Studiengang Mechatronik

Modul 16:

FEM – Finite Elemente Methode

- 11. Vorlesung -

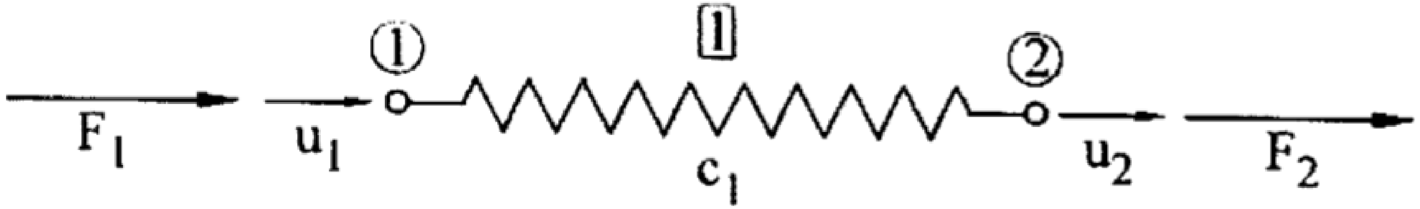
Prof. Dr. Enno Wagner

5. Januar 2026

Übersicht

- Matrix-Steifigkeits-Methode (Direct-Stiffness-Method)
  - Einzel-Element-Betrachtung
  - Gesamtsystem-Betrachtung
- Arbeiten mit der Koinzidenz-Matrix
  - Beispiel Zugstab mit unterschiedlichen Querschnitten
- Übungen

1 Federelement

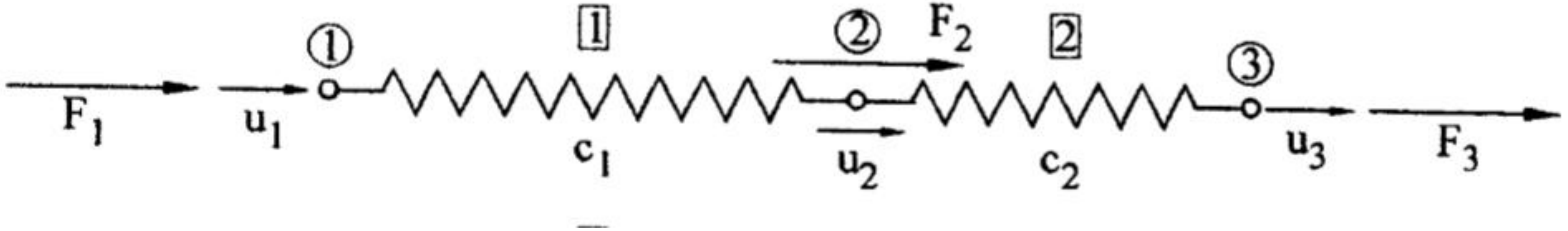


$$F_1 = c_1 u_1 - c_1 u_2$$
$$F_2 = c_1 u_2 - c_1 u_1$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e \, \mathbf{u}_e$$

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

2 Federelemente



2 Ansätze zur Steifigkeitsmatrix:

Einzel-Element-Betrachtung

Gesamtsystem-Betrachtung

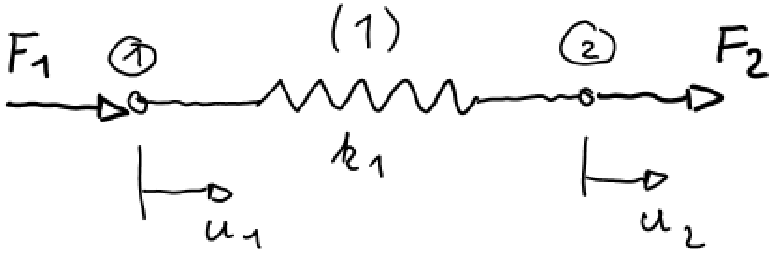
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

Direct-Stiffness-Method

Direct Stiffness Method

Federelement :



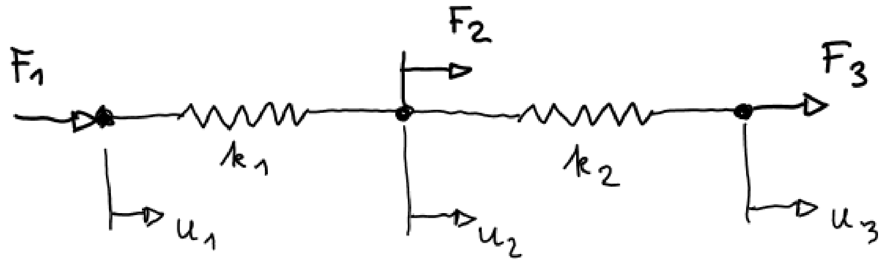
$$F_1 = k_1 \cdot u_1 - k_1 \cdot u_2$$

$$F_2 = k_1 u_2 - k_1 \cdot u_1$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad f_e = K_e \, u_e$$

Direct Stiffness Method

Struktur mit 2 Elementen und 3 Knoten



1.) Auslenkung bei u_1

$u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 0 \quad ; \quad u_3 = 0$

$F_1' = u_1 \cdot k_1 \qquad \Rightarrow \quad F_2' = -u_1 \cdot k_1$

$\Rightarrow \quad F_3' = 0$

2.) Auslenkung bei u_2

$u_1 = 0 \quad ; \quad u_2 = 1 \quad ; \quad u_3 = 0$

$F_2'' = u_2 \cdot k_1 + u_2 \cdot k_2 \qquad \Rightarrow \quad F_1'' = -u_2\, k_1$

$\Rightarrow \quad F_3'' = -u_2 \cdot k_2$

3.) Auslenkung bei u_3

$u_1 = 0 \quad ; \quad u_2 = 0 \quad ; \quad u_3 = 1$

$F_3''' = u_3 \cdot k_2 \qquad \Rightarrow \quad F_2''' = -u_3 \cdot k_2$

$\Rightarrow \quad F_1''' = 0$

Direct Stiffness Method

Aufstellen der Knoten-Gleichungen (Kräftegleichgewicht)

$$
\begin{array}{rrrcl}
u_1 k_1 & - u_2 \cdot k_1 & 0 & = & F_1 \\
- u_1 k_1 & u_2 \cdot k_1 + u_2 k_2 & - u_3 k_2 & = & F_2 \\
0 & - u_2 \cdot k_2 & u_3 \cdot k_2 & = & F_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrcl}
u_1 \cdot k_1 & - u_2 k_1 & 0 & = & F_1 \\
- u_1 k_1 & u_2 (k_1 + k_2) & - u_3 k_2 & = & F_2 \\
0 & - u_2 k_2 & u_3 k_2 & = & F_3
\end{array}
$$

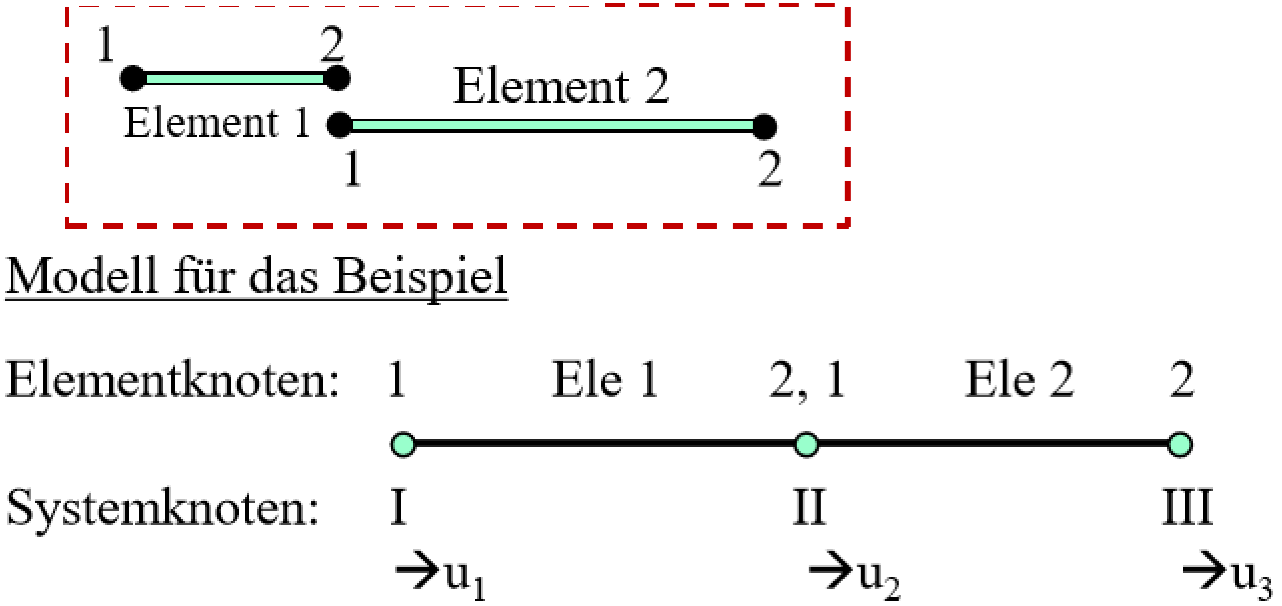
Direct Stiffness Method

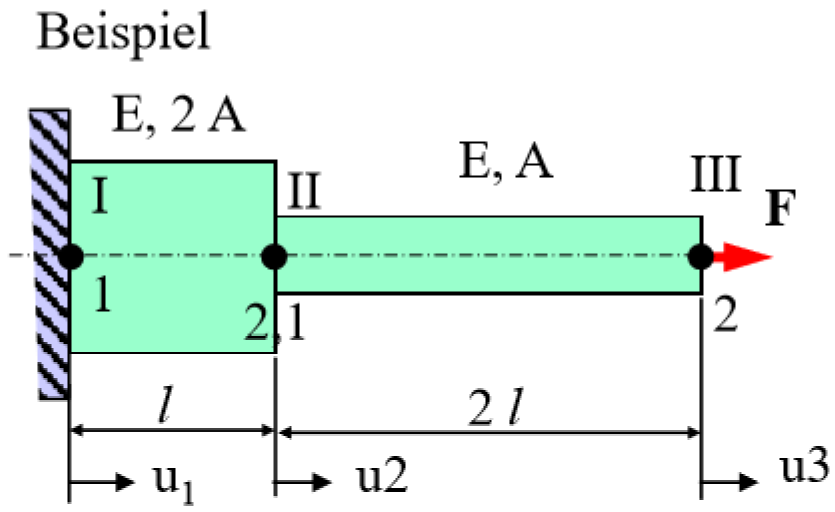
$\Rightarrow$ <u>Matrix-Schreibweise</u>

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Vorgehen

1. Struktur des Bauteils





Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

2. Ermitteln der Elementsteifigkeiten

Element 1

	1	2
1	k1	-k1
2	-k1	k1

Element 2

	1	2
1	k2	-k2
2	-k2	k2

$k_1 = 2EA/l = k;$
$k_2 = EA/2l = k/4$

Element 1

	1	2
1	k	-k
2	-k	k

Element 2

	1	2
1	k/4	-k/4
2	-k/4	k/4

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

Koinzidenzmatrix

3. Kompatibilität der Verschiebungen an den Knoten herstellen

=> Koinzidenz-Matrix

<u>Modell für das Beispiel</u>

Elementknoten: 1 2,1 2

Systemknoten: I Ele 1 II Ele 2 III

Formalismus

Die Verschiebung der Element-Knoten wird durch die Verschiebung der Systemknoten ersetzt.

	Element-Knoten	***System-Knoten***
Element 1:	(1,2) auf	I II
Element 2:	(1,2) auf	II III

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{II} \\ \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{bmatrix} \leftarrow \textit{Koinzidenzmatrix}$$

<u>Quelle:</u>
Skript Prof. Albrecht, Frankfurt-UAS

4. Aufstellen der System-Steifigkeitsmatrix

Diese Matrix verknüpft die äußeren Knotenkräfte (hier 3) mit den Verschiebungen (hier 3). Die Anzahl der Zeilen N_Z und Spalten N_S ist gleich; sie entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade (FG) des Systems:
hier → $Nz = N = 3$ FG (u_1, u_2, u_3) ,

Knoten		I	II	III
	FG	u1	u2	u3
I	u1			
II	u2			
III	u3			

Quelle:
Skript Prof. Albrecht, Frankfurt-UAS

5. Platzieren der Elementsteifigkeitsmatrizen

Platzieren der Elementsteifigkeitsmatritzen in der Systemsteifigkeitsmatrix entsprechend der Koinzidenzmatrix

1. Positionieren der Matrixelemente von Element 1

Element 1

	1	2
1	k1	-k1
2	-k1	k1

2. Positionieren der Matrixelemente von Element 2

Element 2

	1	2
1	k2	-k2
2	-k2	k2

Knoten		I	II	III
	FG	u1	u2	u3
I	u1	k1	-k1	
II	u2	-k1	k1+k2	-k2
III	u3		-k2	k2

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

Zusammenbau

1. Positionieren der Matrixelemente von Element 1

Element 1

	1	2
1	k	-k
2	-k	k

Element 2

	1	2
1	k/4	-k/4
2	-k/4	k/4

Knoten		I	II	III
	FG	u1	u2	u3
I	u1	**k**	**-k**	
II	u2	**-k**	**k+k/4**	-k/4
III	u3		-k/4	k/4

2. Positionieren der Matrixelemente von Element 2

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

6. Aufstellen des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} F_{K1} \\ F_{K2} \\ F_{K3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{K1} \\ F_{K2} \\ F_{K3} \end{bmatrix} = \frac{k}{4} \boxed{\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

mit $k_1 = 2EA/l = k$; $k_2 = EA/2l = k/4$

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

Randbedingungen

7. Ermitteln der Randbedingungen

$u_1 = 0 \rightarrow$ Einspannung; $F_{K2} = 0 \rightarrow$ keine äußere Kraft; $F_{K3} = F \rightarrow$ äußere Kraft F

8. Einsetzen der Randbedingungen und Erzeugen der reduzierten Matrix

$$\begin{bmatrix} F_{Lager} \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

Reduzierte Matrix

9. Darstellen der reduzierten Matrix:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

10. Berechnung der Verschiebungen:

$u_2 = F / k$ (Verschiebung am Knoten 2)

$u_3 = 5\ F / k$ (Verschiebung am Knoten 3)

11. Berechnung der Lagerreaktion:

Auflagerkraft am Knoten 1 → $[F_{k1}] = \frac{k}{4}[-4][u_2] = \frac{k}{4}[-4]\left[\frac{F}{k}\right] = \boxed{-F}$

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

12. Berechnung der Spannungen

Element 1

$$\sigma_1 = E\,\varepsilon_1 = E\,\frac{u_2 - u_1}{l} = \frac{E}{l}\frac{F}{k_1} = \frac{E}{l}F\frac{l}{2\,AE} = \boxed{\frac{F}{2A}} \qquad \textit{über} \quad \sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \boxed{\frac{F}{2A}} \qquad \text{mit } u_1 = 0$$

Element 2

$$\sigma_2 = E\,\varepsilon_2 = E\,\frac{u_3 - u_2}{2l} = \frac{E}{2l}\frac{5F - F}{k} = \frac{E}{2l}\frac{4Fl}{2EA} = \frac{F}{A} \qquad \textit{über} \quad \sigma_1 = \frac{F}{A_2} = \boxed{\frac{F}{A}}$$

Quelle:
Skript Prof. Albrecht,
Frankfurt-UAS

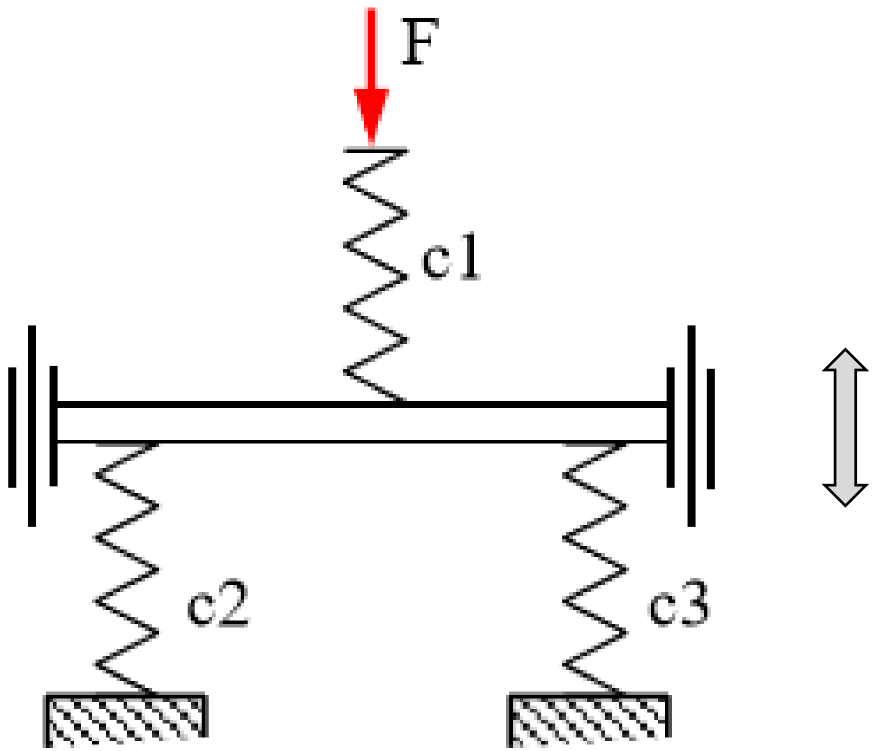
Übung 1

<u>Gegeben:</u>

$c_1 = c_2 = c_3 = c$

<u>Gesucht:</u>

u_1, u_2, Auflagerreaktion



<u>Hinweis:</u>

Nur vertikale Bewegung möglich (keine Drehung)

Übung 2

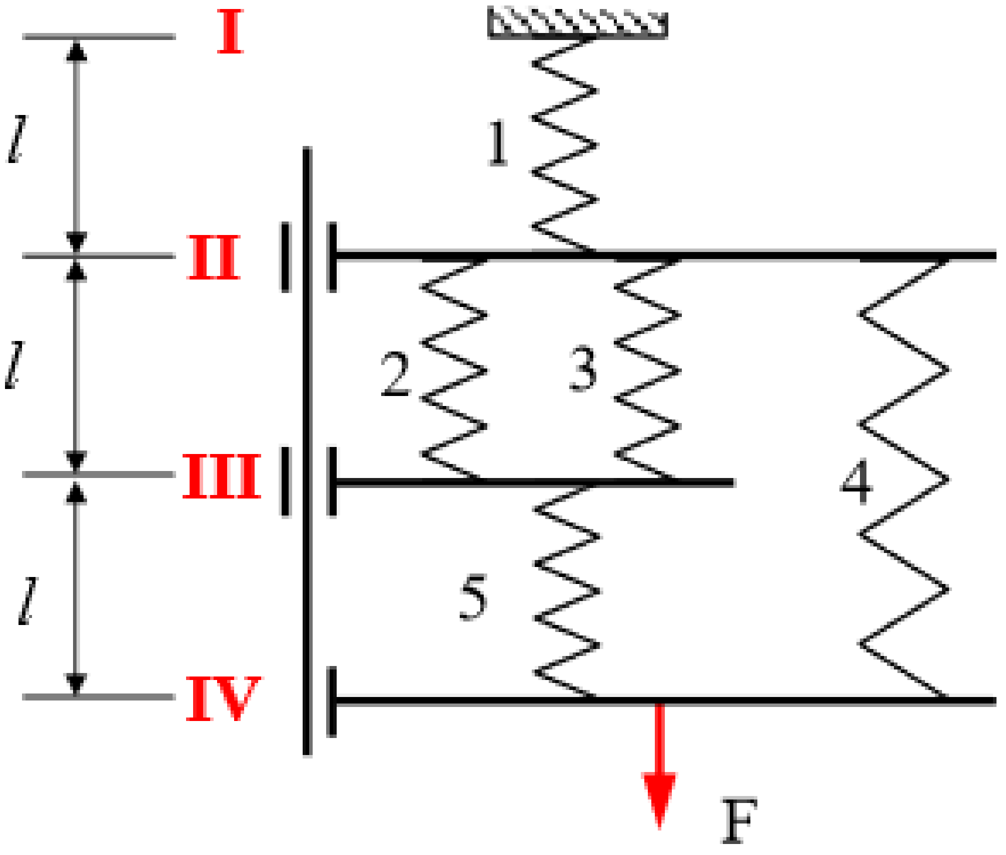
<u>Gegeben:</u>

l, A, E

(nur vertikale Bewegung)

<u>Gesucht:</u>

u_1, u_2, u_3, Auflagerreaktion



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !

Impressum

Hinweis

Diese Folien sind ausschließlich für den internen Gebrauch im Rahmen der Lehrveranstaltung an der Frankfurt University of Applied Sciences bestimmt. Sie sind nur zugänglich mit Hilfe eines Passwortes, dass in der Vorlesung bekannt gegeben wird.