

Mechanik und Tragkonstruktion

Festigkeitslehre Einführung

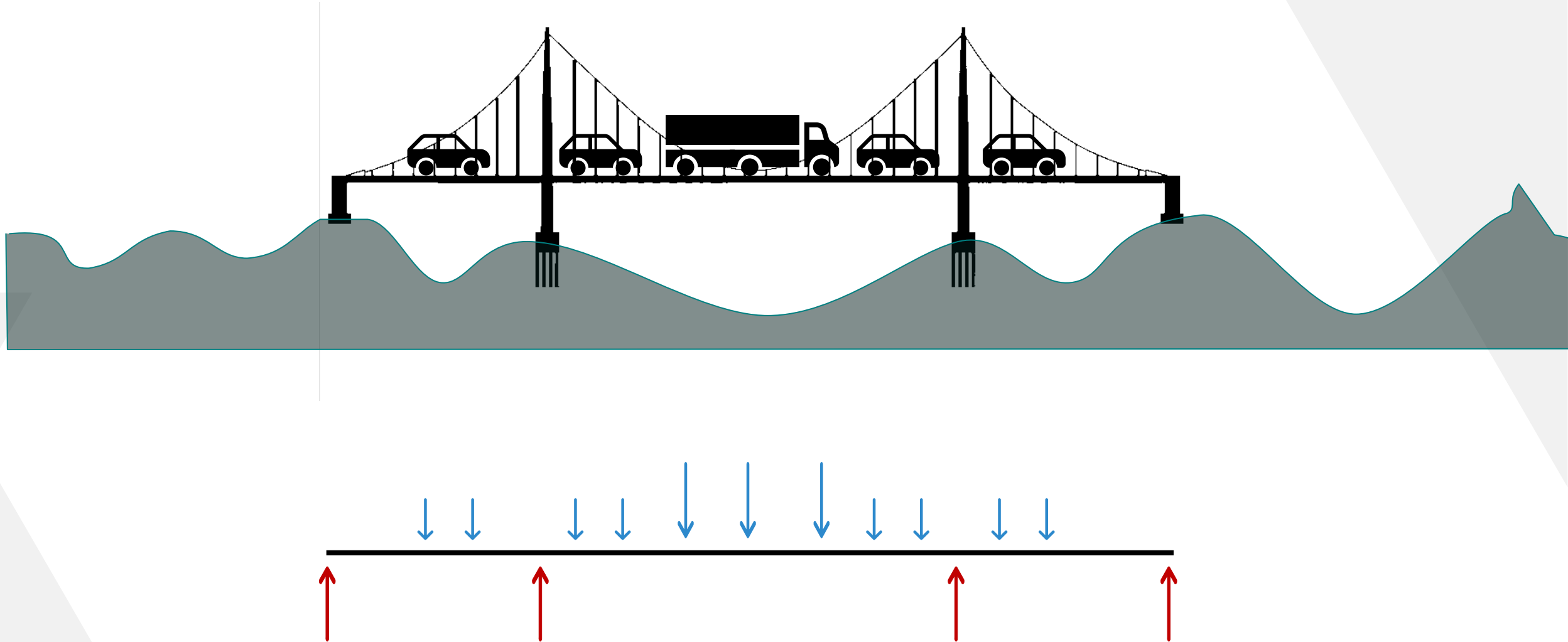
Inhalt Mechanik und Tragkonstruktion

1. Grundbegriffe/Herangehensweise an eine Planungsaufgabe/Beanspruchungen
2. Zentrales Kraftsystem
3. Allgemeines Kraftsystem
4. Tragwerke/Lasten
5. Biegeträger – Schnittkräfte
6. Festigkeitslehre – Querschnittskennwerte, Berechnung von Spannungen, Verformungen

Festigkeitslehre | Inhalt heute

- Einführung
- Begriffsbestimmung
- Querschnittskennwerte

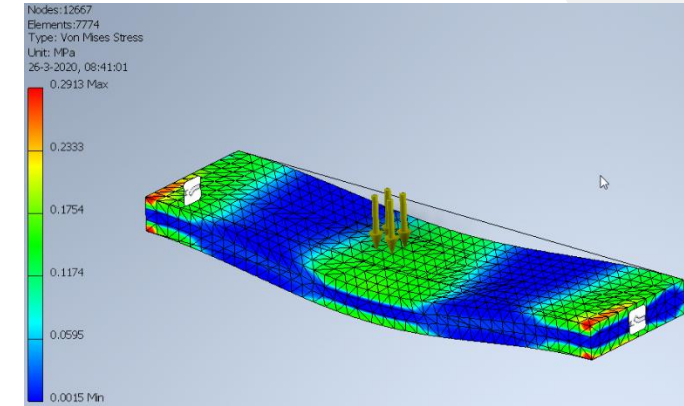
Festigkeitslehre | Einführung



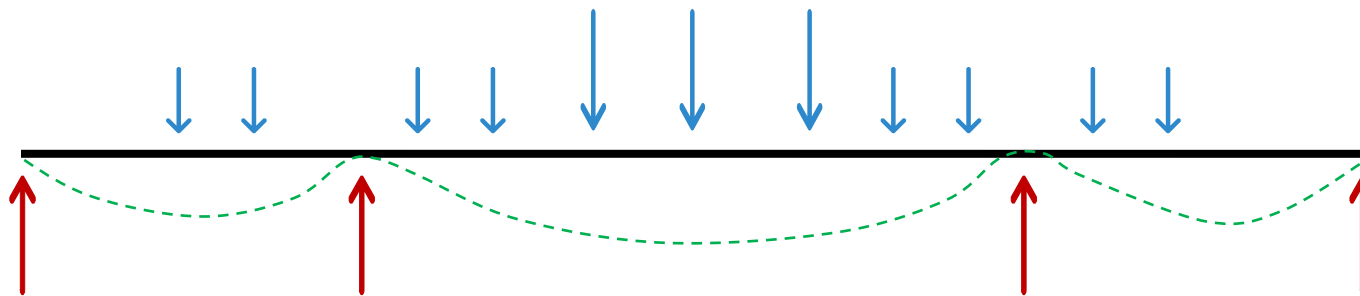
Festigkeitslehre | Einführung

Berechnung der Beanspruchungen in den Bauteilen

Berechnung der Verformung

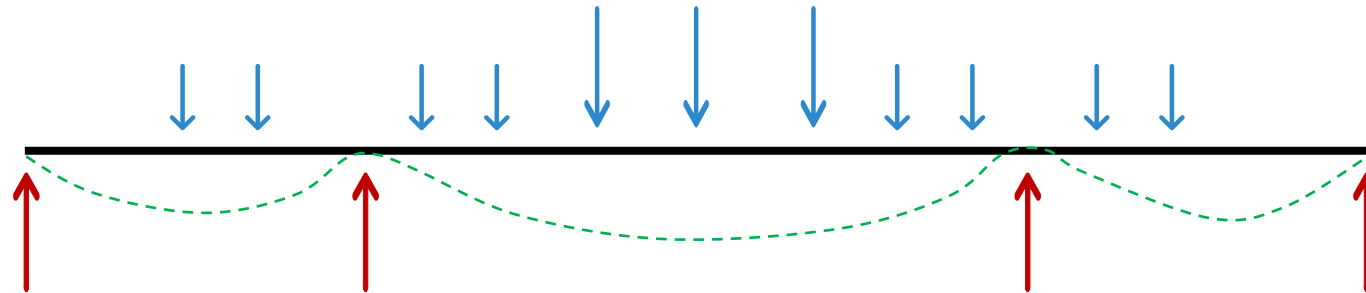


→ Bezug zwischen Schnittkräften und Verformungen = **Dehnungen/Krümmung**



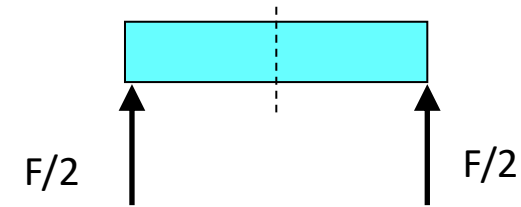
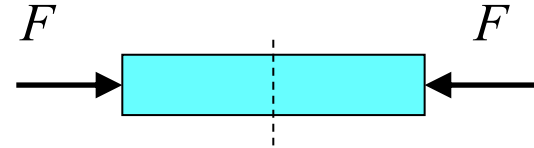
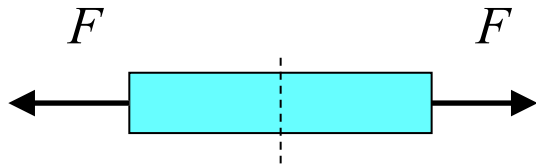
Vergleich der aufnehmbaren Beanspruchungen mit den ermittelten Beanspruchungen

→ Bezug zwischen Schnittkräften und Beanspruchungen im Bauteil selbst = **Spannungen**



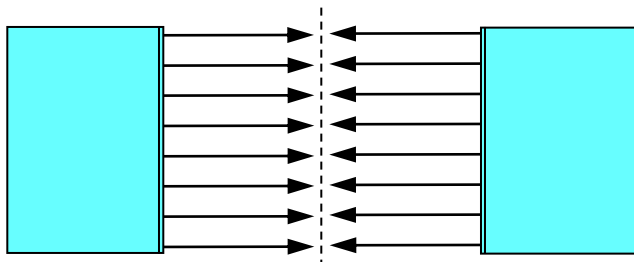
Festigkeitslehre | Begriffsbestimmung

Spannung- Mechanische Spannungen treten aufgrund von inneren Kräften in Festkörpern, Flüssigkeiten oder Gasen auf.

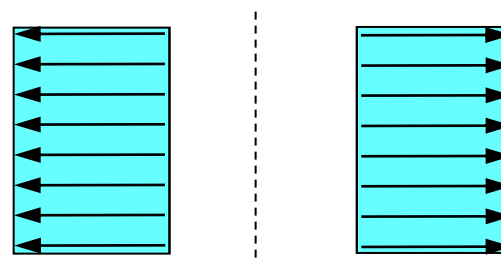


Normalspannungen - senkrecht zur betrachteten Schnittfläche

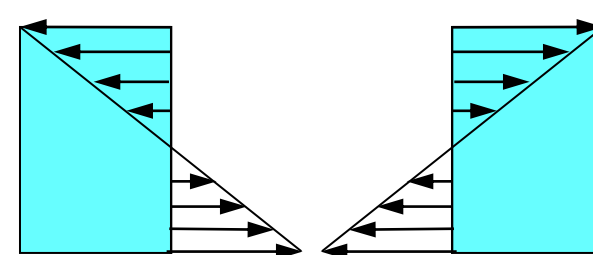
Zugspannungen



Druckspannungen

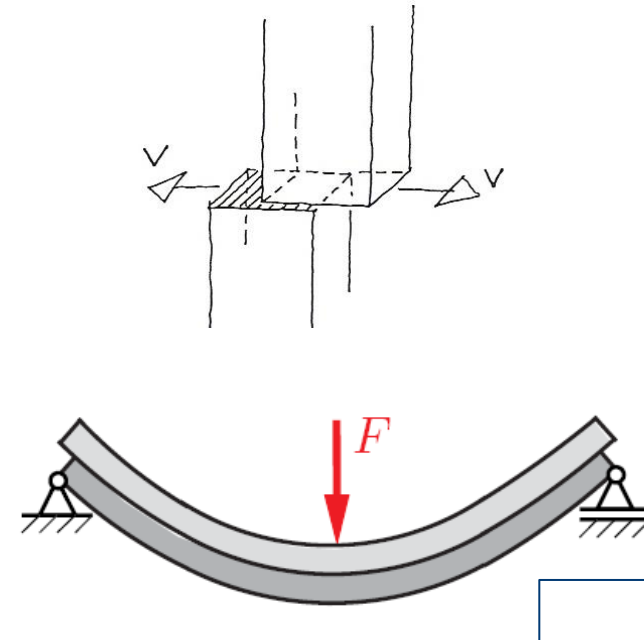
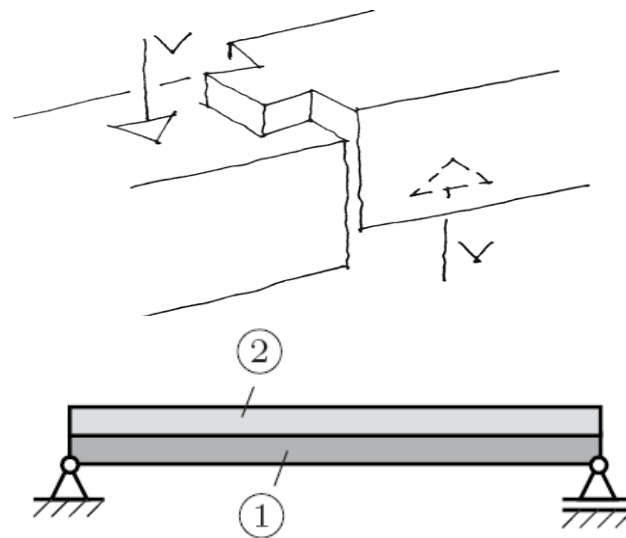


Biegespannungen



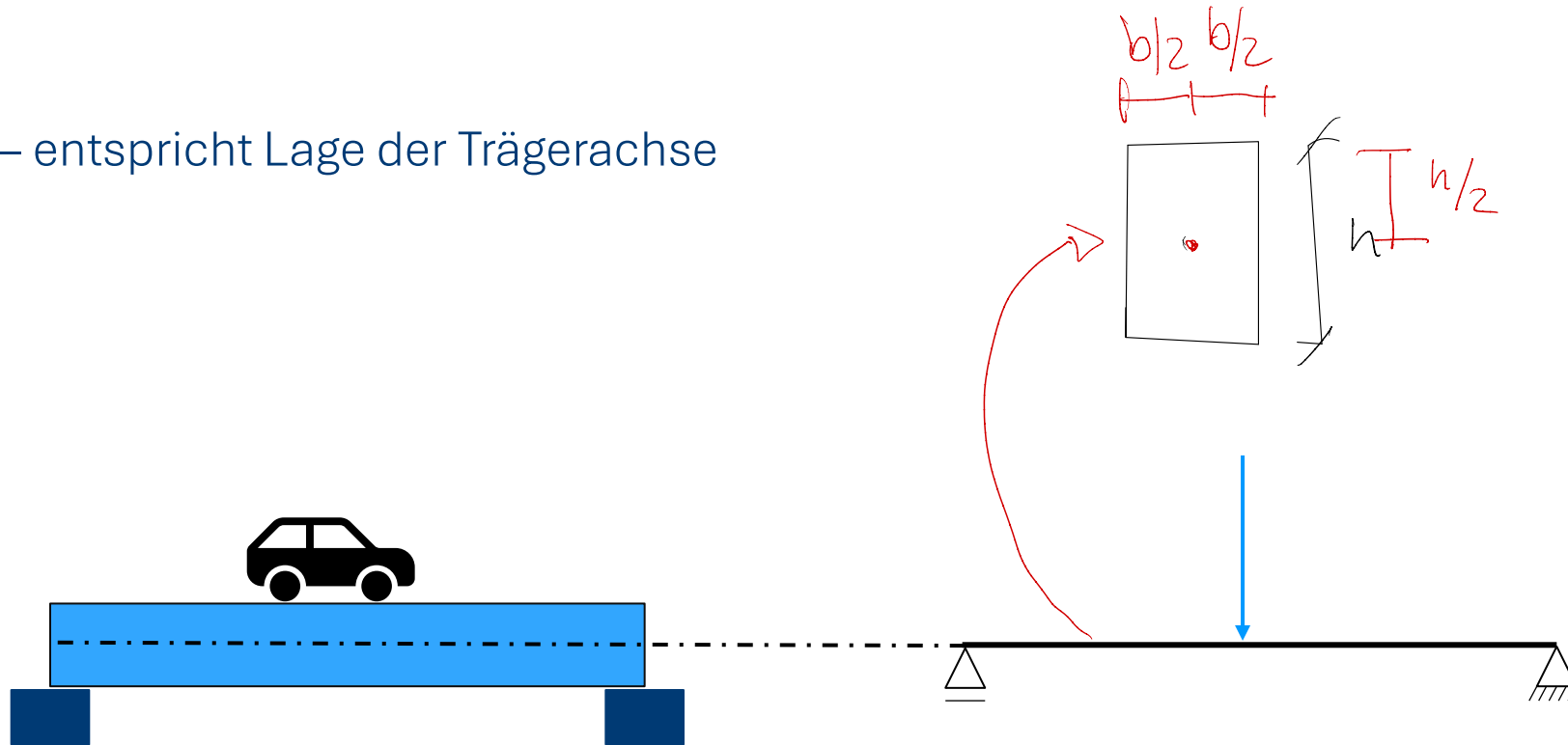
Festigkeitslehre | Begriffsbestimmung

- Spannung- Mechanische Spannungen treten aufgrund von inneren Kräften in Festkörpern, Flüssigkeiten oder Gasen auf
- Schubspannungen – parallel zur betrachteten Schnittfläche



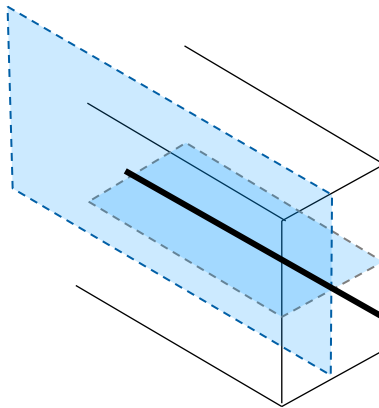
Festigkeitslehre | Querschnittswerte

Schwerpunkt – entspricht Lage der Trägerachse



Festigkeitslehre | Querschnittswerte

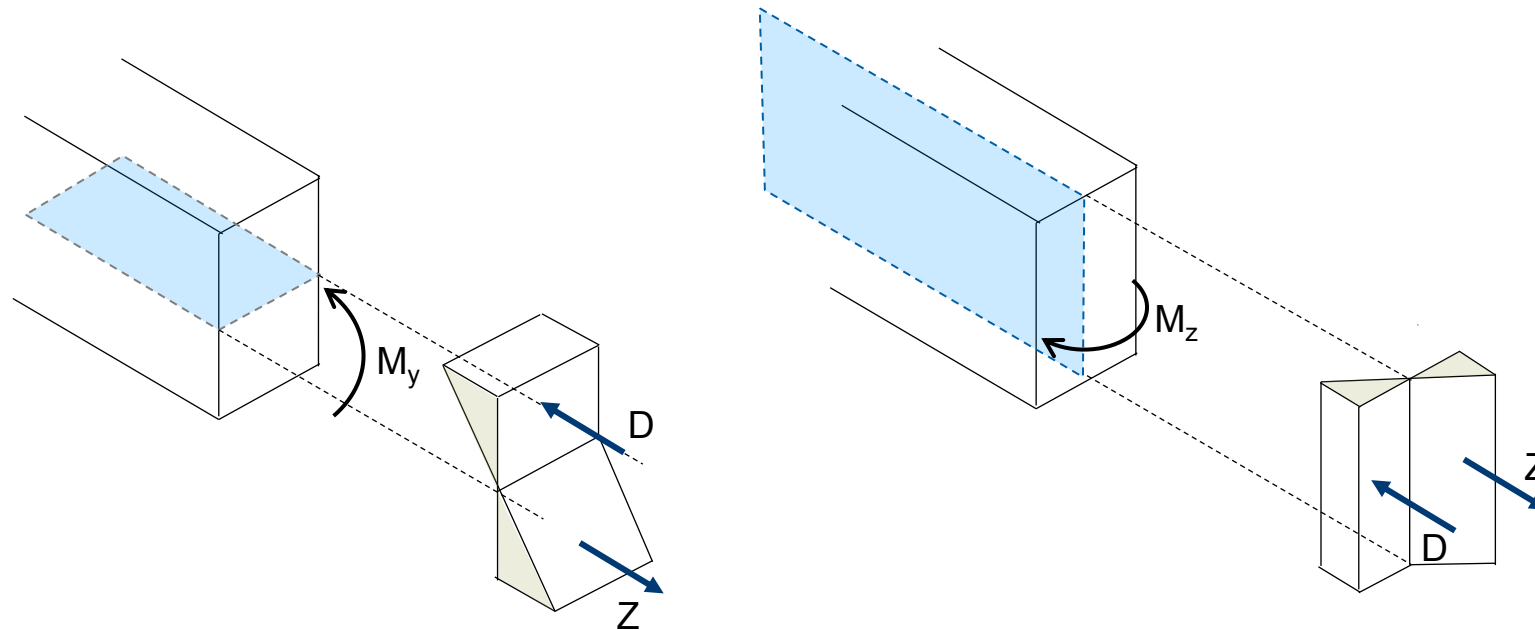
- Schwerpunkt – entspricht Lage der Trägerachse



x-Achse des
Querschnitts

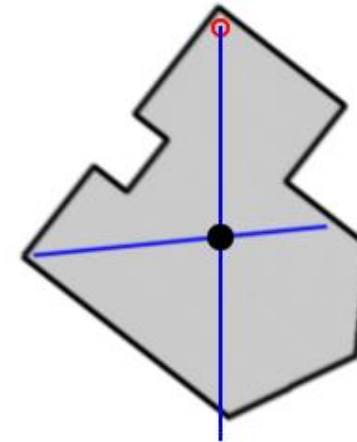
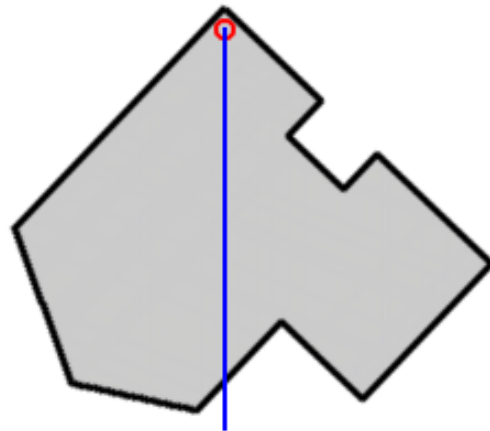
Festigkeitslehre | Querschnittswerte

Schwerpunkt – in dieser Achse wird die Spannung bei reiner Biegung = 0



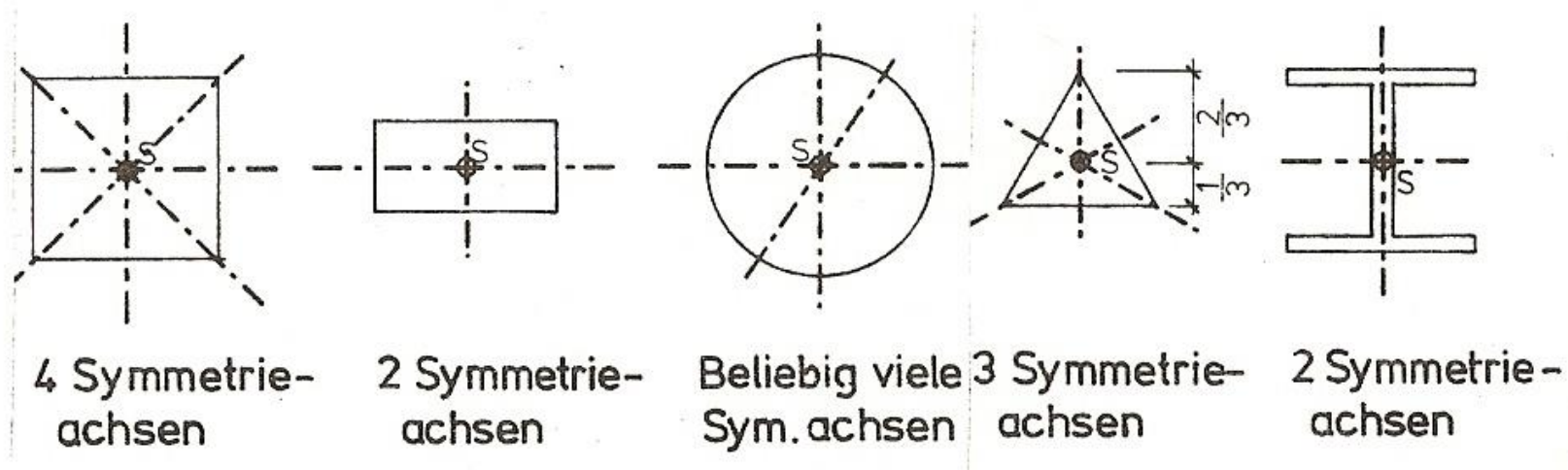
Festigkeitslehre | Schwerpunkt

- Ein beliebiger Körper kann durch Unterstützung an einem Punkt ins Gleichgewicht gebracht werden, wenn dieser Punkt der Schwerpunkt ist.

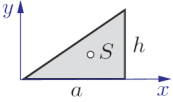
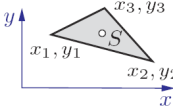


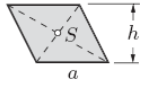
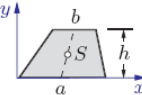
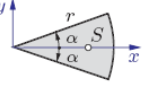
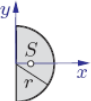
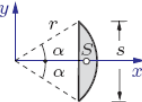
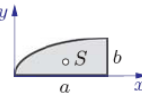
- Alle Schwerlinien schneiden sich im Schwerpunkt.
- Symmetrieachsen sind Schwerachsen

Festigkeitslehre | Schwerpunkt – sym. Querschnitte

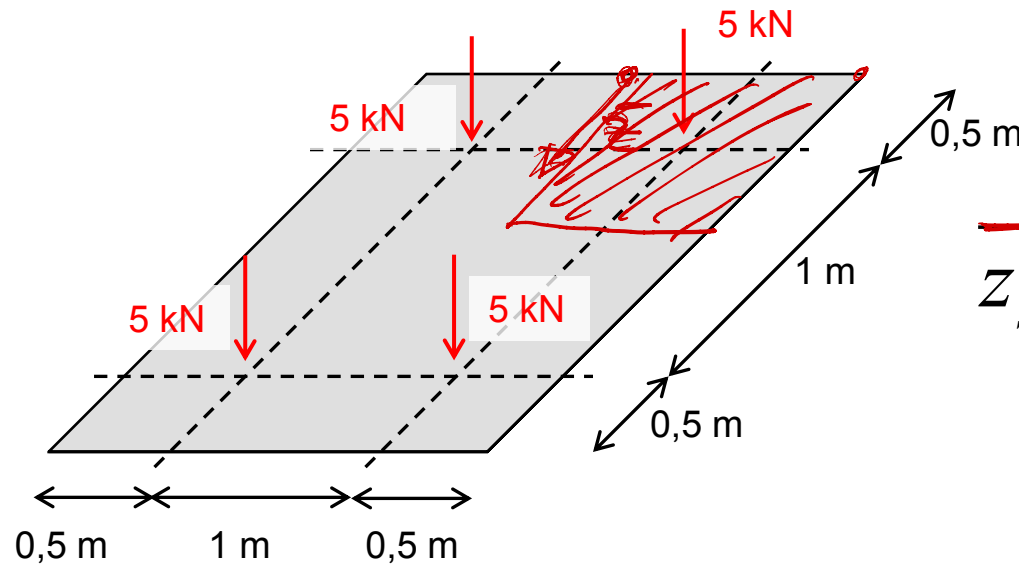


Festigkeitslehre | bekannte Schwerpunkte

Fläche	Flächeninhalt	Schwerpunktslage
rechtwinkliges Dreieck		
	$A = \frac{1}{2} ah$	$x_s = \frac{2}{3} a, \quad y_s = \frac{1}{3} h$
beliebiges Dreieck		
	$A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$	$x_s = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$ $y_s = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$

Fläche	Flächeninhalt	Schwerpunktslage
Parallelogramm		
	$A = a h$	S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen
Trapez		
	$A = \frac{h}{2} (a + b)$	S liegt auf der Seitenhalbierenden $y_s = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}$
Kreisausschnitt		
	$A = \alpha r^2$	$x_s = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Halbkreis		
	$A = \frac{\pi}{2} r^2$	$x_s = \frac{4}{3\pi} r$
Kreisabschnitt		
	$A = \frac{1}{2} r^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$x_s = \frac{s^3}{12 A}$ $= \frac{4}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$
quadratische Parabel		
	$A = \frac{2}{3} a b$	$x_s = \frac{3}{5} a$ $y_s = \frac{3}{8} b$

Festigkeitslehre | Schwerpunktbestimmung



$$\bar{z}_s = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \cdot \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n G_i}$$

Handwritten notes:
 $A_i \cdot \underbrace{t_i \cdot f_i}_{\text{Const.}}$
widete

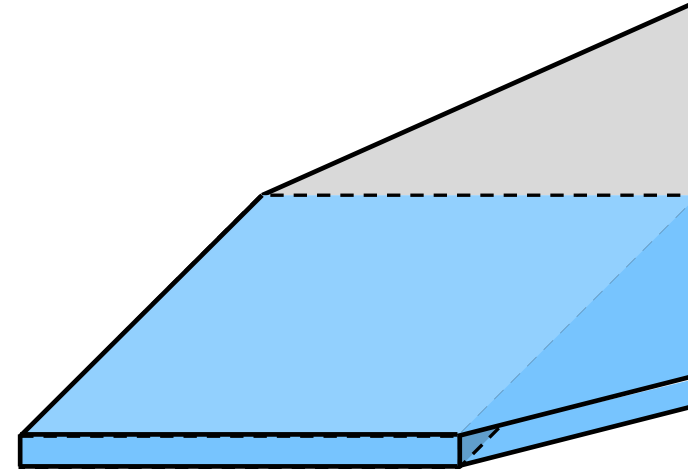
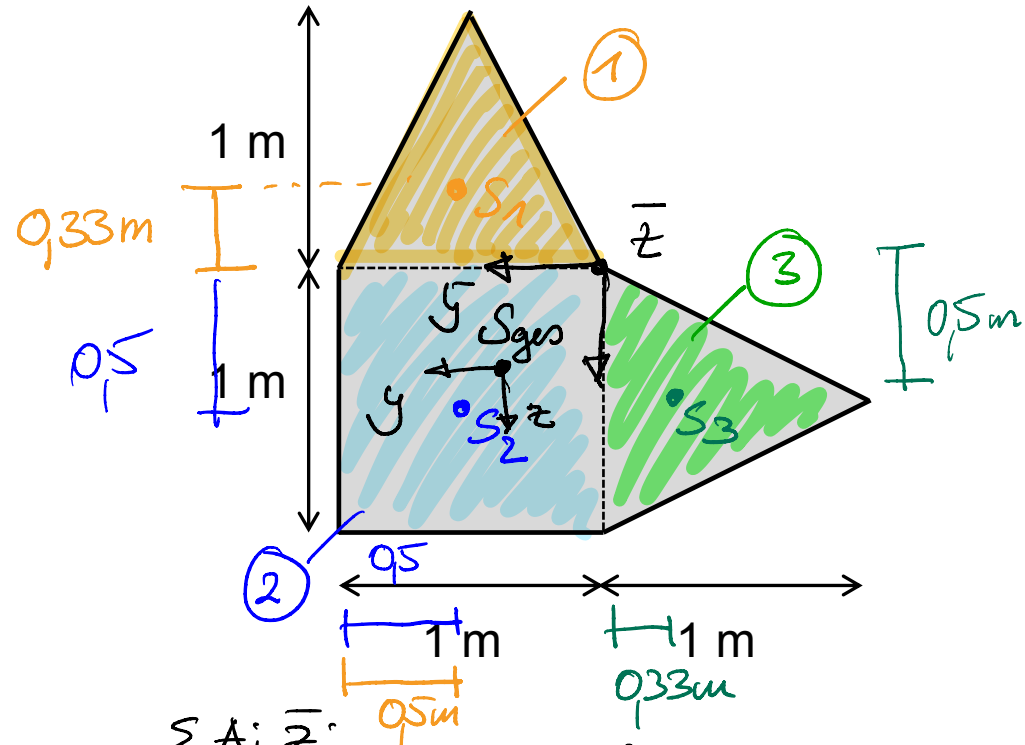
$$\bar{z}_s = \frac{\sum A_i \bar{z}_i}{\sum A_i}$$

- Sonderfall homogener Körper
mit Wichte = konstant, Dicke = konstant

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{z}_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Festigkeitslehre | Flächenschwerpunkt



$$\bar{z}_s = \frac{\sum A_i \bar{z}_i}{\sum A_i} = \frac{0,5(-0,33) + 1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5}{2}$$

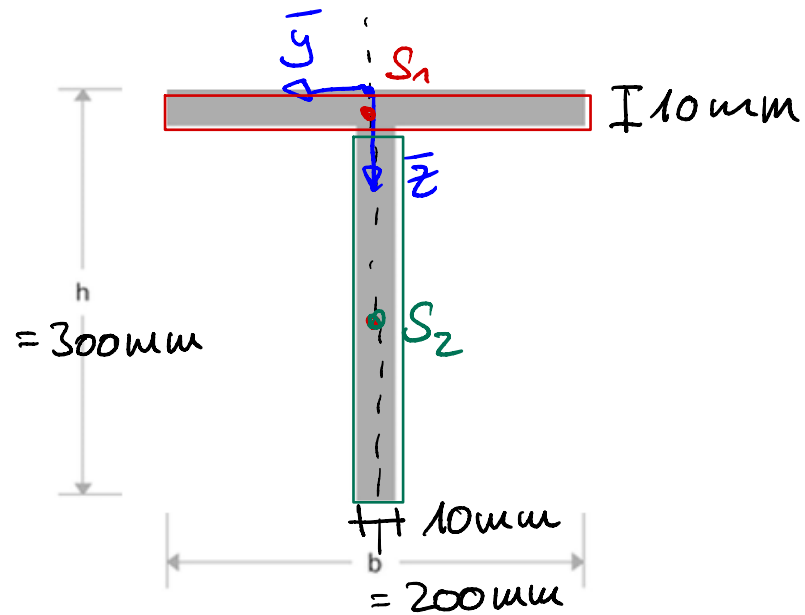
$$= 0,30 \text{ m}$$

$$\bar{y}_s = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 + 0,5(-0,33)}{2}$$

$$= 0,3 \text{ m}$$

N°	$A_i \text{ [m}^2\text{]}$	$\bar{z}_i \text{ [m]}$	$\bar{y}_i \text{ [m]}$
1	0,5	-0,33	0,5
2	1	0,5	0,5
3	0,5	0,5	-0,33
$\sum A_i = 2 \text{ m}^2$			

Festigkeitslehre | Flächenschwerpunkt



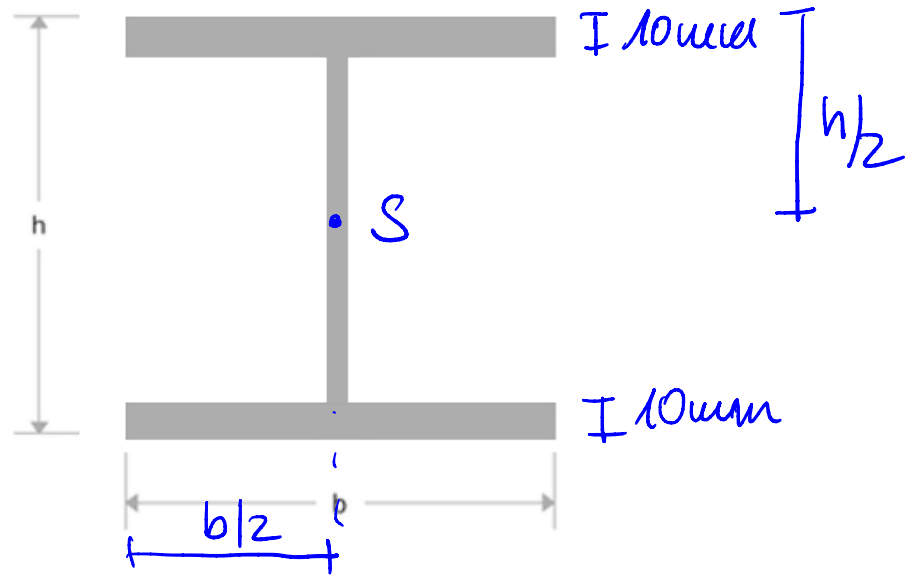
$$\bar{y}_s = 0$$

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{z}_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$= \frac{\underbrace{A_1}_{1 \cdot 20} \cdot \underbrace{\bar{z}_1}_{0,5\text{ cm}} + \underbrace{A_2}_{29 \cdot 1} \cdot \underbrace{\bar{z}_2}_{14,5 + 1}}{\underbrace{1 \cdot 20 + 29 \cdot 1}_{49\text{ cm}^2}} = 9,4\text{ cm}$$

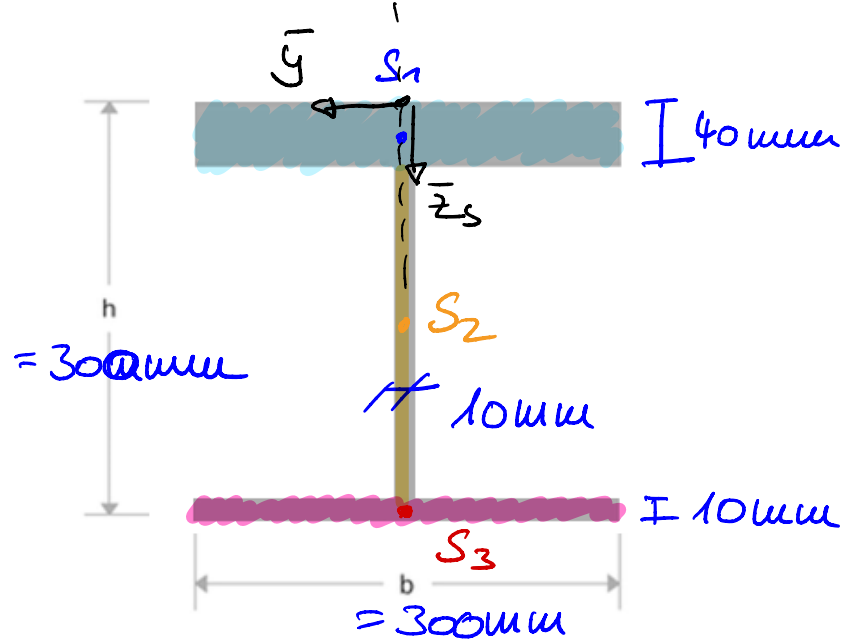
Festigkeitslehre | Flächenschwerpunkt



$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{z}_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Festigkeitslehre | Flächenschwerpunkt

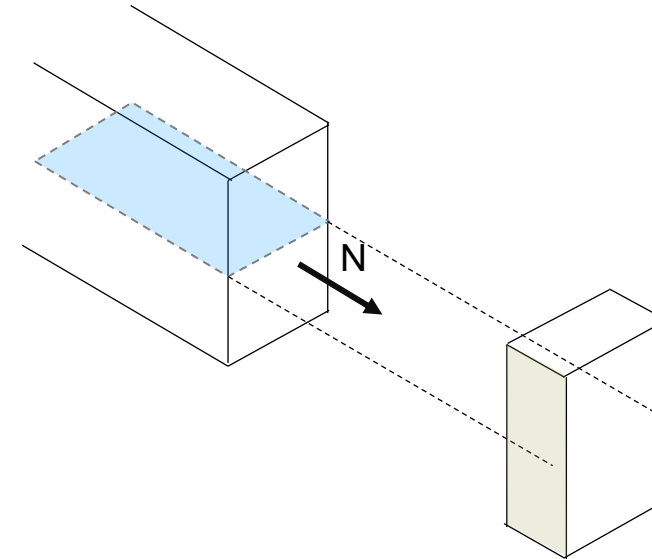
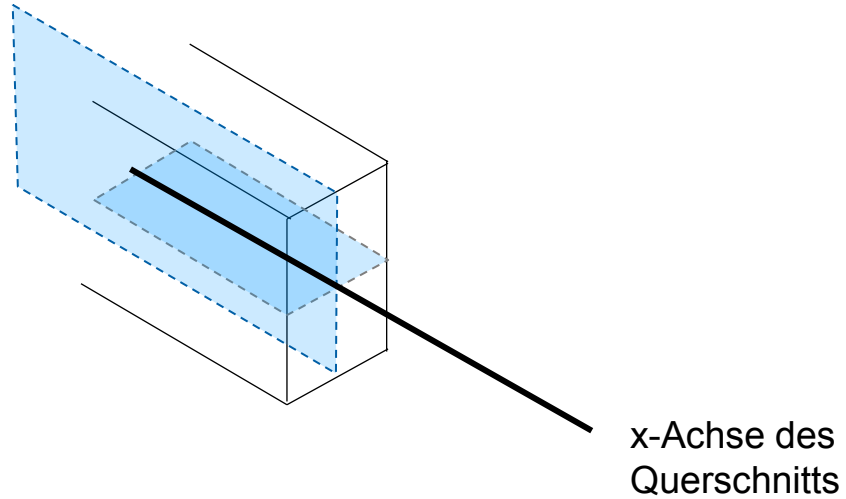


$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = 0$$

$$\bar{z}_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{30 \cdot 4 \cdot 2 + 25 \cdot 1 \cdot (4 + 125) + 30 \cdot 1 \cdot (30 - 0,5)}{30 \cdot 4 + 25 \cdot 1 + 30 \cdot 1} = \frac{1537,5}{175} = 8,8 \text{ cm}$$

175 cm^2

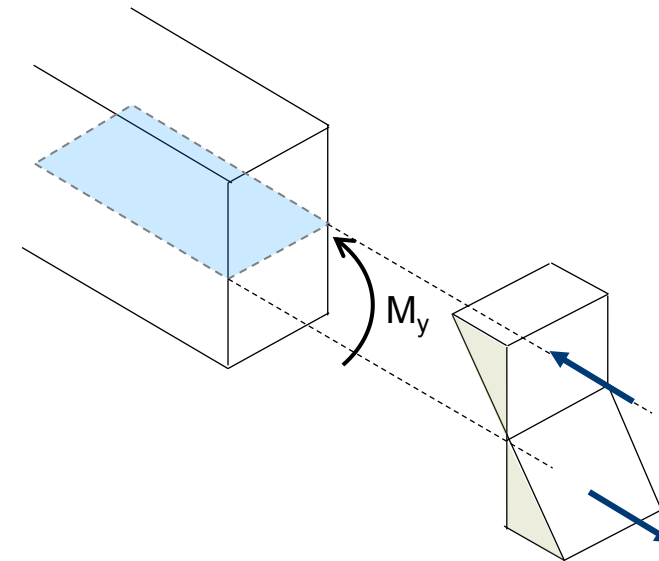
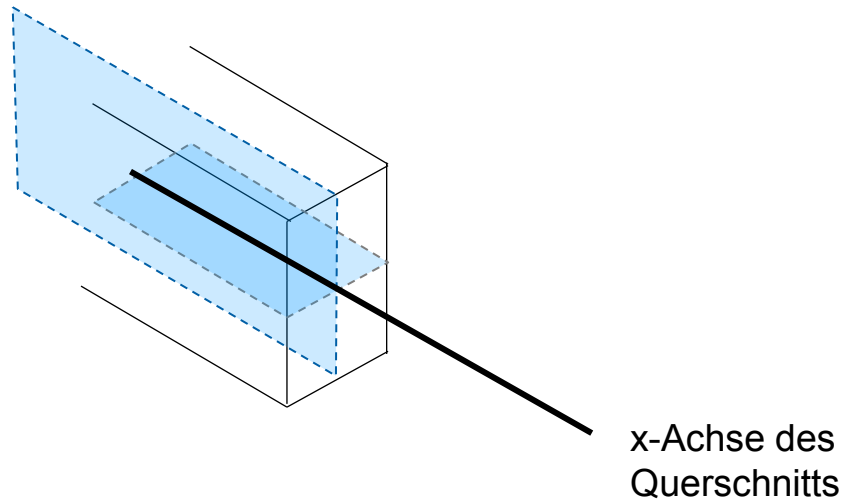
Festigkeitslehre | Spannung infolge Normalkraft



Normalspannung $\sigma = N / A$ [N/mm², kN/cm²]

- (Kraft pro Fläche)
- N = Normalkraft [N, kN]
- A = Querschnittsfläche [mm², cm²]

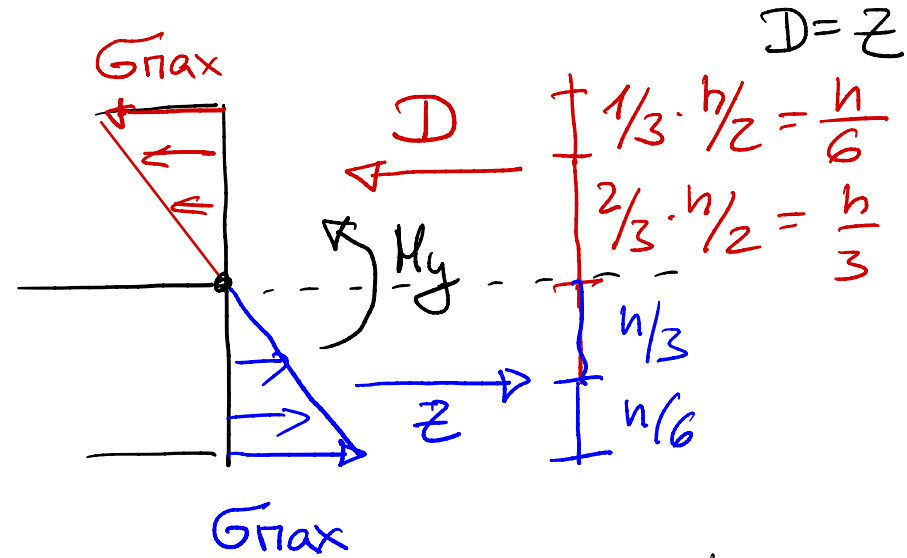
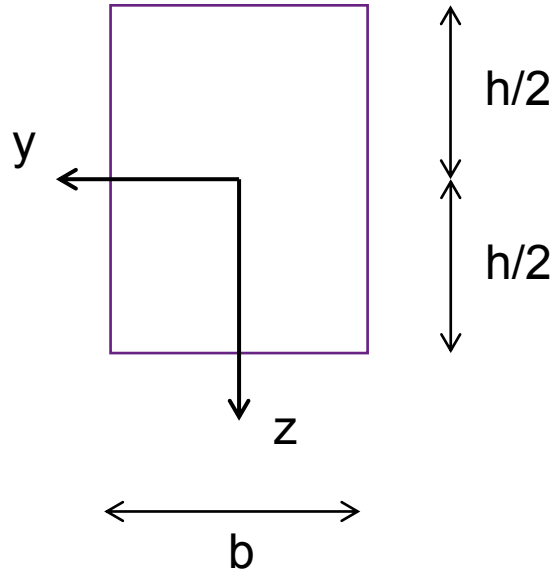
Festigkeitslehre | Spannung infolge Biegung



$$\sigma = M / W \text{ [N/mm}^2, \text{ kN/cm}^2\text{]}$$

- M = Moment [kNm, kNcm, Nmm]
- W = Widerstandsmoment des Querschnitts [m^3 , cm^3 , mm^3]
= $I / \max z$; I = Flächenträgheitsmoment

Festigkeitslehre | Flächenträgheitsmoment



$$M_y = D \cdot \frac{h}{3} + z \cdot \frac{h}{3} = z \cdot \frac{zh}{3}$$

mit $z = \sigma_{max} \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot b$

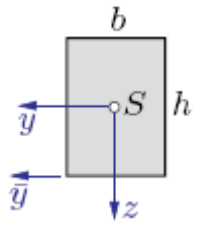
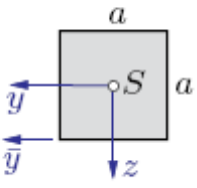
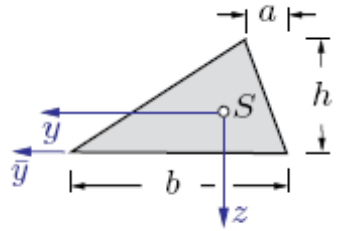
$$M_y = \sigma_{max} \cdot \frac{h}{4} \cdot b \cdot \frac{zh}{3} = \sigma_{max} \cdot \frac{h^2 \cdot b}{6}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{\left(\frac{h^2 b}{6}\right)} = \text{Widerstandsmoment eines Rechteckquerschnitts}$$

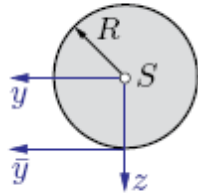
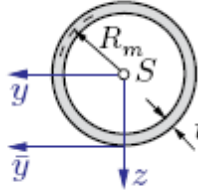
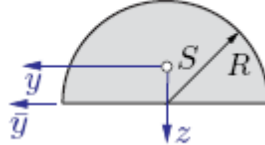
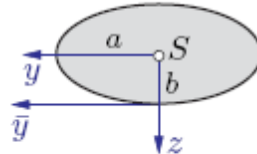
$$\sigma(z) = \frac{M_y}{z} \cdot z \text{ bei } z = \frac{h}{2} \leadsto \sigma_{max} = \sigma\left(z = \frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{M_y}{\frac{h^2 \cdot b}{6}} = \frac{M_y}{z} \cdot \frac{h}{2} \leadsto z = \frac{h^3 \cdot b}{12} = J_y$$

Festigkeitslehre | bekannte Flächenträgheitsmoment

Fläche	I_y	I_z	I_{yz}	I_p	$I_{\bar{y}}$
Rechteck 	$\frac{b h^3}{12}$	$\frac{h b^3}{12}$	0	$\frac{b h}{12} (h^2 + b^2)$	$\frac{b h^3}{3}$
Quadrat 	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	0	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{a^4}{3}$
Dreieck 	$\frac{b h^3}{36}$	$\frac{b h}{36} (b^2 - b a + a^2)$	$-\frac{b h^2}{72} (b - 2 a)$	$\frac{b h}{36} (h^2 + b^2 - b a + a^2)$	$\frac{b h^3}{12}$

Festigkeitslehre | bekannte Flächenträgheitsmoment

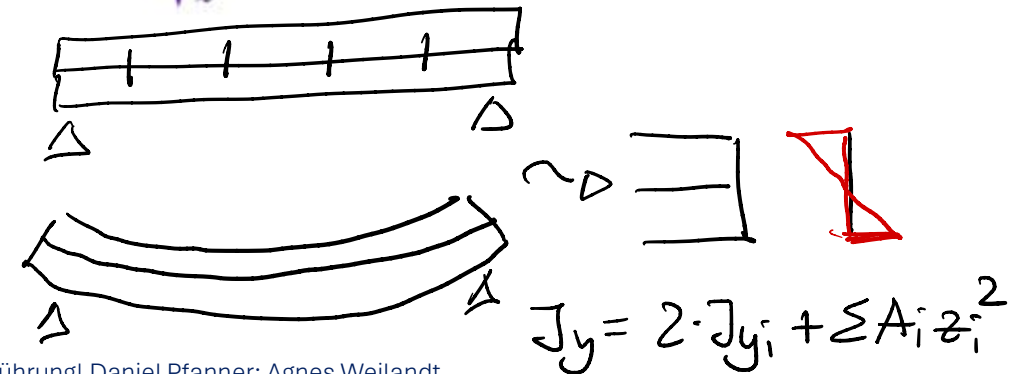
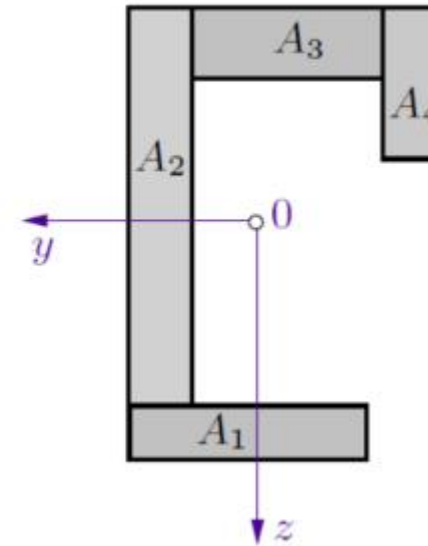
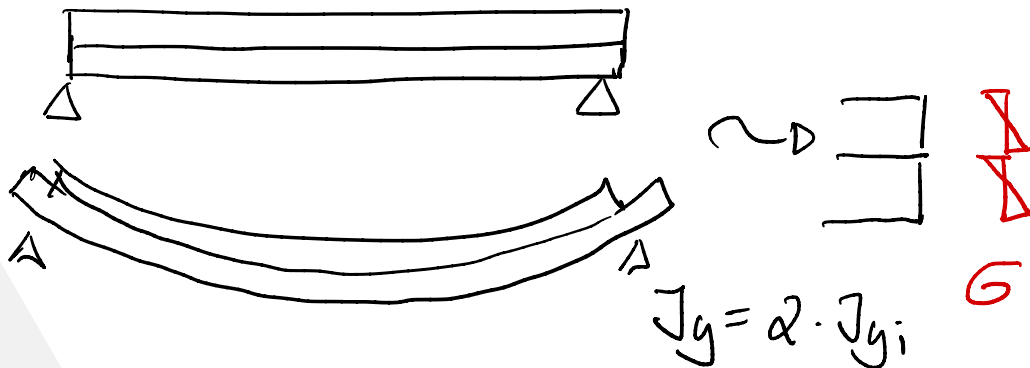
Kreis 	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0	$\frac{\pi R^4}{2}$	$\frac{5\pi}{4} R^4$
dünner Kreisring $t \ll R_m$ 	$\pi R_m^3 t$	$\pi R_m^3 t$	0	$2 \pi R_m^3 t$	$3 \pi R_m^3 t$
Halbkreis 	$\frac{R^4}{72 \pi} (9 \pi^2 - 64)$	$\frac{\pi R^4}{8}$	0	$\frac{R^4}{36 \pi} (9 \pi^2 - 32)$	$\frac{\pi R^4}{8}$
Ellipse 	$\frac{\pi}{4} a b^3$	$\frac{\pi}{4} b a^3$	0	$\frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2)$	$\frac{5\pi}{4} a b^3$

Festigkeitslehre | Satz von Steiner

Flächenträgheitsmomente bei dünnwandigen offenen Profilen

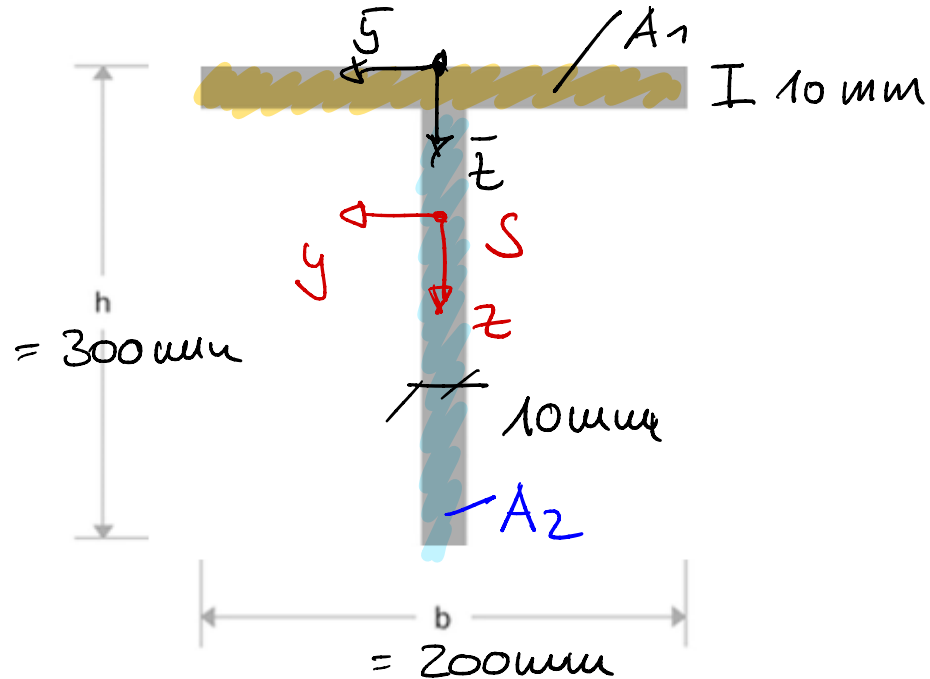
$$I_y = \sum (I_{yi} + A_i \cdot z_i^2)$$

$$I_z = \sum (I_{zi} + A_i \cdot y_i^2)$$



Festigkeitslehre | Satz von Steiner

Flächenträgheitsmomente bei dünnwandigen offenen Profilen



$$\bar{z}_S = \frac{\overbrace{A_1}^{1 \cdot 20} \cdot \overbrace{\bar{z}_1}^{9,5\text{ cm}} + \overbrace{A_2}^{29 \cdot 1} \cdot \overbrace{\bar{z}_2}^{(14,5 + 1)}}{\underbrace{1 \cdot 20 + 29 \cdot 1}_{49\text{ cm}^2}} = 9,4\text{ cm}$$

$$J_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$J_z = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

$$I_y = \sum (I_{yi} + A_i \cdot z_i^2)$$

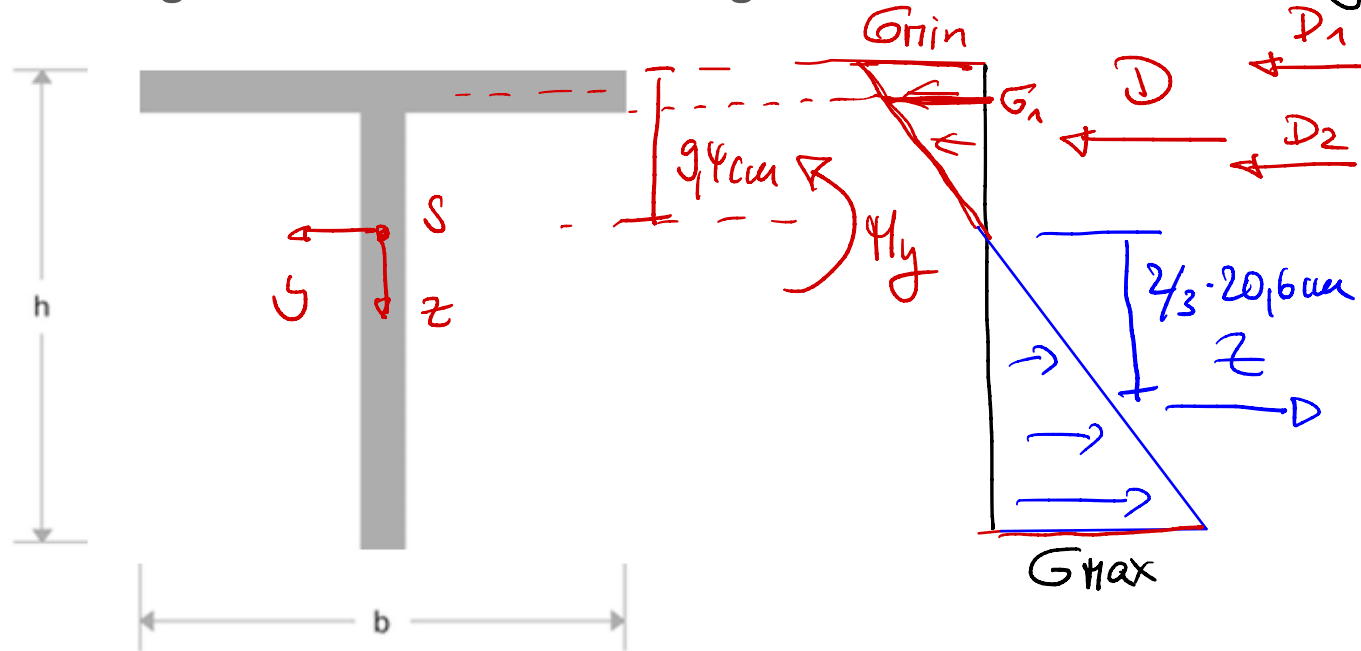
$$I_z = \sum (I_{zi} + A_i \cdot y_i^2)$$

$$\begin{aligned} J_y &= \frac{1^3 \cdot 20}{12} + \frac{29^3 \cdot 1}{12} + 20\text{ cm}^2 \cdot (\overbrace{9,5 - 9,4}^{\bar{z}_i - \bar{z}_S})^2 + 29 \cdot (15,5 - 9,4)^2 \\ &= 240\text{ cm}^4 + 2032,4\text{ cm}^4 + 1584\text{ cm}^4 + 1079\text{ cm}^4 \\ &= 4935\text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{20^3 \cdot 1}{12} + \frac{1^3 \cdot 29}{12} + \sum A_i \cdot \overbrace{y_i^2}^{\parallel 0} \\ &= 669\text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Festigkeitslehre | Satz von Steiner

Flächenträgheitsmomente bei dünnwandigen offenen Profilen



$$M_y = 100 \text{ kNm}$$

$$I_y = \sum (I_{yi} + A_i \cdot z_i^2)$$

$$I_z = \sum (I_{zi} + A_i \cdot y_i^2)$$

$$z_{\max} = 30 - 9,4 = 20,6 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \sum M_s &= 430 \cdot \frac{2}{3} \cdot 20,6 \text{ cm} \\ &+ 360 \cdot 8,9 \text{ cm} + 71,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,4 \text{ cm} \\ &= 9509 \text{ kNm} \approx 95 \text{ kNm} \\ &\approx 100 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} \cdot z$$

$$\sigma_{\max} (z = 20,6) = \frac{100 \text{ kNm} \cdot 100}{4935 \text{ cm}^4} \cdot 20,6 \text{ cm} = 41,7 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{\min} (z = -9,4 \text{ cm}) = \frac{100 \cdot 100 \text{ kNm}}{4935 \text{ cm}^4} \cdot (-9,4 \text{ cm}) = -19,0 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_1 (z = -8,4 \text{ cm}) = -17,0 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$D_1 = 360 \text{ kN}$$

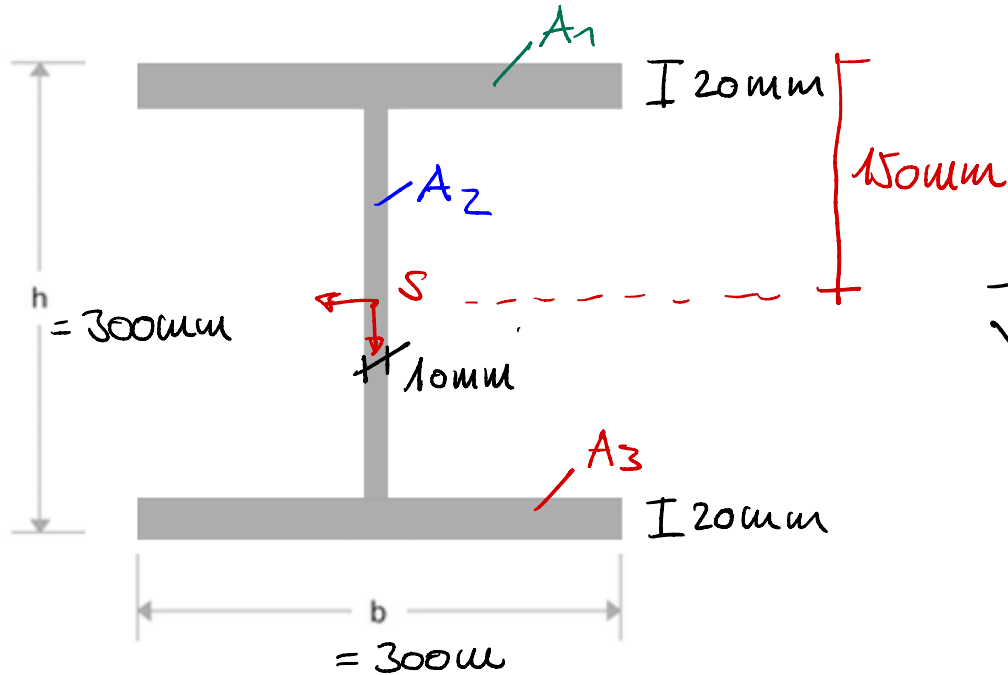
$$D = (17 + 19) / 2 \cdot 20 \cdot 1 + \frac{17}{2} \cdot 8,4 \cdot 1 = 431,4 \text{ kN}$$

$$D_2 = 71,4 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} z &= 41,7 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} / 2 \cdot 1 \text{ cm} \cdot 20,6 \text{ cm} \\ &= 430 \text{ kN} \end{aligned}$$

Festigkeitslehre | Satz von Steiner

Flächenträgheitsmomente bei dünnwandigen offenen Profilen



kleiner Anteil des Flansche
≙ 95% des Gesamt - J_y !

$$I_y = \sum (I_{yi} + A_i \cdot \underline{z_i^2})$$

$$I_z = \sum (I_{zi} + A_i \cdot y_i^2)$$

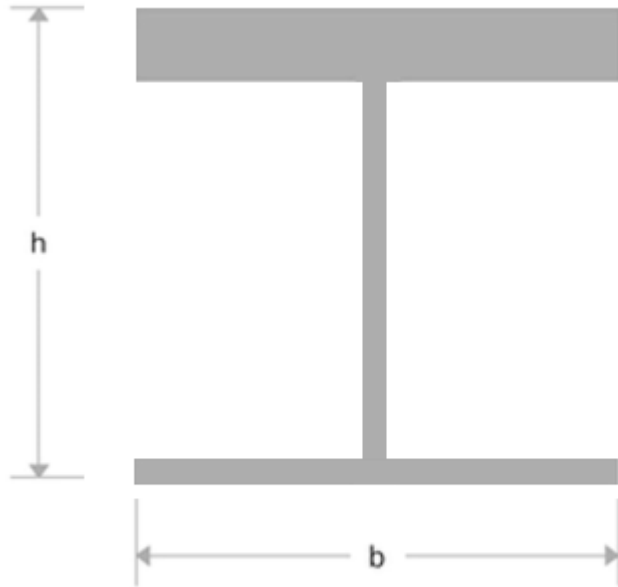
$$\begin{aligned} J_y &= \frac{2^3 \cdot 30}{12} + 2 \cdot 30 \cdot (14)^2 \\ &+ \frac{26^3 \cdot 1}{12} + 0 \\ &+ \frac{2^3 \cdot 30}{12} + 2 \cdot 30 \cdot (14)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 20 \text{ cm}^4 + 11760 \text{ cm}^4 \\ &+ 1465 \text{ cm}^4 \\ &+ 20 \text{ cm}^4 + 11760 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$J_y = 25.025 \text{ cm}^4$$

Festigkeitslehre | Satz von Steiner

Flächenträgheitsmomente bei dünnwandigen offenen Profilen



$$J_y = 21.350 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum (I_{yi} + A_i * z_i^2)$$

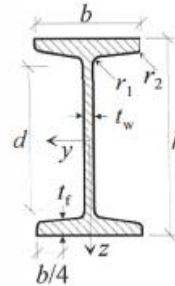
$$I_z = \sum (I_{zi} + A_i * y_i^2)$$

Festigkeitslehre | bekannte Flächenträgheitsmoment

Stahlbauprofile

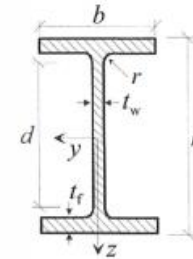
8.171

Schmale I-Träger



Mittelbreite I-Träger

IPEa
IPEo
IPEv
IPE siehe S. 8.161 f.

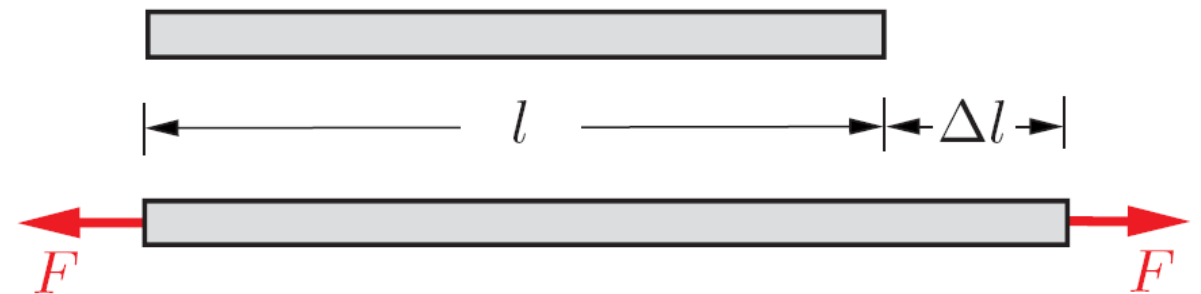


W_{p1}
[Diagram showing a cross-section with a vertical line and a horizontal line, possibly indicating a specific axis or property.]

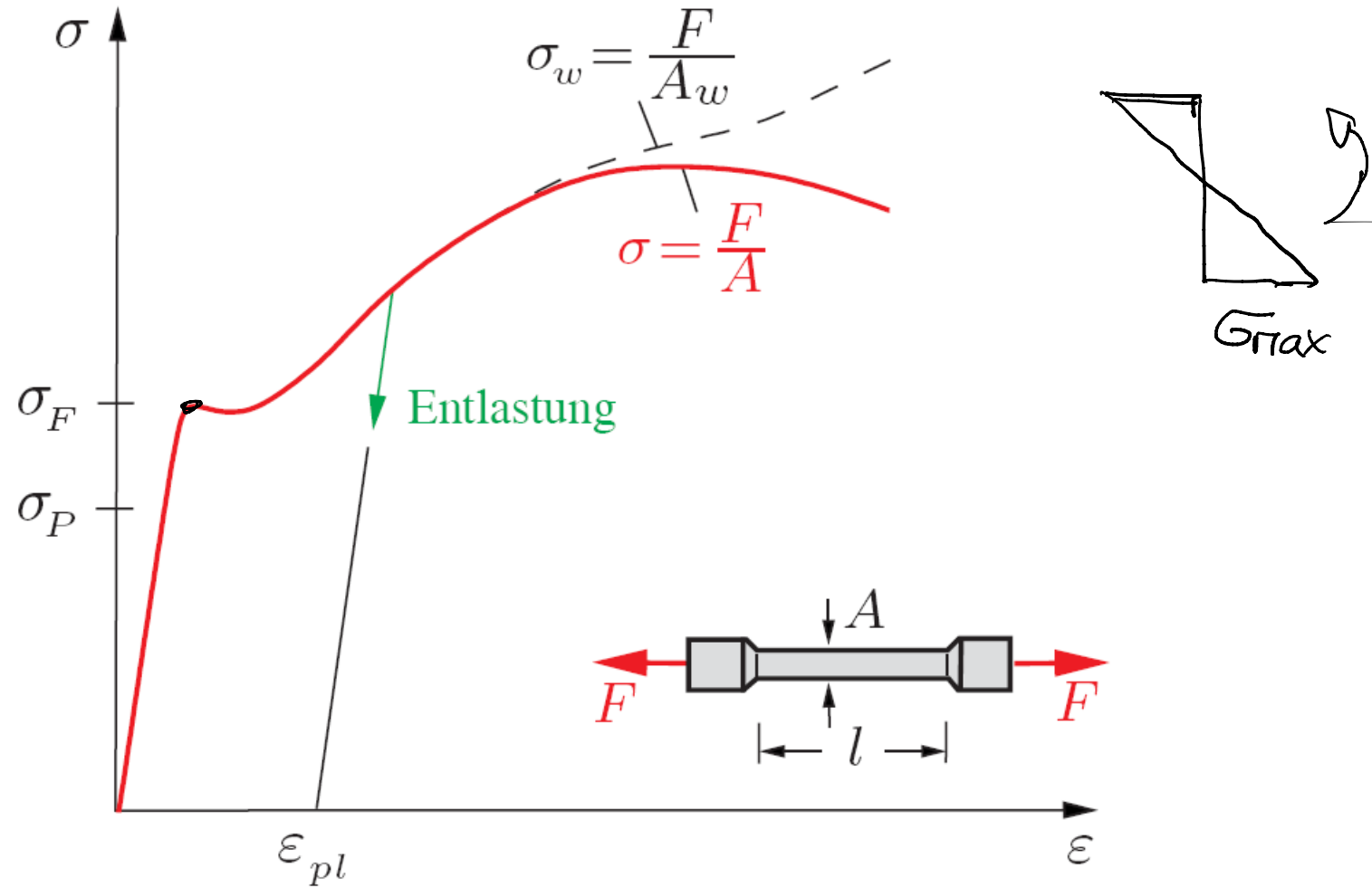
I-Reihe nach DIN 1025-1 (04.09) und DIN EN 10 034 (03.94)																
Nenn- höhe	Profilmaße						Statische Werte									g kN/m
	h mm	b mm	t _w =r ₁ mm	t _f mm	r ₂ mm	d mm	A cm ²	I _y cm ⁴	W _{el,y} cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴	W _{el,z} cm ³	i _z cm	S _y cm ³		
80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	7,57	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	0,059	
100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	10,6	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	0,083	
120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	14,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	0,111	
140	140	66	5,7	8,6	3,4	109	18,2	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	47,7	0,143	
160	160	74	6,3	9,5	3,8	125	22,8	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	0,179	
180	180	82	6,9	10,4	4,1	142	27,9	1 450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	0,219	
200	200	90	7,5	11,3	4,5	159	33,4	2 140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	0,262	
220	220	98	8,1	12,2	4,9	176	39,5	3 060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	0,311	
240	240	106	8,7	13,1	5,2	192	46,1	4 250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	0,362	
260	260	113	9,4	14,1	5,6	208	53,3	5 740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	0,419	
280	280	119	10,1	15,2	6,1	225	61,0	7 590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	0,479	
300	300	125	10,8	16,2	6,5	241	69,0	9 800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	0,542	
320	320	131	11,5	17,3	6,9	258	77,7	12 510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	0,610	
340	340	137	12,2	18,3	7,3	274	86,7	15 700	923	13,5	674	98,4	2,80	540	0,680	
360	360	143	13,0	19,5	7,8	290	97,0	19 610	1 090	14,2	818	114	2,90	638	0,761	
400	400	155	14,4	21,6	8,6	323	118	29 210	1 460	15,7	1 160	149	3,13	857	0,924	
450	450	170	16,2	24,3	9,7	363	147	45 850	2 040	17,7	1 730	203	3,43	1 200	1,15	
500	500	185	18,0	27,0	10,8	404	179	68 740	2 750	19,6	2 480	268	3,72	1 620	1,41	
550	550	200	19,0	30,0	11,9	445	212	99 180	3 610	21,6	3 490	349	4,02	2 120	1,66	
600	600	215	21,6	32,1	13,0	485	254	139 000	4 630	23,4	4 670	434	4,30	2 730	1,99	

Festigkeitslehre | Dehnung

- Dehnung ist das Verhältnis der
 - Längenänderung zur Ausgangslänge.
 - Die Dehnung $\varepsilon = \Delta l / l$ ist dimensionslos.
-
- Verlängerung: positiv
 - Verkürzung: negativ



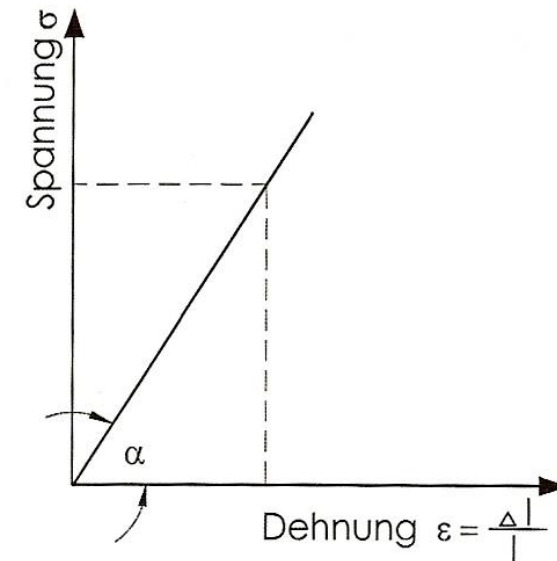
Festigkeitslehre | Dehnung - werkstoffabhängig



Festigkeitslehre | Hooksches Gesetz

Spannungen und Dehnungen sind im elastischen Bereich proportional zueinander.

$$\sigma = E \varepsilon$$



Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Biegung – Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y und M_z

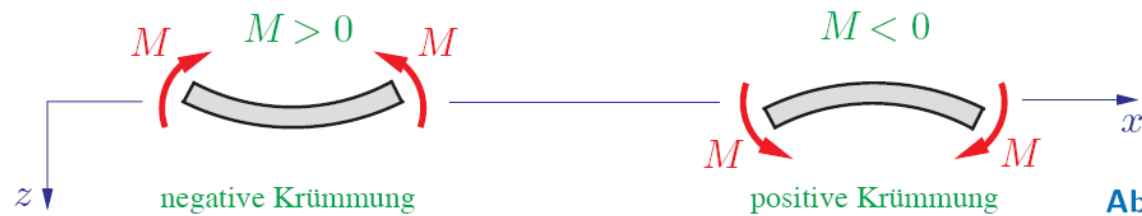
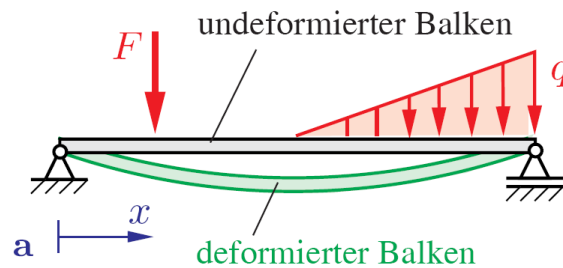
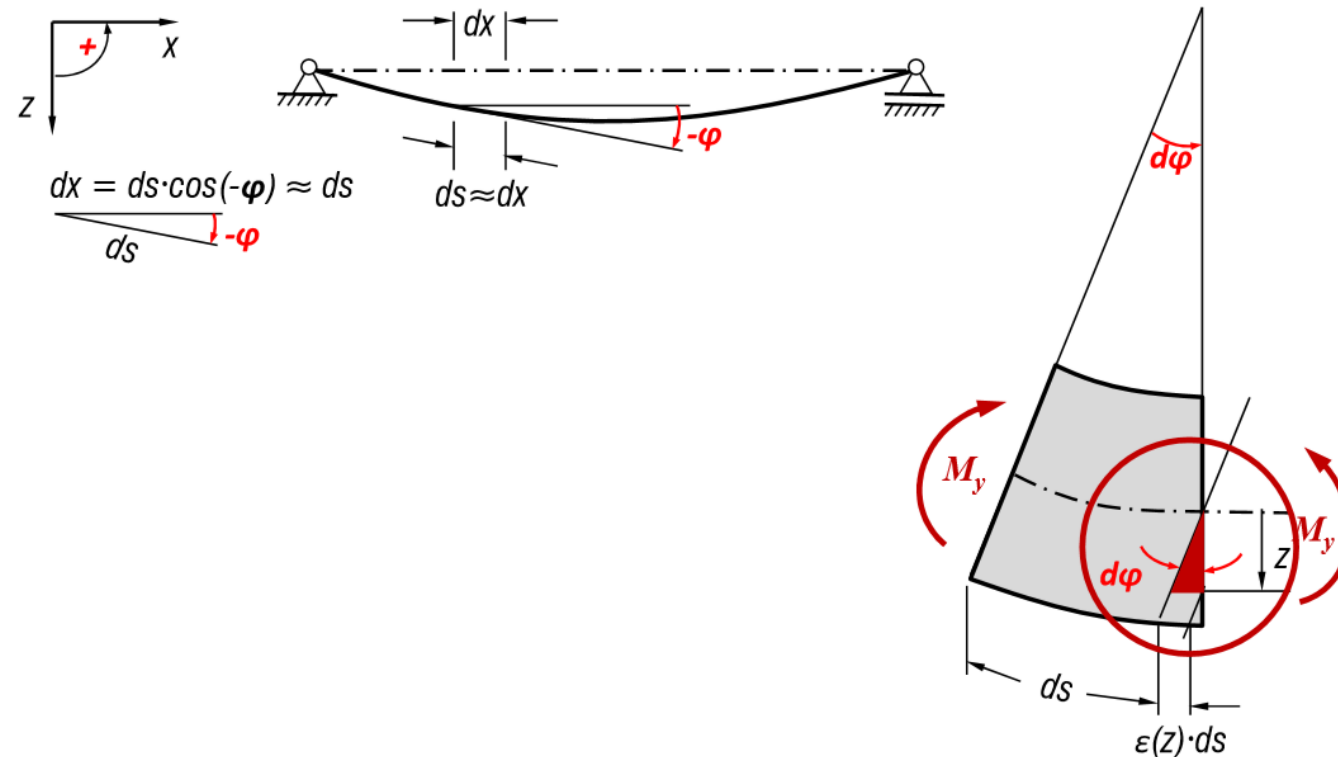


Abb. 4.18

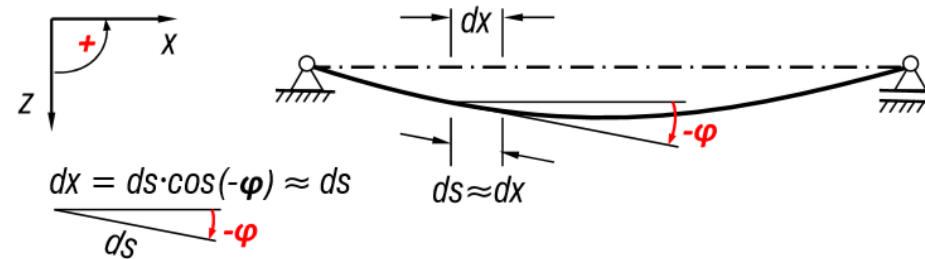
Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



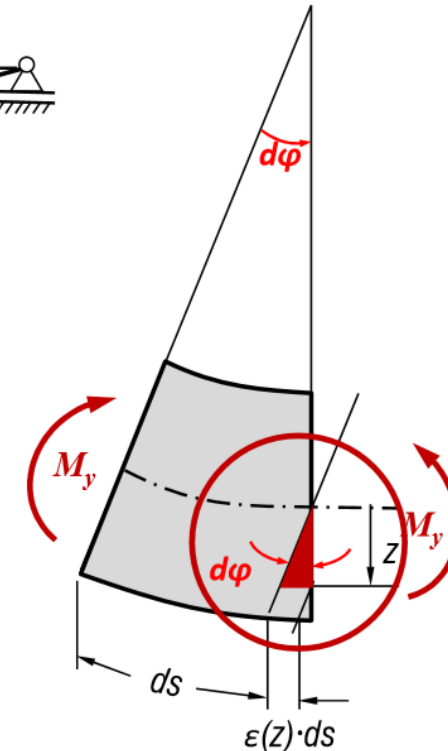
Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d\varphi}{dx} = -w''$$

Krümmung = -(2. Ableitung der Durchbiegung)

mit:
$$d\varphi = \frac{M_y}{EI_y} dx$$

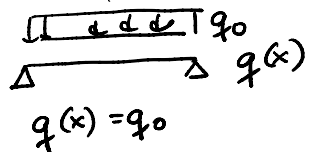
folgt:
$$M_y = -EI_y w''$$



Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y

$$w(x = \frac{l}{2}) = \frac{5}{384} \cdot q \cdot l^4$$



$$V(x) = -q_0 \cdot x + C_1$$

$$H(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$$

$$w'(x) = -\frac{1}{6} q_0 x^3 + C_1 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$w(x) = -\frac{1}{24} q_0 x^4 + C_1 \cdot \frac{1}{6} x^3 + C_2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

$$EI_y w(x) = -\iint M_y(x) dx + C_1 \cdot x + C_2$$

Durchbiegung

$$EI_y w'(x) = -\int M_y(x) dx + C_1$$

Verdrehung

$$EI_y w''(x) = -M_y(x)$$

Krümmung

$$EI_y w'''(x) = -\frac{dM_y(x)}{dx} = -V_z(x)$$

Querkraft

$$EI_y w''''(x) = -\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} = -\frac{dV_z(x)}{dx} = q_z(x)$$

Last