konst.} = \rho \cdot g \cdot h + p + \frac{\rho \cdot v^2}{2}$$

Einheit:
Pascal
bzw. N/m²

→ Druckgleichung

geodätischer
Druck

statischer
Druck

dynamischer
Druck (Staudruck)

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Energiegleichung

Einheit: Joule

1 J = 1 kg m²/s² = 1 N m

$$E = E_L + E_D + E_K$$

Lage-
energie

Druck-
energie

Kinetische
Energie

$$\text{konst.} = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot p}{\rho} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$\text{konst.} = F_G \cdot h + V \cdot p + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Division durch
Masse $m \cdot g = F_G$

→ **Höhengleichung**

$$\text{konst.} = h + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Einheit:
Höhe in m

geodätische
Höhe

Druck-
höhe

Geschwindigkeits-
Höhe
(kinetische Energie)

Piezometerhöhe
(potenzielle Energie)

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

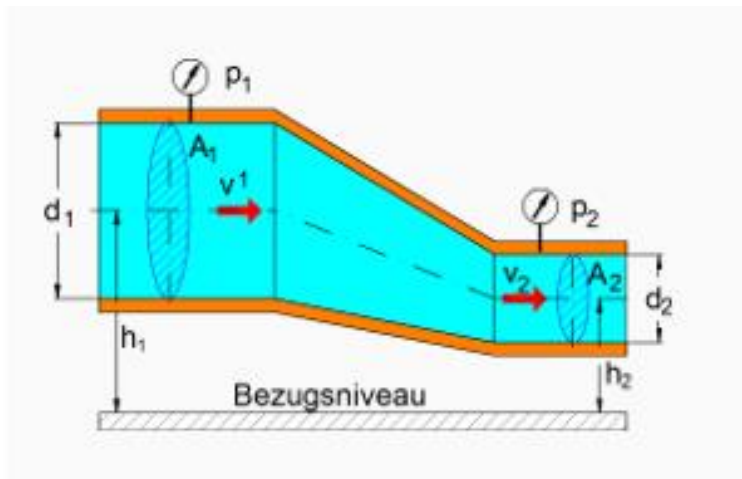
Höhengleichung

$$\text{konst.} = h + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

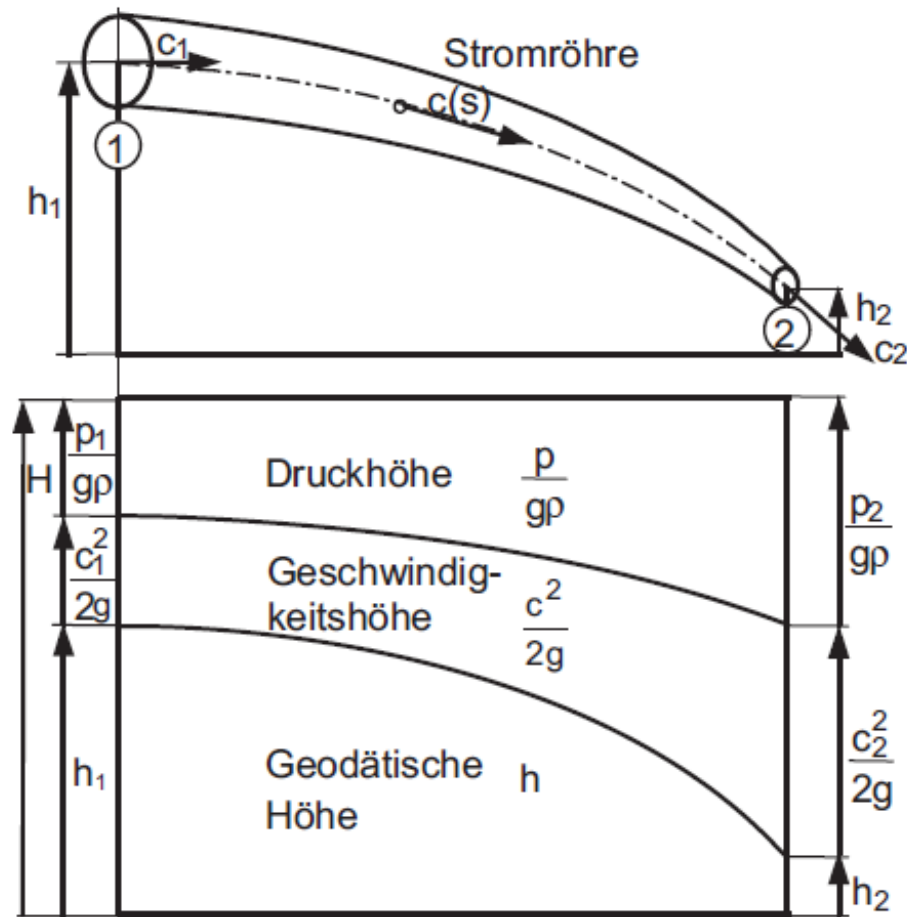
**geodätische
Höhe** **Druck-
höhe** **Geschwindigkeits-
höhe**

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

**Einheit:
Höhe in m**



v = Strömungsgeschwindigkeit (m/s)
 g = Fallbeschleunigung (m/s^2)
 h = geodätische Höhe (m)
 p = statischer Druck (Pa)
 ρ = Dichte (kg/m^3)
Index 1 bzw. 2 bezieht sich auf den jeweiligen Ort im System



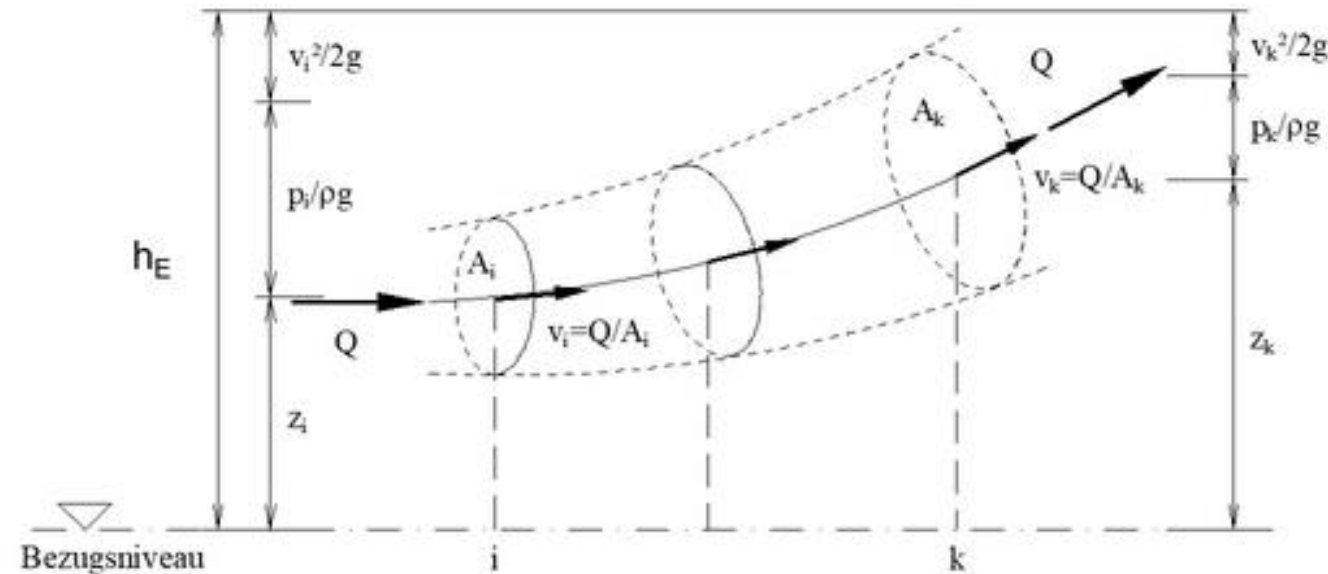
hier $v = c$!

Bild 6. Graphische Darstellung der Höhenanteile der Bernoulligleichung

$$\frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{g\rho} + h_1 = \frac{c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{g\rho} + h_2 \quad (8)$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik



$$h_E = \text{const} \Rightarrow h_{E(i)} = h_{E(k)}$$

$$z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} = z_k + \frac{p_k}{\rho g} + \frac{v_k^2}{2g}$$

Energieerhaltung

- **Lageenergie** (E_L) steigt $\rightarrow z_k$
- **kinetische Energie** (E_K) sinkt $\rightarrow$ Querschnittsaufweitung $v_k^2/2g$
- **Druckenergie** (E_D) sinkt $p_k/\rho g$
- Wegen Energieerhaltung

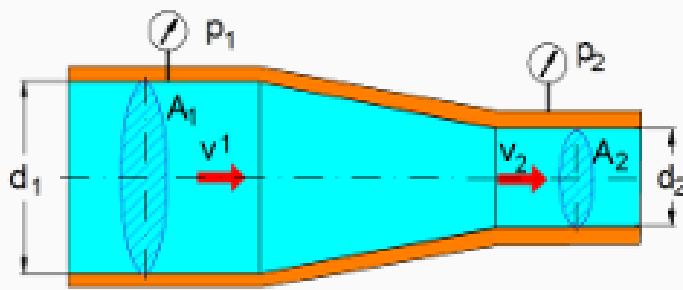
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

BERNOULLI-Gleichung bei horizontaler Rohrströmung

Hier entfällt h , da h sich nicht ändert

$$\cancel{h_1} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \cancel{h_2} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$



v = Strömungsgeschwindigkeit (m/s)

g = Fallbeschleunigung (m/s²)

p = statischer Druck (Pa)

ρ = Dichte (kg/m³)

Index 1 bzw. 2 bezieht sich auf den jeweiligen Ort im System

Naturwissenschaftliche Grundlagen

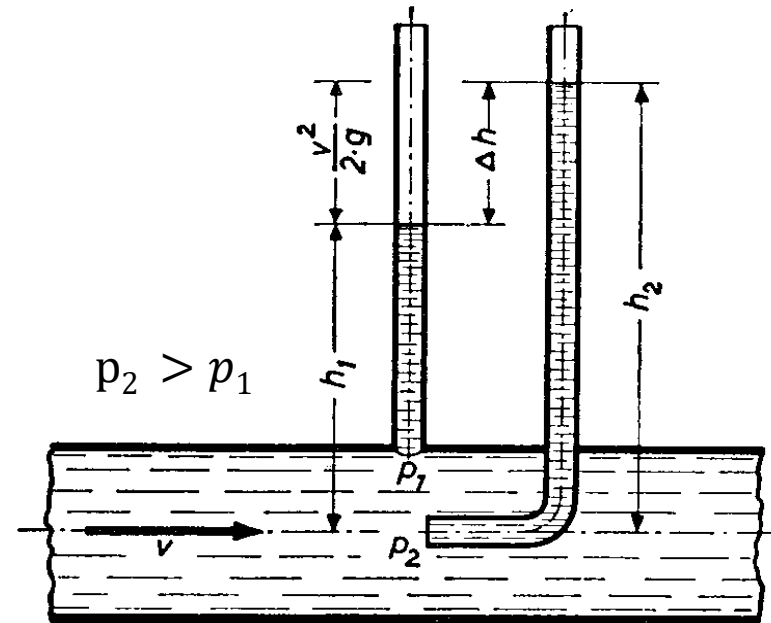
Hydrodynamik

Durchflussmessung Q [l/s] mit einem Pitotrohr BERNOULLI-Gleichung (Höhenbezug)

$$\cancel{z}_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \cancel{z}_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

Streichung z-Komponenten $\rightarrow$
horizontales Rohr

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$



Durchmesser d

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Durchflussmessung Q in einem Pitotrohr

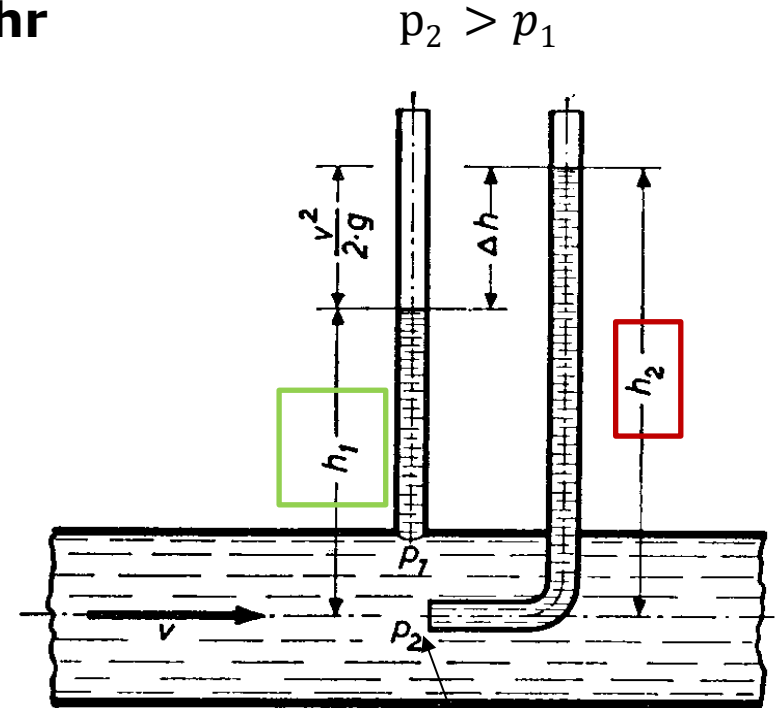
$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \cancel{\frac{v_2^2}{2 \cdot g}}$$

mit $h_1 = \frac{p_1}{\rho \cdot g}$ und $h_2 = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g}$

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = h_2$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g (h_2 - h_1)} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

$$Q = v_1 \cdot A = v_1 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$



Durchmesser d

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

$v_2=0$, Geschwindigkeitsenergie → Druckenergie (sog. Staudruck)
 $h_2 - h_1 = \Delta h$

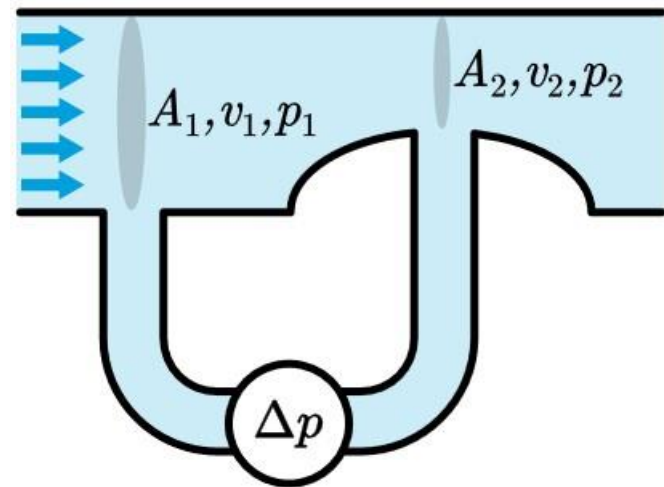
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Anwendung
Kontinuitätsgleichung
Masseerhaltung und Bernoulli:

VENTURI-Rohr: Gerät zur
Geschwindigkeitsmessung
(italienischer Physiker VENTURI
(1746 - 1822))

Auch **Durchflussmesser** basieren
auf dem Prinzip des VENTURI-
Rohrs, es gibt aber noch zahlreiche
andere technische Anwendung, die
auf diesem Prinzip basieren.



Naturwissenschaftliche Grundlagen

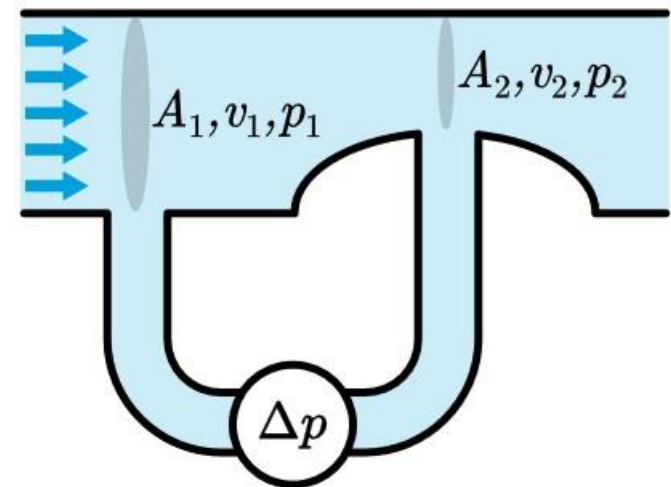
Hydrodynamik

Prinzip: Rohr mit einer Engstelle;
Druckmesser misst die **Druckdifferenz Δp**
zwischen dem Druck p_1 im weiteren Bereich
und dem Druck p_2 im engeren Bereich.

Bei bekannter Dichte des Fluids und den
Querschnittsflächen A_1 und A_2 kann man die
Strömungsgeschwindigkeit v_1 berechnen.

Kontinuitätsgleichung
(**Masseerhaltung**) für inkompressible
Fluide

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \Leftrightarrow \boxed{v_2} = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 \quad (1)$$



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

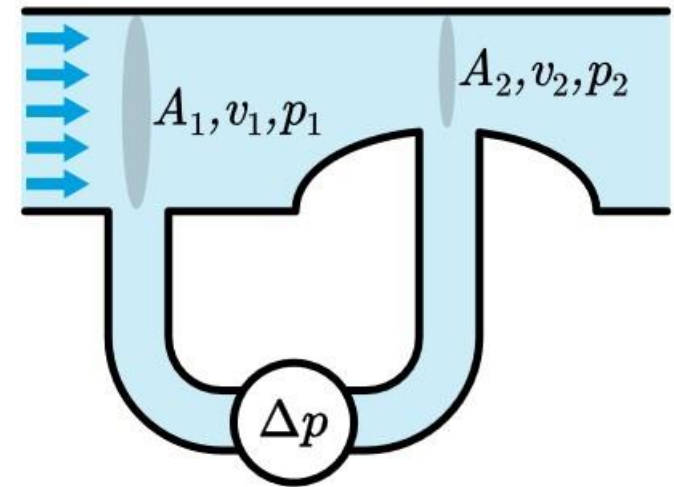
Die **BERNOULLI-Gleichung (Druckbezug; s. 43)**
für das VENTURI-Rohr lautet:

$$\text{konst.} = \cancel{\rho \cdot g \cdot h} + p + \frac{\rho \cdot v^2}{2}$$

Druck aus **Lageenergie** (geodätischer Druck) ($\rho \cdot g \cdot h$) gleich auf beiden Seiten (gleiche Bezugsebene) → **Wegstreichen**

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \boxed{v_2^2} + p_2 \quad (2)$$

Term für $\boxed{v_2}$ von Gleichung (1) in Gleichung (2) einsetzen und auflösen nach v_1 .



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 \right)^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \cdot v_1^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_1 - p_2 := \Delta p$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) \cdot v_1^2 = \Delta p$$

$$v_1^2 = \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}$$

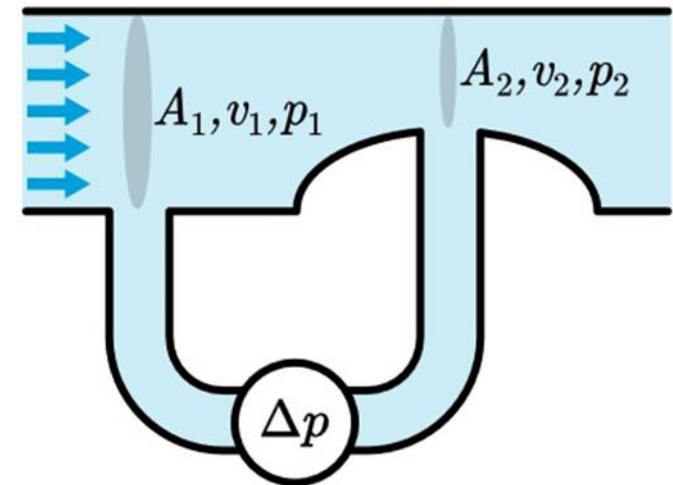
$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}}$$

Geschwindigkeit

aus Messung
Druckdifferenz und
Flächenverhältnisse

Durchfluss

$$Q = v_1 \cdot A$$



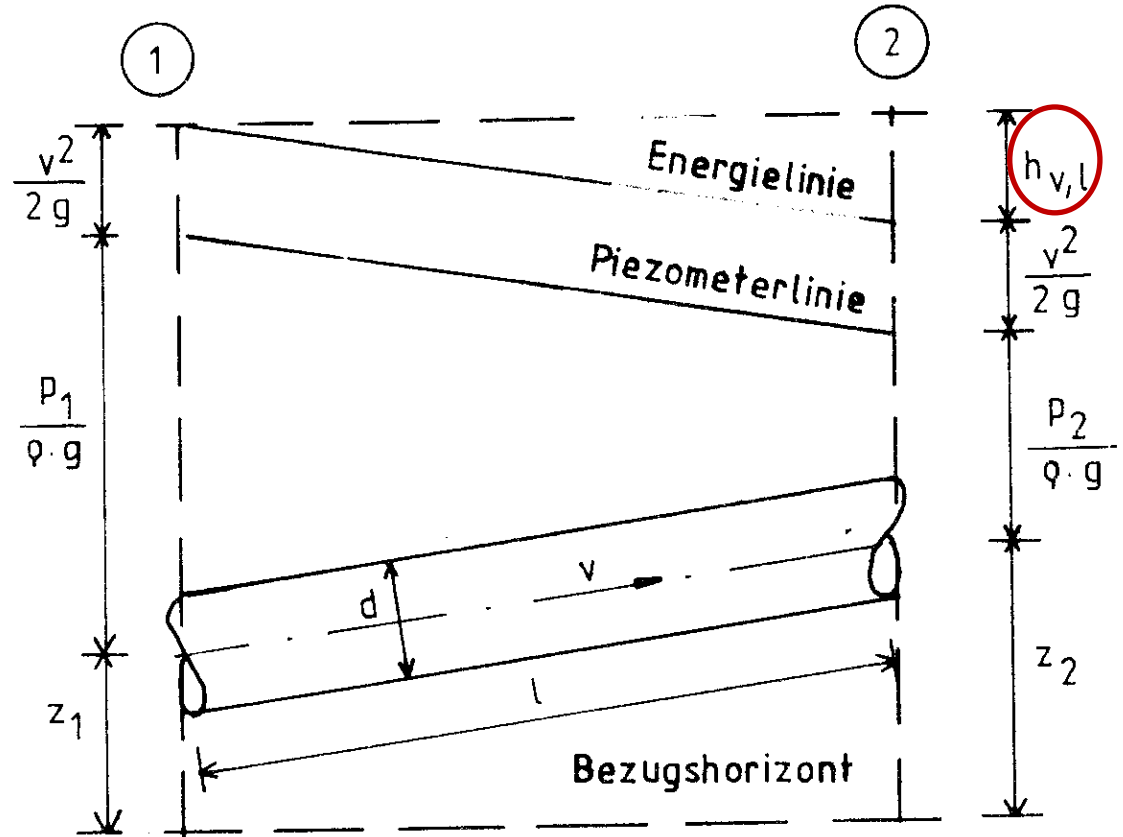
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Durch **Reibung** und Widerstände im Rohrsystem wird Energie in Wärme umgewandelt (geht dem System verloren).

→ **hydraulische kontinuierliche Verluste.**

Diese Anteile werden mit **h_v** beschrieben.



$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_v$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Kontinuierliche Verluste $h_{v,r}$ in Rohrleitungen sind:

- **proportional zur Leitungslänge L**
(längere Leitung, höhere Verluste)
- **umgekehrt proportional zum Rohrdurchmesser d**
(höherer Rohrdurchmesser, weniger Reibung/Verluste)
- **proportional zum Quadrat der Fließgeschwindigkeit v^2**
(höhere Geschwindigkeit, mehr Bewegung, mehr Wärme)

$$h_{V,r} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{Darcy-Weißbach}$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Kontinuierliche Verluste $h_{v,r}$ in Rohrleitungen:

- **Reibungsbeiwert λ**

- abhängig von der **Viskosität ν**
- abhängig vom **Fließzustand**
(Turbulenz, **Reynoldszahl $Re = v * d / \nu$**)
- abhängig von der **Beschaffenheit der Rohrwand** (k/d)
mit k = Reibungswert und d = Durchmesser

Reibungsbeiwert: **λ [-]**
(**lambda**)

λ -Wert [-] wird
iterativ mit
Graphiken bestimmt

$$h_{v,r} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{Darcy-Weißbach}$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

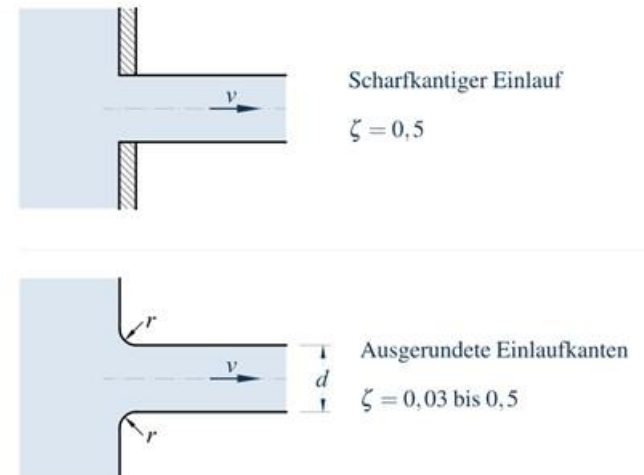
Örtliche Verluste

Verluste proportional zum **Geschwindigkeitsquadrat** ($\Delta H \sim v^2$)

- analog zu Energie**höhen** und kontinuierlichen Verlusten Angabe als Verlust**höhen** ΔH ($=h_{v,\ddot{o}}$)
- Verlustbeiwerte (ζ -Werte) **empirisch ermittelt**, Messreihen im Labor
- Örtliche Verluste bei Querschnittserweiterung/-verengung, Krümmern, Armaturen, Absperrorganen, Drosseln, Rohrverzweigungen und -vereinigungen

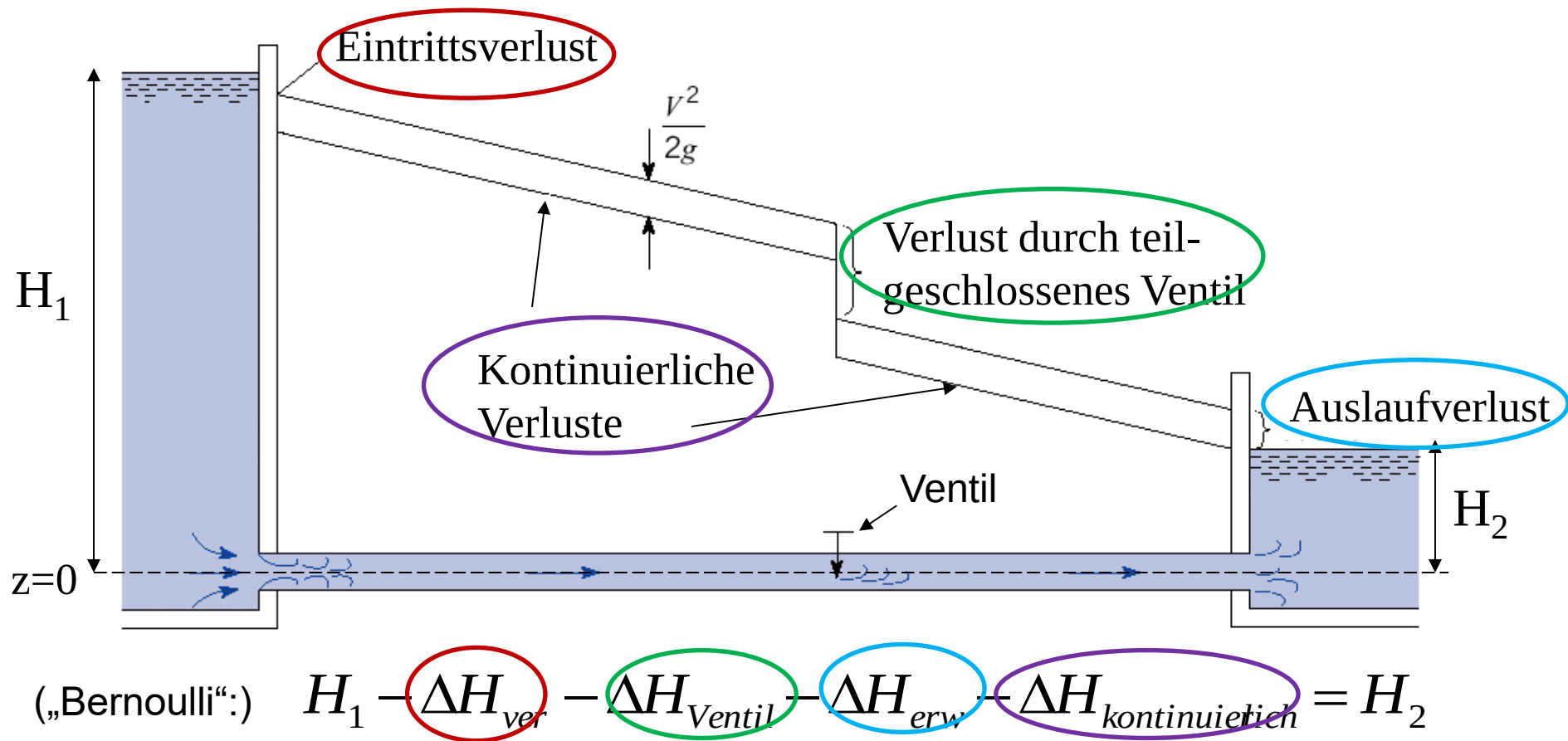
$$h_{v,\ddot{o}} = \Delta H = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Verlustbeiwert zeta

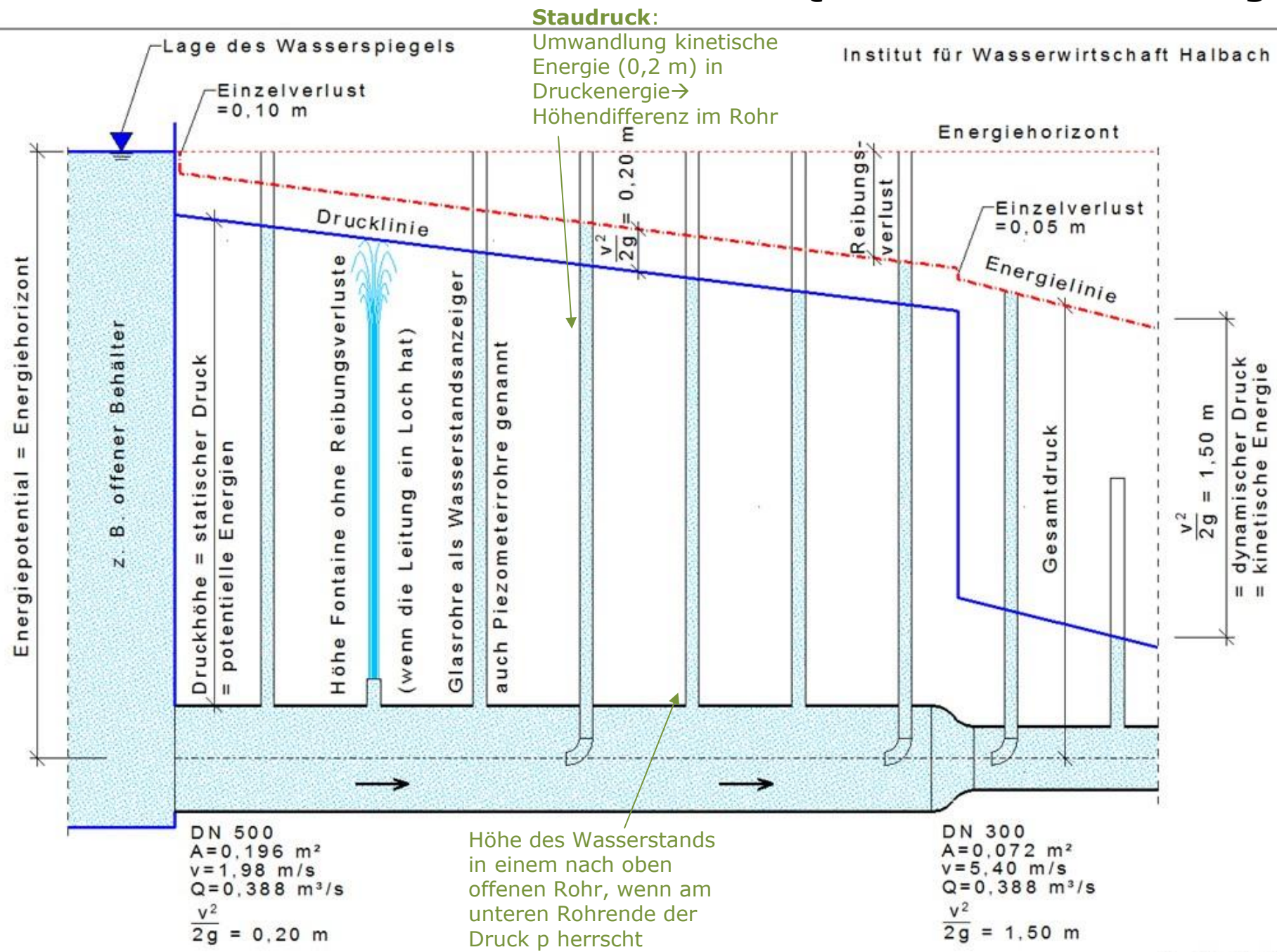


Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik



Druckverhältnisse durchströmtes Rohr mit Querschnittsreduzierung



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Verständnis der Druck- und Energielinie in einem hydraulischen Längsschnitt:

- Die Energieformen bei hydraulischen Betrachtungen werden in [**m Wassersäule; m WS**] berechnet, da diese Ergebnisse dann keiner weiteren Umrechnung bedürfen und weil die Wasserstände sofort ablesbar sind.
- Die **potentielle Energie**, auch Lageenergie genannt, entspricht der Lage des Wasserspiegels, den dieser z.B. in Glasrohren einnehmen würde, wenn die Rohrleitung Löcher hätte und in diesen Glasröhren (ohne Bogen) stecken würden.

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

- Die Verbindung der Wasserspiegel in den Glasrohren wird auch **Drucklinie** genannt. Bis zu dieser Drucklinie hoch würde auch das Wasser aus einer senkrechten Undichtigkeit wie eine Fontäne spritzen.
- Werden nun die Piezometerrohre etwas in die Rohrleitung hineingeführt und so abgewinkelt, dass ihre Öffnung von dem Wasser gerade angeströmt wird (**Pitotrohr**), so steigt der Wasserspiegel – sofern das Wasser fließt – über den Wasserspiegel der Drucklinie um die sogenannte **Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$** .
- Über der Drucklinie liegt also im Abstand der **Geschwindigkeitshöhe** die Energielinie.

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

- Die **Höhe der Energielinie** an einem bestimmten Leitungsabschnitt entspricht der an diesem Punkt noch vorhandenen **Gesamtenergie**.
- Nimmt die **Geschwindigkeit** z.B. wegen einer Reduzierung oder einer **Einengung** zu, dann steigt die **Geschwindigkeitshöhe** und die **Drucklinie** senkt sich um dieses Maß.
- **Reibungsverluste** verringern die Druck- und Energielinie **kontinuierlich**
- **örtliche Verluste** entstehen z.B. bei Querschnittsveränderungen oder Einbauten (Ventile, Klappen usw.) Je höher die Geschwindigkeit, desto höher die Reibungsverluste.

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Gauckler-Manning-Strickler (GMS) Formel:

- **offene Gerinne** mit Freispiegelabfluss (Kanalisation und Fließgewässer) im Unterschied zu Druckabfluss (TW-Leitungen)
- Die Formeln hängen vom **hydraulischen Radius R** und dem **Fließgefälle I** des Wasserspiegels ab. Energieliniengefälle ist gleich **Fließgefälle I**, gilt aber nur bei **Normalabfluss** (stationär und gleichförmig)
- Berücksichtigung sämtliche **Fließwiderstände** in Form empirischer **Beiwerte k_{st}** .
- Der meist zu berechnende **Abfluss Q** ergibt sich dann durch Multiplikation der gefundenen mittleren **Fließgeschwindigkeit v_m** mit der **Querschnittsfläche A**

$$Q \text{ [m}^3\text{/s]} = v_m \text{ [m/s]} \cdot A \text{ [m}^2\text{]}$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Fließformel nach Gauckler-Manning-Strickler (GMS)

gilt für die üblichen Verhältnisse in **offenen Fließgewässern** und **offenen Kanalgerinnen** mit guter Genauigkeit

$$\begin{aligned}v_m &= k_{\text{st}} \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \\&= k_{\text{st}} \cdot \sqrt[3]{R^2} \cdot \sqrt{I}\end{aligned}$$

mit dem Rauheitsbeiwert nach Strickler k_{st} in $\text{m}^{1/3}/\text{s}$ für die Gerinnerauheit

v: Fließgeschwindigkeit in $[\text{m}/\text{s}]$

I: Gefälle in $[\text{m}/\text{m}]$

R: hydraulischer Radius in $[\text{m}]$ mit A/ U $[\text{m}^2/\text{m}]$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Rauheitsbeiwert nach Strickler

- Strickler-Beiwert k_{St} [$m^{1/3}/s$]: in Abhängigkeit von der **Oberflächenbeschaffenheit, Bewuchs und Querschnittsform** zu wählen.
- Der Strickler-Beiwert wurde von Strickler sowohl im Labor als auch in der Natur **experimentell** bestimmt.
- **ungewöhnliche Einheit** hat keine physikalische Bedeutung, sondern wurde so festgelegt, dass die Gleichung dimensionsecht ist.

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Rauheitsbeiwerte nach Strickler

Typische Flussbett-Werte:

Oberfläche	k_{st} in $m^{1/3}/s$
Glatter Beton	100
Gerades Fließgewässer	30–40
Mäandrierendes Flussbett mit Bodenbewuchs	20–30
Wildbach mit Geröll	10–20
Wildbach mit Unterholz	<10

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Rauheitsbeiwerte nach Strickler

Tabelle : Empfohlene Rauheitsbeiwerte k_{ST}

Gerinnetyp	Wandbeschaffenheit	k_{ST}
Gemauerter Kanal	Haussteinquader	70 - 80
	normales Bruchsteinmauerwerk	60
	grob behauene Steine	50
	gepflasterte Böschung, natürliche Sohle	45 - 50
Betonkanal	Zementglattstrich	100
	alter Beton, saubere Flächen	60
	unregelmäßige Betonflächen	50
Erdkanal	festes Material, glatt	60
	Rasen	25
	Sand, Lehm oder Kies; stark bewachsen	20 - 25

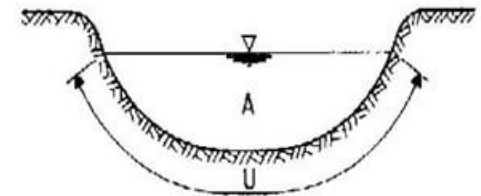
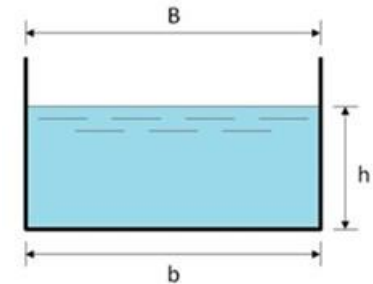
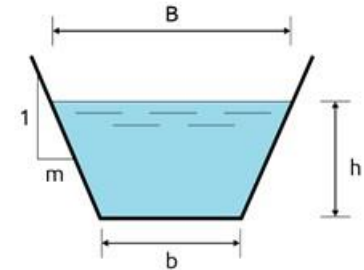
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

hydraulischer Radius in [m]

$$R [m] = \frac{A [m^2]}{U [m]}$$

Quotient aus **Durchflussquerschnitt A** und **benetztem Umfang U** einer Flüssigkeitsleitung.



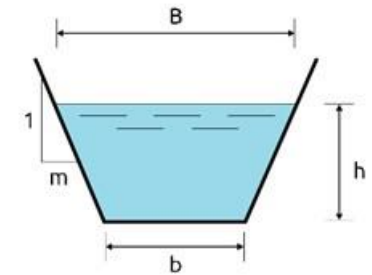
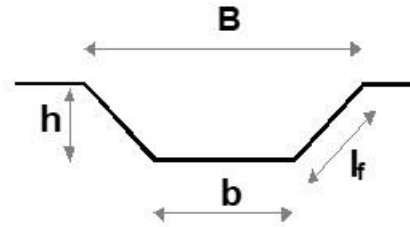
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Technische Gerinne:

■ Trapez

Breite B	$b + 2 \cdot mh$
Mittlere Wassertiefe	$\frac{(b + mh)h}{b + 2 \cdot mh}$
Querschnittsfläche A	$(b + mh) \cdot h$
benetzter Umfang P	$b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + m^2}$
Hydraulischer Radius r_h	$\frac{(b + mh) \cdot h}{b + 2h \cdot \sqrt{1 + m^2}}$



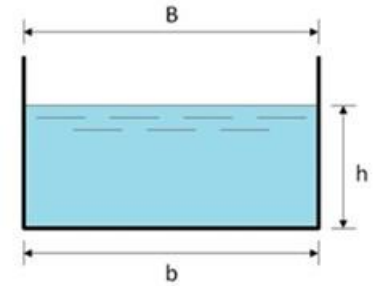
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Technische Gerinne

■ Rechteck

Breite B	b
Mittlere Wassertiefe	h
Querschnittsfläche A	$b \cdot h$
benetzter Umfang P	$b + 2h$
Hydraulischer Radius r_h	$\frac{bh}{b + 2h}$

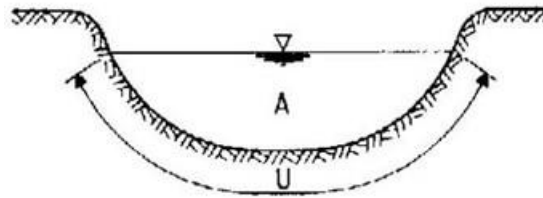
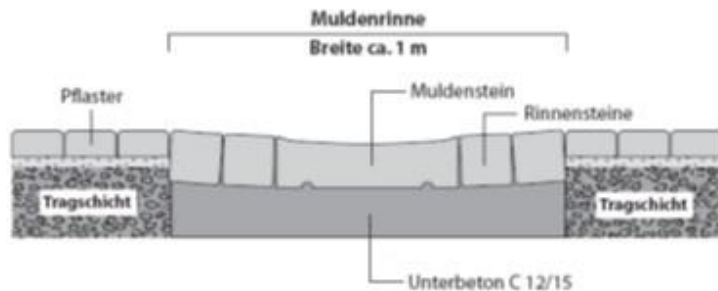


Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Technische Gerinne

- Halbschale



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Natürliche Gerinne

- Halbschale
- Verbundprofile
(gegliederte Querschnitte)
- hier erfolgt die Berechnung für jedes **Teilgerinne**
(Hauptgerinne und zwei Vorländer) mit korrekter Berücksichtigung der **Trennflächen** zur Ermittlung von U

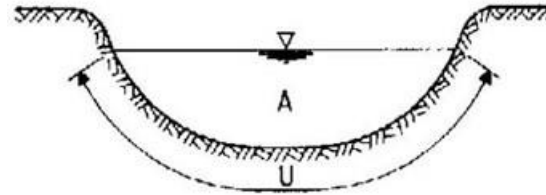


Abb. 1.5.: Natürliches Flussprofil

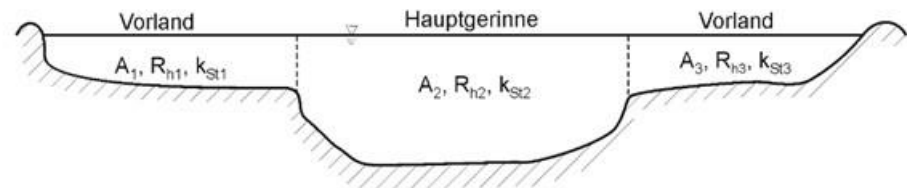
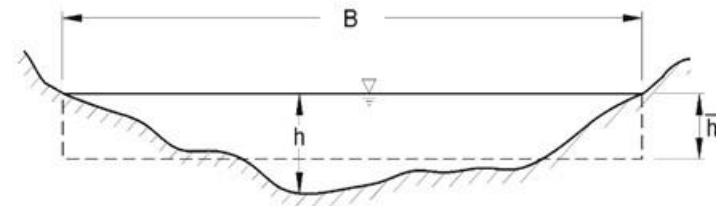


Abb. 2.11.: Berechnung von Gerinneabfluss bei Verbundprofilen

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Schätzen Sie die **Fließgeschwindigkeit** des Rheins in Stundenkilometer [km/h] ab, der 300 km von Köln (50 m üNN) bis zur Mündung (0 m üNN) fließt. Die Breite b beträgt im Mittel 350 m, die Wassertiefe $h = 8$ m.

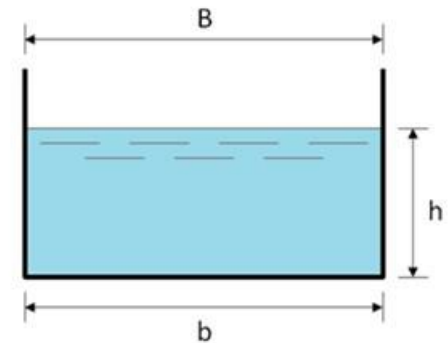
$$I = 50 \text{ m} / 300.000 \text{ m} = 0,000167$$

$$A = 350 \text{ m} * 8 \text{ m} = 2.800 \text{ m}^2$$

$$U = 2 * 8 \text{ m} + 350 \text{ m} = 366 \text{ m}$$

$$R = 2.800 \text{ m}^2 / 366 \text{ m} = 7,65 \text{ m}$$

$$k_{\text{St}} = \text{ca. } 30 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$$



$$v_m = k_{\text{st}} \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} = 30 \cdot 7,65^{\frac{2}{3}} \cdot 0,000167^{\frac{1}{2}} = 1,5 \text{ m/s} = \mathbf{5,4 \text{ km/h}}$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Berechnung Kanalgerinne

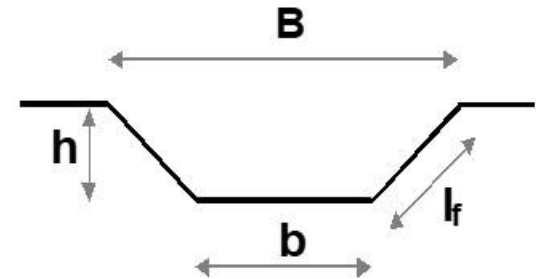
$$A_u = 0,8 \text{ [ha]}$$

$$r_{0,2(10)} = 178,4 \text{ [l/s ha]} \text{ aus KOSTRA}$$

$$k_{St} = 50 \text{ [m}^{1/3}\text{/s]}$$

$$\text{Gefälle } J = 4 \text{ \%}$$

Zu wählen: Gerinneform (Trapez)



Iterativer Berechnungsgang

$$Q = v * A$$

$$Q_{Rinne} = k_{ST} \cdot J^{1/2} * R^{2/3} * A > Q_r = r_{n(D)} * A_u$$

1. maßgebender Regenwasserabfluss Q_r
2. Profil & Abmessungen wählen
3. Abflusskapazität Gerinne Q_{Rinne} bestimmen

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Bemessung offenes Trapezprofil

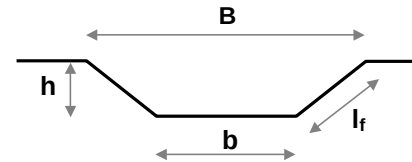
(1) Bemessungsabfluss

abflusswirksame Fläche	A_u	=	0,8	ha
Regendauer	D	=	10	min
Regenhäufigkeit	n	=	0,2	a^{-1}
Regenspende	$r_{D(n)}$	=	178,4	$l/(s \cdot ha)$
Bemessungsabfluss	Q_R	=	143	l/s

(2) Festlegung des Profils

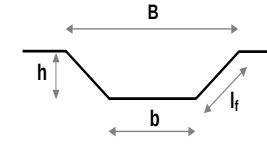
Trapezquerschnitt

- Breite	b	=	0,4	m
- Seitenlänge	l_f	=	0,2	m
- Höhe	h	=	0,15	m
- Rauigkeit	k_{ST}	=	50	$m^{1/3}/s$
- Gefälle	J	=	4	%



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik



(3) Kennwerte Absflussquerschnitt

obere Breite	B	$=$	$b + 2 \cdot (l_f^2 - h^2)^{1/2}$	$=$	0,66	m
Querschnittsfläche	A	$=$	$0,5 \cdot (B + b) \cdot h$	$=$	0,080	m ²
benetzter Umfang	U	$=$	$b + 2 \cdot l_f$	$=$	0,80	m
hydraulischer Radius	R	$=$	A/U	$=$	0,1	m

(4) Abflusskapazität Rinne

Fließgeschwindigkeit	v	$=$	$k_{ST} \cdot J^{1/2} \cdot R^{2/3}$	$=$	2,15	m/s
Ableitungskapazität	Q_{ab}	$=$	$v \cdot A$	$=$	0,172	m ³ /s
				$=$	172	l/s

Bemessungsabfluss $Q_R =$ **143** l/s **172** l/s

→ Abflusskapazität ausreichend

