

Studiengang Mechatronik

Modul 16:

FEM – Finite Elemente Methode

- 3. Vorlesung -

Prof. Dr. Enno Wagner

14. November 2024

Übersicht

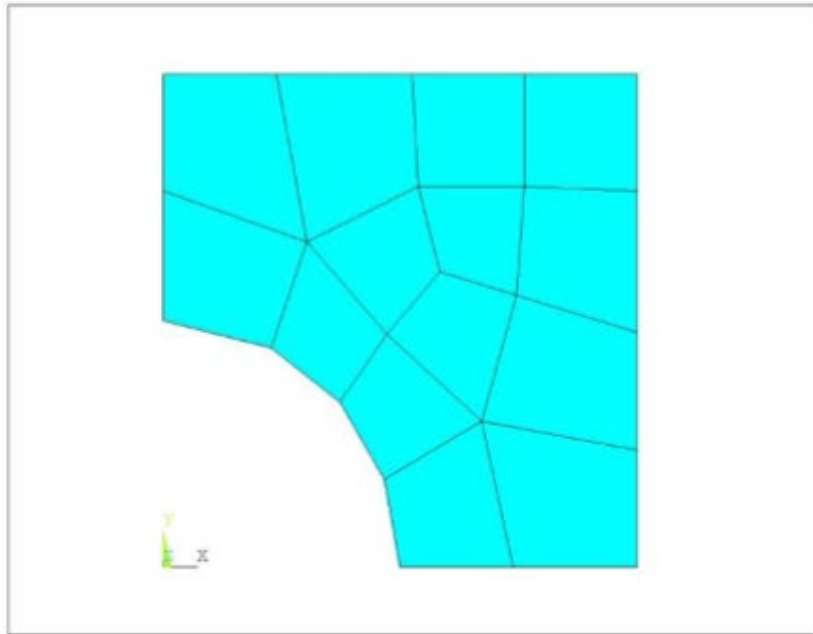
- Finite Elemente Methoden
 - h-Methode
 - p-Methode
- Beispiel: Kräfte im Stab mit 2 Querschnitten
 - Analytische Lösung
 - 1 Element
 - 2 Elemente

H-Element-Methode

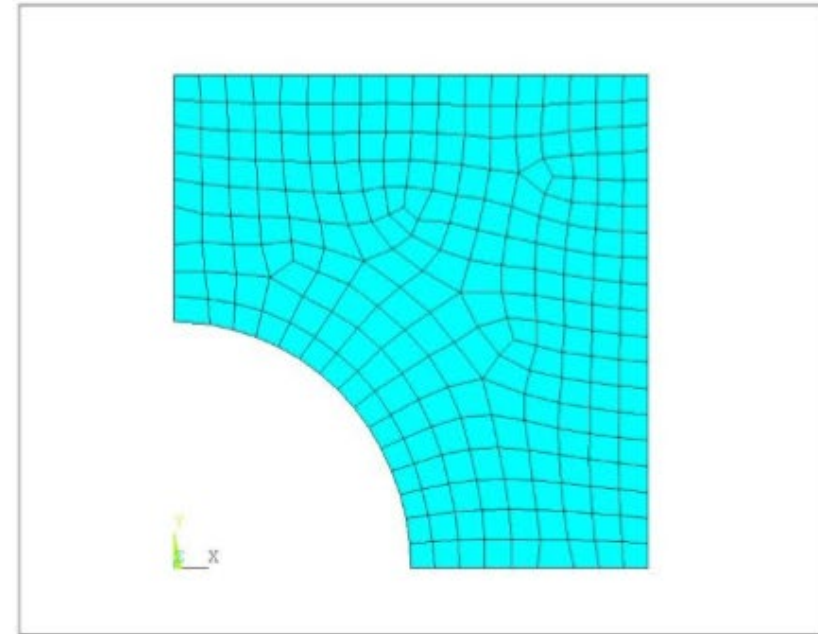
- Auch kurz „h-Methode“ genannt
- Häufig verwendete Methode (ANSYS)
- große Anzahl von Elemente
- relativ einfachen Lösungsansätzen
- Nachteilig:
 - feine Strukturen werden nicht gebraucht, wo keine großen Spannungsgradienten auftreten
 - Wo große Spannungsgradienten auftreten, benötigt man feine FEM-Netze
 - Feine Netze bedingen einen hohen Aufwand an Netzgenerierung und Rechenleistung.
 - Wo sich hohe Spannungsgradienten befinden, erhält man erst nach der ersten Rechnung der Struktur

Verfeinerung mittels h-Element-Methode

=> Steigerung der Genauigkeit durch eine Erhöhung der Elementdichte



Verrundung, Kante mit 4 Elementen



Verrundung, Kante mit 15 Elementen

H-Element-Methode

„h-Adaptivität“

Steigerung der Genauigkeit erfolgt durch eine Erhöhung der Netzdichte
=> zusätzliche Elemente hinzugefügt werden

„r-Adaptivität“

Erhöhung der Netzdichte, durch Verschieben der Knoten in Bereiche hoher Spannungsgradienten;
=> Anzahl der Elemente bleibt konstant

p-Element-Methode

Theoretisch möglich:

Erzeugung von Elemente mit beliebig hoher Ordnung der Ansatzfunktion durch Hinzufügen weiterer Potenzen.

Praktisches Problem:

Die Anzahl der zu berechnenden Freiheitsgrade, steigt vor allem bei 2- bzw. 3-dimensionalen Problemen, rapide an:

Dreieckselements mit quadratischer Ansatzfunktion => sechs Freiheitsgrade,

Dreieckselement mit kubischer Ansatzfunktion => zehn Freiheitsgrade

Bei FE-Modelle mit über hunderttausend Elementen

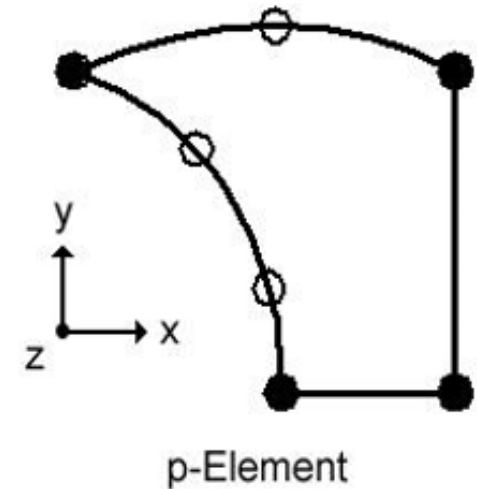
=> mathematischer Aufwand nimmt exorbitante Dimensionen an

=> daher vollständige Polynomansätze, meist nur bis zum kubischen Ansatz verwendet.

p-Element-Methode

Zusätzlicher Elementtyp, „p-Element“ genannt

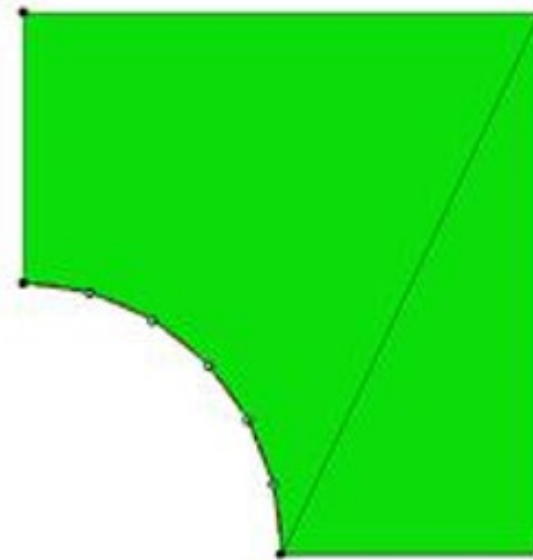
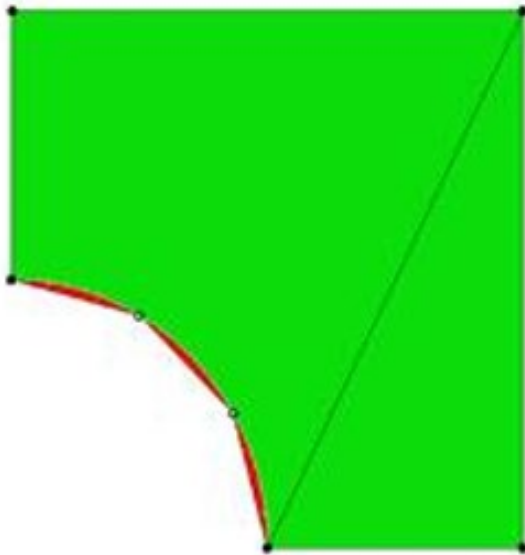
- ⇒ keine fest vorgegebenen Ansatzfunktionen
- ⇒ bei Bedarf in ihrem Polynomgrad variieren
- ⇒ Reduktion des mathematischen Aufwand bei vergleichsweise hoher Qualität der Simulation



Creo Simulate

- Creo-Simulate benutzte Geometrie Elemente Analyse (GEA) basiert auf dem Prinzip der sogenannten „p-Methode“
- Die Steigerung der Genauigkeit erfolgt bei der „p-Methode“ durch das Erhöhen der Polynomordnung der Ansatzfunktionen
- bestehendes FE-Netz bleibt erhalten
- Creo-Simulate steuert den Grad der Ansatzfunktionen automatisch
- Es werden nur diejenigen Elementkanten mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung versehen, bei denen es auch tatsächlich notwendig ist

Im rechten Bild wurde die Ordnung der Ansatzfunktion der gekrümmten Elementkante von einem Polynom dritten Grades (3 Elemente auf dem Kreisbogen) auf ein Polynom sechsten Grades (6 Elemente) erhöht



Hierzu verwendet Creo-Simulate zwei unterschiedliche Konvergenzmethoden:

„Adaptive Einschnitt-Konvergenz“

„Adaptive Mehrfach-Konvergenz“

Adaptive Einschnitt-Konvergenz (E)

- Rechenlauf in 2 Schritten beginnend mit Polynomgrad 3
- Spannungsfehler werden berechnet
- anhand dieser Fehler erfolgt neue Polynomgradverteilung
- Die Methode ist empfehlenswert

Vorteile:

- höhere Geschwindigkeit, nur zwei Berechnungsschritte
- weniger Verbrauch von Plattenplatz
- Keine unnötigen Freiheitsgrade im Modell
- Direkte, auf die Spannung bezogene Fehlerabschätzung
- Spannungsberechnung auf zwei Arten
- Singularitäten treiben nicht den lokalen Polynomgrad

Nachteile:

- Keine Konvergenzkurve
- Keine Konvergenzvorgabe
- Fehlerwert schwierig zu interpretieren
- Spannungsbild oft zackig und ausgefranst, obwohl gute Ergebnisse
- Symmetrische Bauteile haben ein etwas unsymmetrisches Spannungsbild

Adaptive Mehrfach-Konvergenz

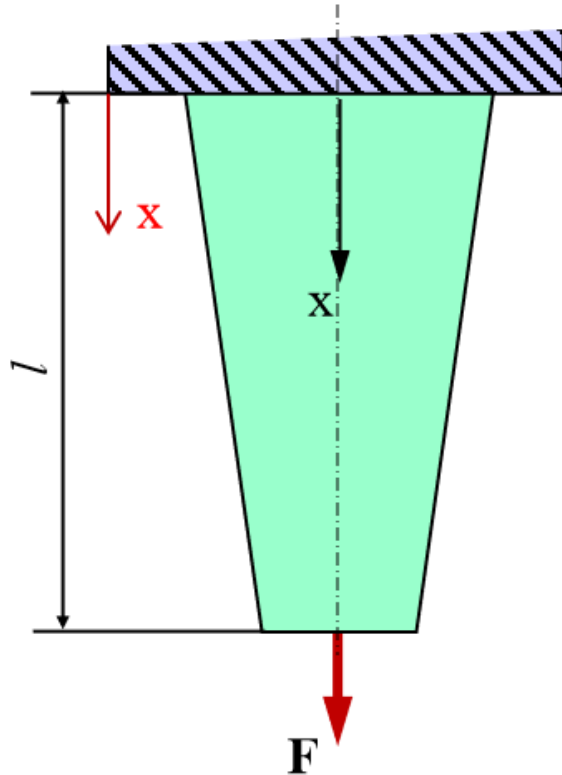
- Creo 2.0 Simulate führt mehrere Rechenläufe durch
- jeweils Erhöhung des Polynomgrades bis max. 9.
- Konvergenzgrad wird angegeben (Ergebnisdifferenz zweier aufeinanderfolgender Rechenläufe in %).
- Der Konvergenzgrad wird vorgegeben; die Berechnung schließt ab, wenn der Vorgabewert erreicht ist!

Vorteile:

- Gemischte Modelle (Balken, Schalen, Tetraeder)
- Modelle mit isotropem Materialverhalten
- Angabe der Konvergenz

Berechnungsbeispiele

1. Aufteilen der Struktur (Bauteilgeometrie) in gleichartige Elemente;
2. Betrachtungen am Element (Zusammenhang zwischen äußerer Belastung (Kraft, Moment) und Verschiebungen aufstellen)
3. Bestimmen der Element-Steifigkeitsmatrix
4. Transformation der Verschiebungen, Belastungen und Matrizen der Elemente vom lokalen ins globale Koordinatensystem der Gesamtstruktur
5. Betrachtungen am Knoten
6. Aufstellen der Systemgleichungen (Element- und Knotengleichungen zusammenführen)
7. Ermitteln der Randbedingungen
8. Einsetzen der Randbedingungen und lösen der Gleichungen
9. Streichen von Zeilen und Spalten
10. Berechnen der Verschiebungen der beweglichen Knoten
11. Berechnen der Lagerreaktionen
12. Berechnen der Spannungen



Beispiel 2

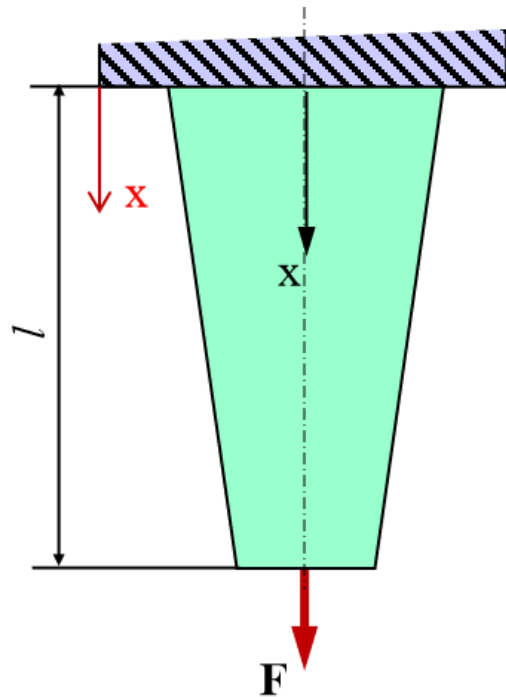
Gegeben

Balken (E , $A(x)$, l),
einseitig eingespannt, auf Zug belastet mit
Kraft F , (Eigengewicht wird vernachlässigt)

Gesucht

- Verschiebung u im Kraftangriffspunkt
- Auflagerkraft F_{AL}
- maximale Spannung σ_x

Analytische Betrachtung



$$A(x) = A_0 (1 - x/2l)$$

Analytische Lösung:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E(x)} = \frac{F(x)}{A(x) * E(x)}$$

$$u(x) = \int_0^l \frac{F}{EA(x)} dx = \int_0^l \frac{F}{EA_0(1 - \frac{x}{2l})} dx$$

$$u(l) = \frac{-2l}{EA_0} \ln(1 - \frac{l}{2l}) F = \frac{-2l}{EA_0} \ln(0,5) F = 1,386 \frac{l F}{EA_0}$$

Integraltafel:

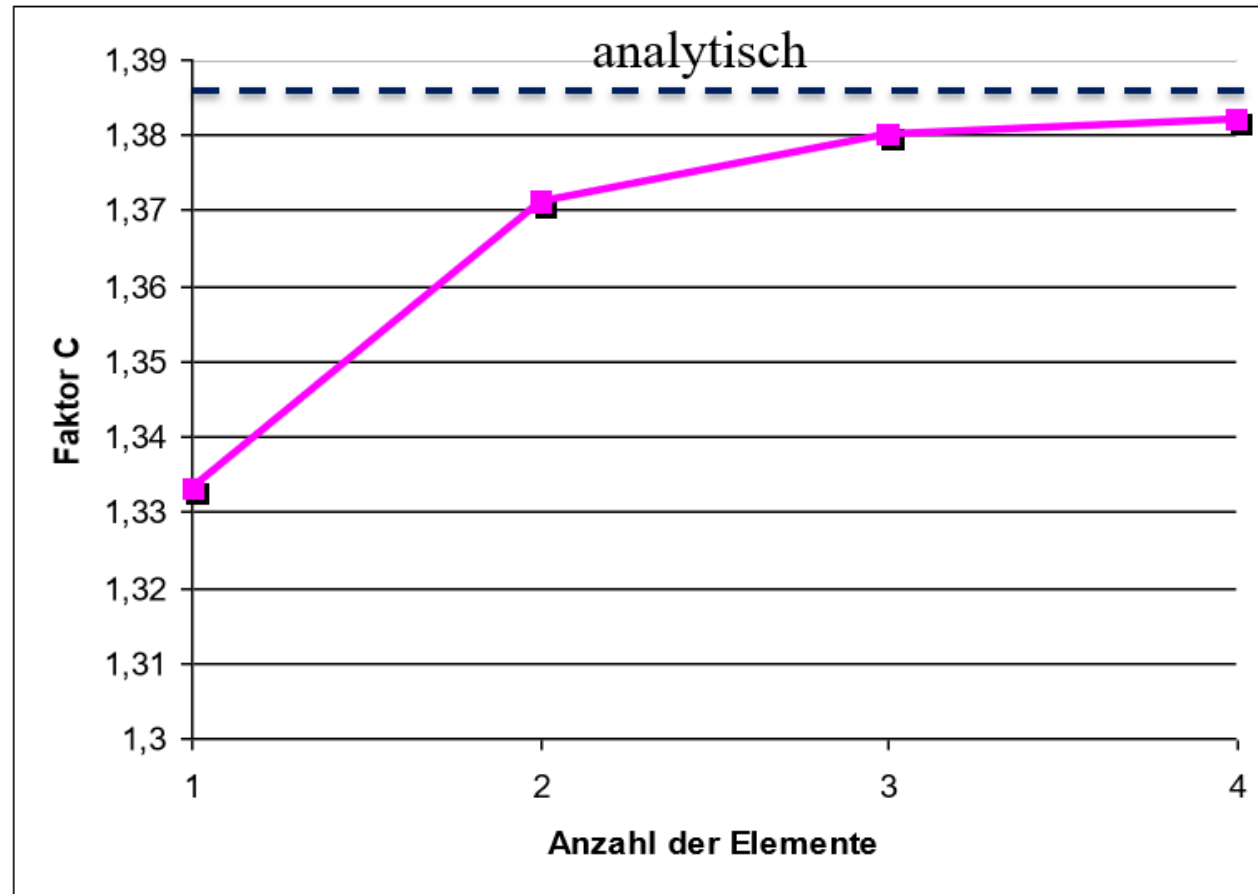
$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax + b|$$

Berechnung an der Tafel

- 1 Element
- 2 Elemente

Vergleich der Ergebnisse für den Faktor C in $u_i = C \cdot l \cdot F / (E \cdot A_0)$:

Faktor C für	$u(x=l)$
analytisch	1,386
1 Element	1,333
2 Elemente	1,371
3 Elemente	1,380
4 Elemente	1,382



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !

Hinweis

Diese Folien sind ausschließlich für den internen Gebrauch im Rahmen der Lehrveranstaltung an der Frankfurt University of Applied Sciences bestimmt. Sie sind nur zugänglich mit Hilfe eines Passwortes, dass in der Vorlesung bekannt gegeben wird.