

Mechanik und Tragkonstruktion

Verformungen/
Dimensionierung

Inhalt Mechanik und Tragkonstruktion

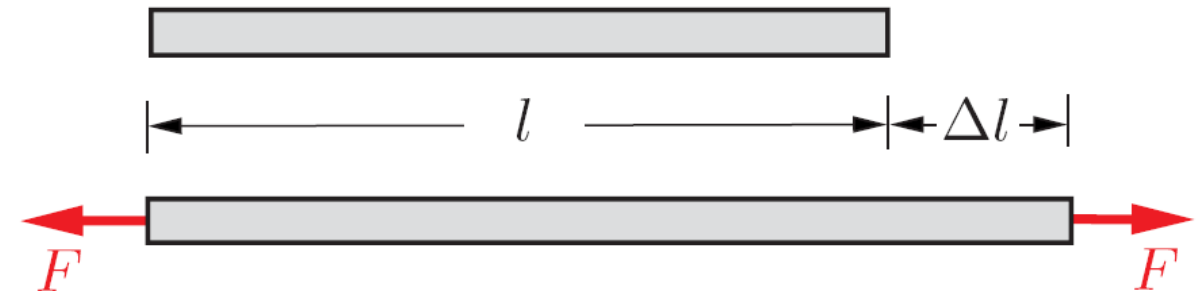
1. Grundbegriffe/Herangehensweise an eine Planungsaufgabe/Beanspruchungen
2. Zentrales Kraftsystem
3. Allgemeines Kraftsystem
4. Tragwerke/Lasten
5. Biegeträger – Schnittkräfte
6. Festigkeitslehre – Querschnittskennwerte, **Berechnung von Spannungen, Verformungen, Dimensionierung**

Festigkeitslehre | Inhalt heute

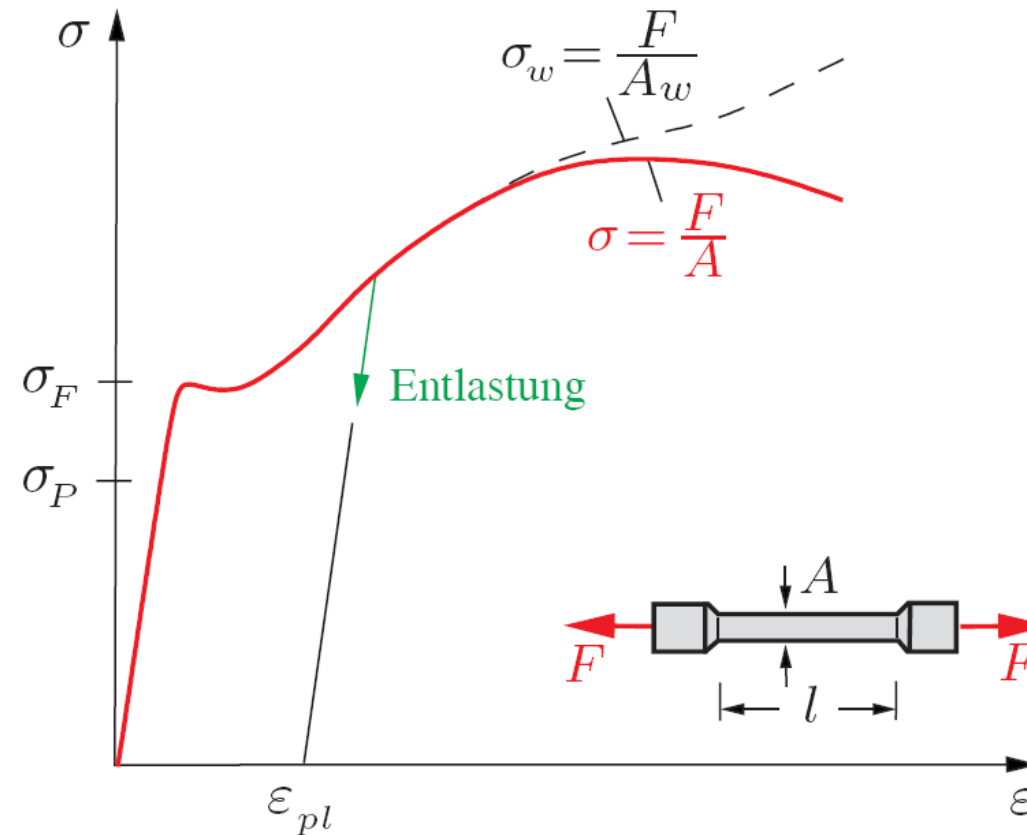
- Verformung infolge Längsdehnung
- Verformung infolge Krümmung
- Dimensionierung anhand von Beispielen

Festigkeitslehre | Dehnung

- Dehnung ist das Verhältnis der
 - Längenänderung zur Ausgangslänge.
 - Die Dehnung $\varepsilon = \Delta l / l$ ist dimensionslos.
-
- Verlängerung: positiv
 - Verkürzung: negativ



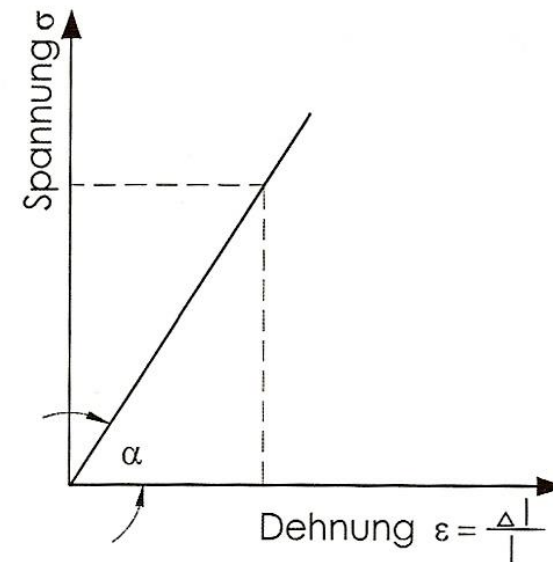
Festigkeitslehre | Dehnung - werkstoffabhängig



Festigkeitslehre | Hooksches Gesetz

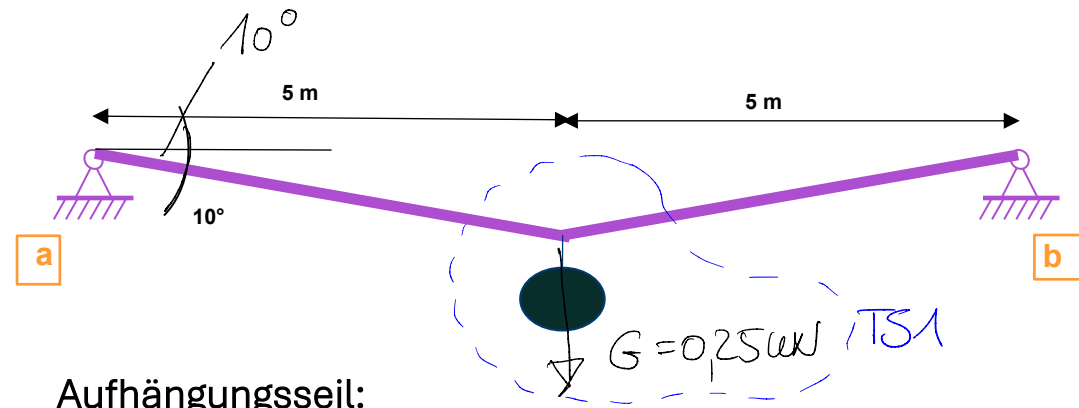
Spannungen und Dehnungen sind im elastischen Bereich proportional zueinander.

$$\sigma = E \varepsilon$$



Festigkeitslehre | Verformung infolge Dehnung

- Längsdehnung infolge Normalkraft



Aufhängungsseil:

$A = 3,04 \text{ cm}^2$ (Drahtseil $d = 2,5 \text{ cm}$)
 alternativ (Drahtseil $d = 2 \text{ mm}$) $A = 1,55 \text{ mm}^2$

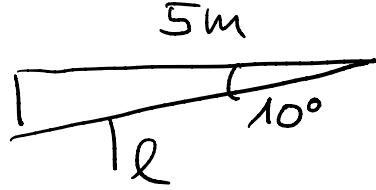
$E = 160.000 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{\text{zul}} = 1570/1,1 \approx 1400 \text{ N/mm}^2$

$G_{\text{Leuchte}} = 0,25 \text{ kN}$

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x &= S_2 \cdot x = S_1 \cdot x \\ \sum F_z \downarrow &= S_{1z} + S_{2z} = 0,25 \text{ kN} \\ S_{1z} &= 0,125 \text{ kN} \\ S_1 &= \frac{0,125 \text{ kN}}{\sin 10^\circ} = 0,72 \text{ kN} \\ d = 2,5 \text{ cm} \quad \sigma &= \frac{N}{A} = \frac{0,72 \text{ kN}}{3,04 \text{ cm}^2} = 0,23 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 0,23 \frac{1000 \text{ N/kN}}{10 \cdot 10 \frac{\text{mm}^2}{\text{cm}^2}} = 2,3 \text{ N/mm}^2 \\ d = 2 \text{ mm} \quad \sigma &= \frac{N}{A} = \frac{0,72 \text{ kN} \cdot 1000 \text{ N/kN}}{1,55 \text{ mm}^2} = 464 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{\text{zul}} = 1400 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Seillänge nach Einbau unter Last



$$l = \frac{1}{\cos 10^\circ} \cdot 5m = 5,077m$$

d = 2mm

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A} = \frac{G}{E} = \frac{464 \text{ N/mm}^2}{160.000 \text{ N/mm}^2} = 2,9 \cdot 10^{-3}$$

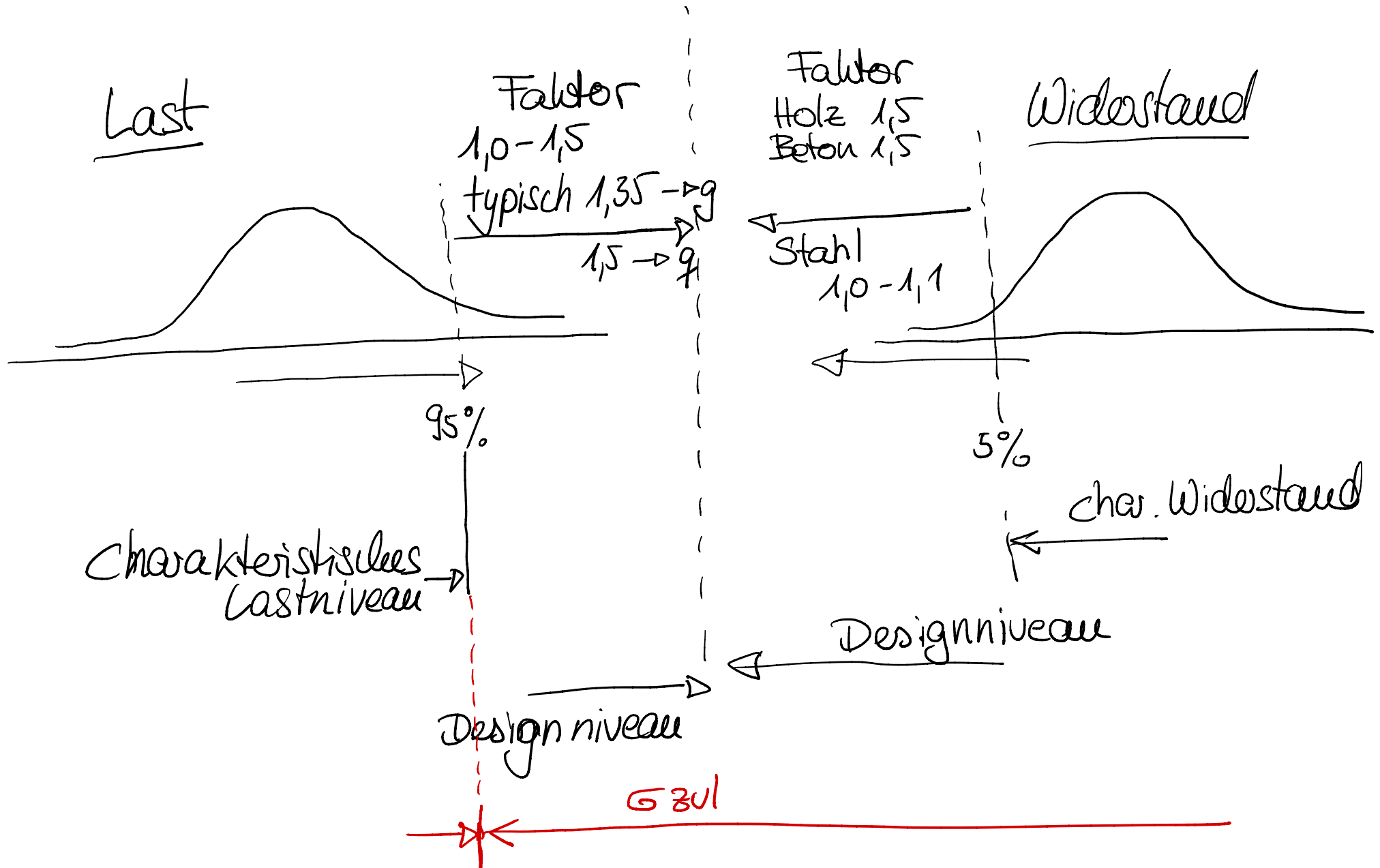
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = 5,077m \cdot 2,9 \cdot 10^{-3} = 1,47cm$$

Vor Aufhängung der Lampe $l \approx 5,077 - 0,0147m = 5,062m$

$$\alpha = \arccos \frac{5}{5,062} = 9^\circ$$

Sicherheitskonzept



Drahtseile



Edelstahl Drahtseil

DIN 13414-1 | V4A AISI 316



Drahtseil Durchmesser	Konstruktion	Gewicht/Meter	Mindestbruchkraft	Zugfestigkeit
		kg	kN	N/mm ²
0,5mm	7x7	0,002	0,15	1570
1mm	7x7	0,004	0,61	1570
1mm	1x19	0,004	0,82	1570
1,5mm	7x7	0,009	1,37	1570
1,5mm	1x19	0,009	1,85	1570
2mm	7x7	0,013	2,44	1570
2mm	1x19	0,013	3,30	1570
3mm	7x19	0,031	5,10	1570
3mm	1x19	0,031	7,42	1570
4mm	7x19	0,055	8,34	1570
4mm	1x19	0,055	13,20	1570
5mm	7x19	0,086	13,00	1570
5mm	1x19	0,086	20,60	1570
6mm	7x19	0,130	18,80	1570

$$A = 1,55 \text{ mm}^2$$

Festigkeitslehre | Verformung infolge Dehnung

Längsdehnung infolge Temperaturdehnung

Aufhängungsseil:

Drahtseil $d = 2 \text{ mm}$

$E = 160.000 \text{ N/mm}^2$

$\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} / \text{K}$

$G_{\text{Leuchte}} = 0.25 \text{ kN}$

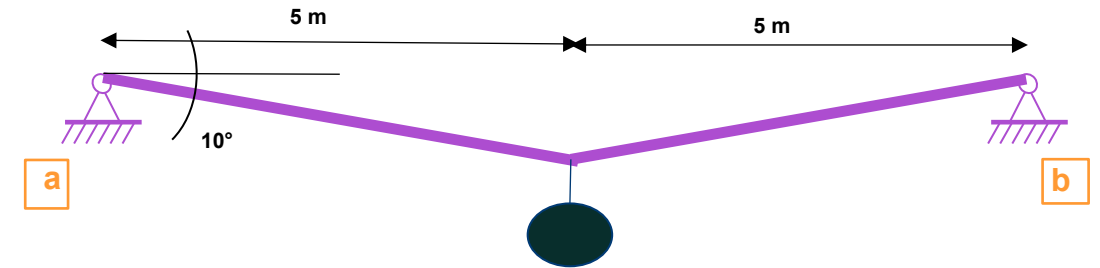
$\Delta T = 30 \text{ K}$

$$l = 5,077 \text{ m}$$

$$\epsilon = \alpha_T \cdot \Delta T = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}} \cdot 30 \text{ K} = 36 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta l = 5,077 \text{ m} \cdot 36 \cdot 10^{-4} = 1,827 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$l_{\text{neu}} = 5,078 \text{ m} \rightarrow \alpha \dots$$



Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Biegung – Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y und M_z

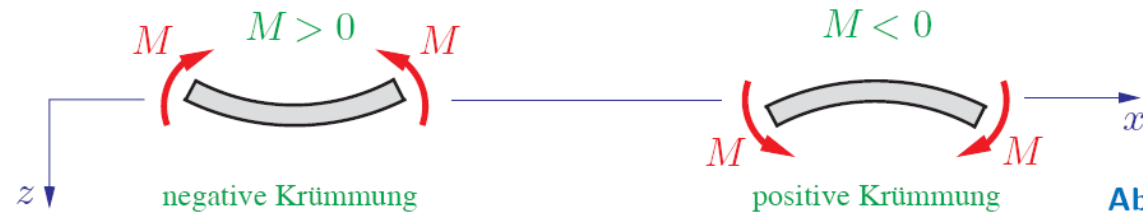
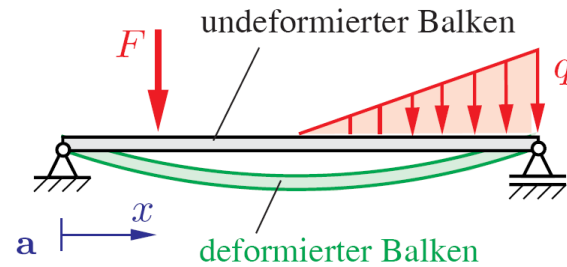
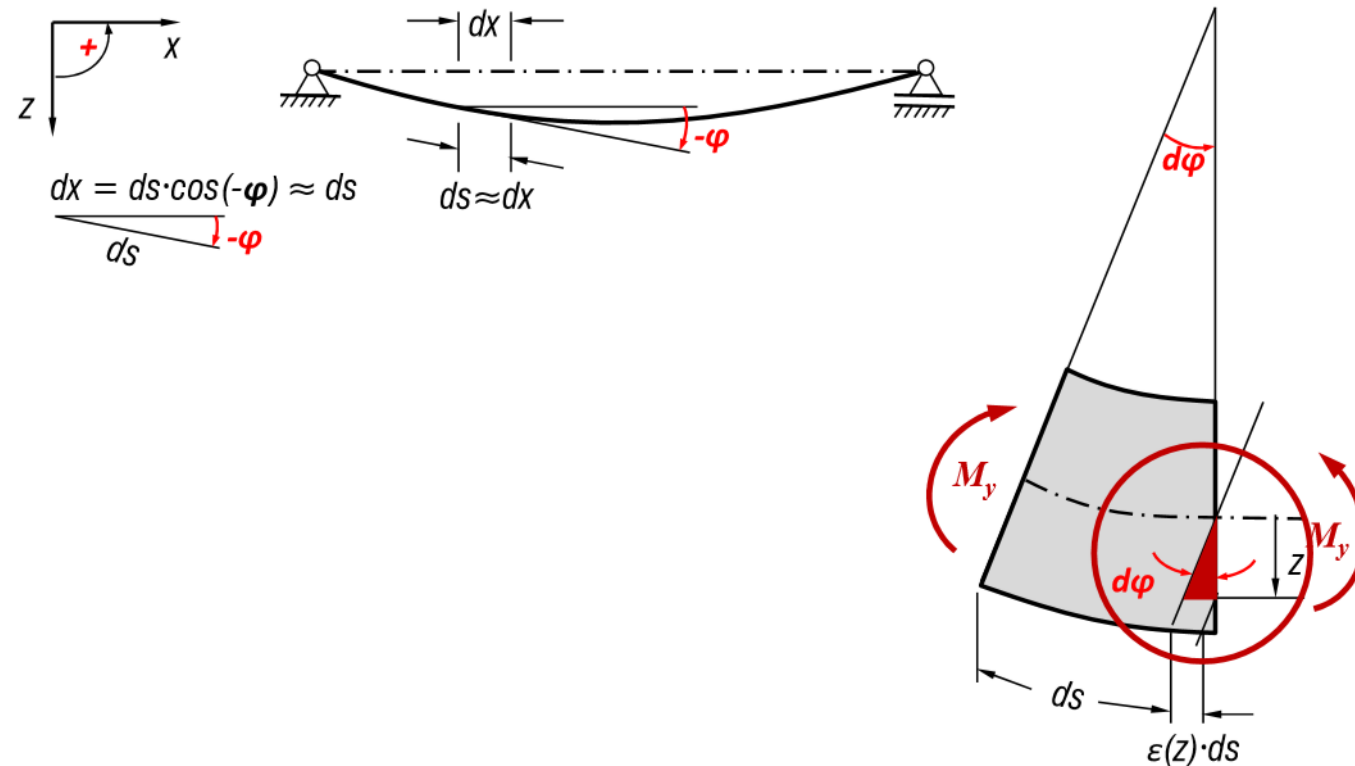


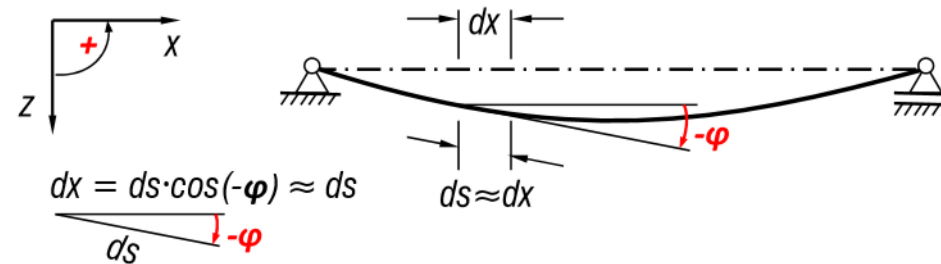
Abb. 4.18

Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

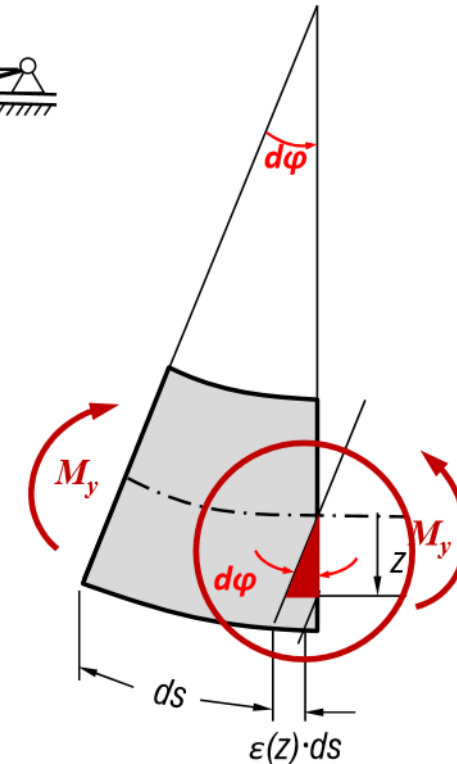
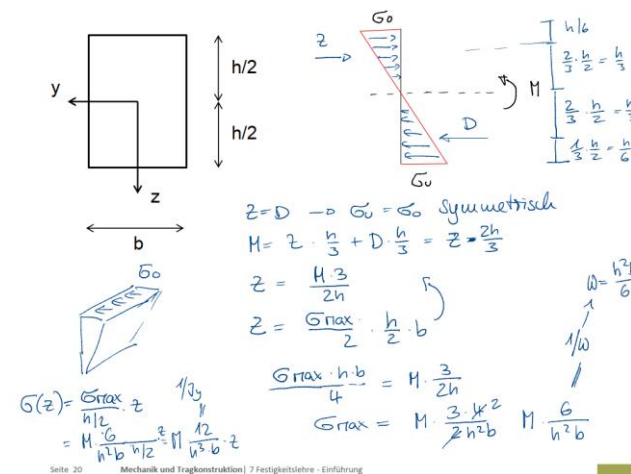
Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



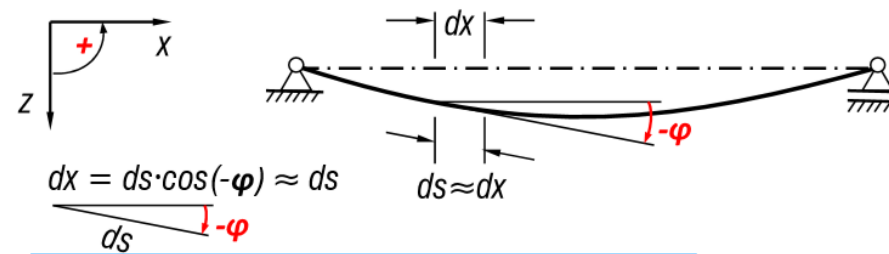
Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



Festigkeitslehre | Flächenträgheitsmoment



Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



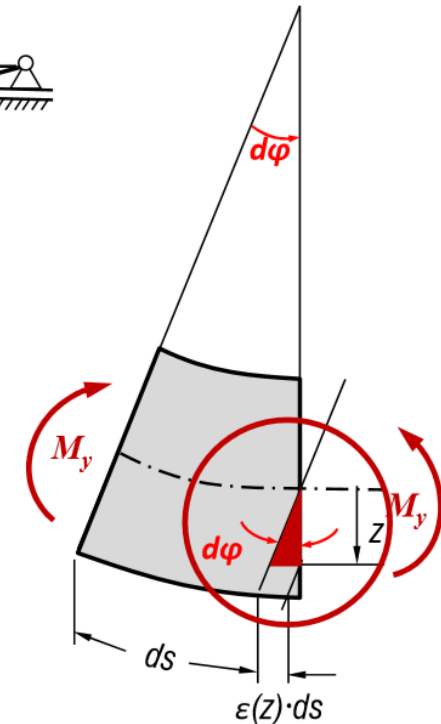
Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d\varphi}{dx} = -w''$$

Krümmung = -(2. Ableitung der Durchbiegung)

mit:
$$d\varphi = \frac{M_y}{EI_y} dx$$

folgt:
$$M_y = -EI_y w''$$



Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y

$$EI_y w(x) = -\iint M_y(x) dx + C_1 \cdot x + C_2$$

Durchbiegung 

$$EI_y w'(x) = -\int M_y(x) dx + C_1$$

Verdrehung 

$$EI_y w''(x) = -M_y(x)$$

Krümmung  Moment

$$EI_y w'''(x) = -\frac{dM_y(x)}{dx} = -V_z(x)$$

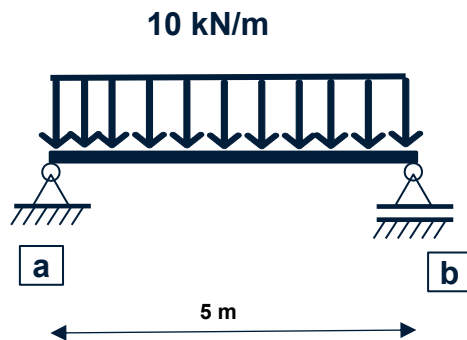
 Querkraft

$$EI_y w^{(4)}(x) = -\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} = -\frac{dV_z(x)}{dx} = q_z(x) \text{ — Last}$$

Festigkeitslehre | Verformungsberechnung

Beispiel:

Einfeldträger mit Streckenlast



Massiv:
 $L_D [m], [\text{MN/m}^2]$
 $= [\text{N/mm}^2]$

Stahl / Holz
 $L_D [cm]$
 $\text{N/mm}^2 \rightarrow 10 \cdot \text{cm/cm}^2$

Stahlträger HEA 180

$E = 210.000 \text{ N/mm}^2 = 21.000 \text{ cm/cm}^2$

$I_y = 2510 \text{ cm}^4$

$w = \frac{q \cdot l^4}{76,8 \cdot EI} = \frac{10 \text{ cm/cm} \cdot 5^4 \text{ m}^4 \cdot 100^3 \text{ cm}^3/\text{m}^3}{76,8 \cdot 21.000 \text{ cm/cm}^2 \cdot 2510 \text{ cm}^4} = 1,54 \text{ cm}$

$w_{zul} < l/300 = \frac{500 \text{ cm}}{300} = 1,66 \text{ cm} > w_{vorh} = 1,54 \text{ cm} \checkmark$

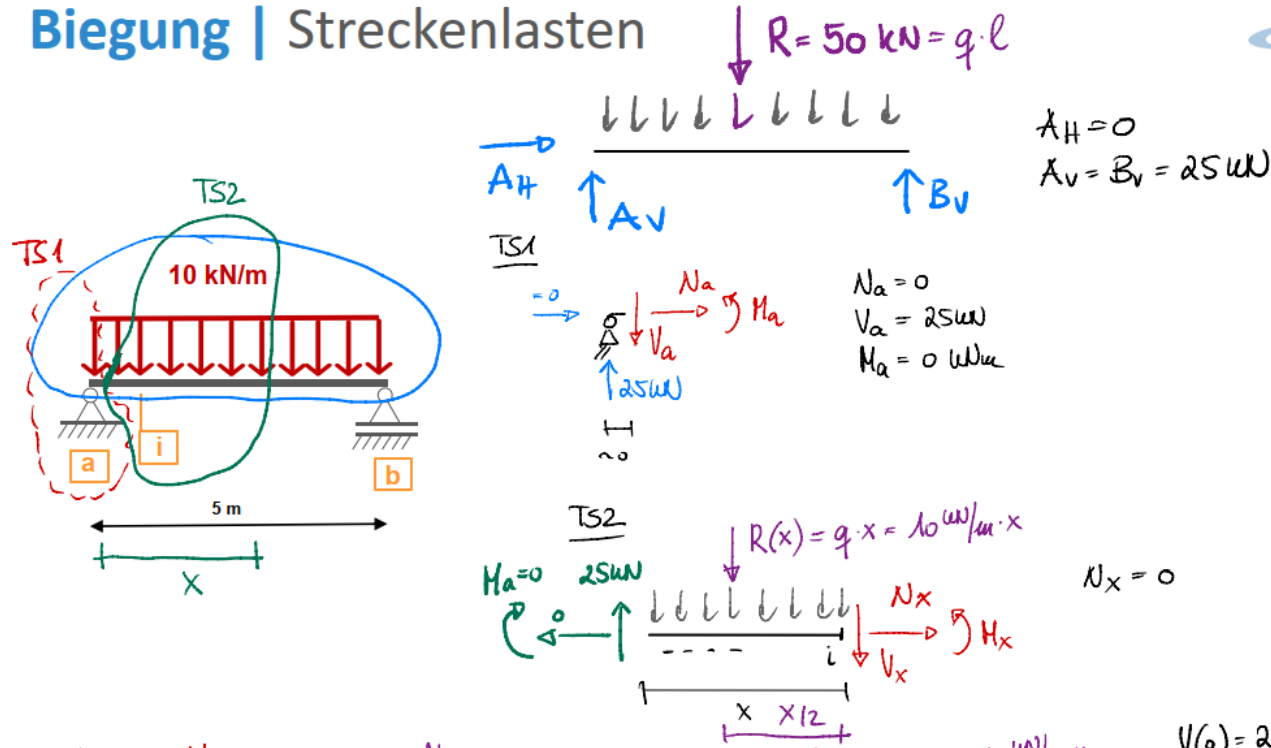
1 Formeln für Schnitt- und Verschiebungsgrößen

1.1 Einzelstab, Vereinbarung: $\Delta \rightarrow$ Lager überträgt nur Vertikalkraft
1.1.1 Träger auf zwei Stützen, $\alpha = a/l, \beta = b/l$

$El = \text{konst.}$ 	Auflagerkräfte $\uparrow A \quad \uparrow B$		M-Linie 	Biegelinie
	A	B	max M	w_{Mitte}
1	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$ bei $\xi_0 = 0,5$	$\frac{ql^4}{76,8 EI} = \frac{5}{384} ql^4$
2	$\frac{ql}{6}$	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{15,59}$ bei $\xi_0 = 0,577$	$\frac{ql^4}{153,6 EI}$
3	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql}{6}$	$\frac{ql^2}{15,59}$ bei $\xi_0 = 0,423$	$\frac{ql^4}{153,6 EI}$
4	$\frac{2q_1 + q_2}{6} l$	$\frac{q_1 + 2q_2}{6} l$	$\left(\frac{q_1 + q_2}{3} - \xi_0 \right) \xi_0^2 l^2$ bei $\xi_0 = \frac{(2q_1 + q_2)/\sqrt{3}}{q_1\sqrt{3} + \sqrt{q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2}}$	$\frac{q_1 + q_2}{153,6 EI} l^4$
5	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{9,6}$ bei $\xi_0 = 0,5$	$\frac{61 ql^4}{5760 EI}$
6	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{Fl}{4}$ bei $\xi_0 = 0,5$	$\frac{Fl^3}{48 EI}$
7	βF	αF	$\alpha \beta Fl$ bei $\xi_0 = \alpha$	$\alpha \leq \frac{1}{2}: \frac{3-4\alpha^2}{48 EI} \alpha Fl^3$
8	$\frac{n-1}{2} F$	$\frac{n-1}{2} F$	n gerade: $\frac{n Fl}{8}$ n ungerade: $\frac{n Fl}{8} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$	$\frac{n Fl^3}{76,8 EI} \left(1 - \frac{0,8}{n^2} \right)$ $\frac{n Fl^3}{76,8 EI} \left(1 - \frac{0,8}{n^2} - \frac{0,2}{n^4} \right)$
9	$\frac{n}{2} F$	$\frac{n}{2} F$	n gerade: $\frac{n Fl}{8}$ n ungerade: $\frac{n Fl}{8} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$	$\frac{n Fl^3}{76,8 EI} \left(1 + \frac{0,4}{n^2} \right)$ $\frac{n Fl^3}{76,8 EI} \left(1 + \frac{0,4}{n^2} + \frac{0,2}{n^4} \right)$
9a			$\frac{x_0}{l} (F_1 + F_2)$ bei $x_0 = \frac{1}{2} \left(l - \frac{F_2}{F_1 + F_2} c \right)$ wenn $x_0 + c \leq l$	
10	$\frac{M^e}{l}$	$\frac{M^e}{l}$	$\alpha \leq \frac{1}{2}: \beta M^e$ bei $\xi_0 = \alpha$ $\alpha \geq \frac{1}{2}: -\alpha M^e$ bei $\xi_0 = \alpha$	$\alpha \leq \frac{1}{2}: \frac{1-4\alpha^2}{16 EI} M^e l^2$ $\alpha \geq \frac{1}{2}: \frac{4\beta^2-1}{16 EI} M^e l^2$
11	$\frac{M_k - M_i}{l}$	$\frac{M_k - M_i}{l}$	M_i oder M_k	$\frac{M_i + M_k}{16 EI} l^2$
12	0	0	0	$\frac{\kappa^e l^2}{8}$
13	0	0	0	$\frac{w_i + w_k}{2}$

Rückblick

Biegung | Streckenlasten



$$\sum F_{2\downarrow} = 0: V_x - 25 \text{ kN} + 10 \text{ kN/m} \cdot x = 0$$

→ V ist linear

$$\sum M_{i\circ} = 0: M_x - M_a - 25 \text{ kN} \cdot x + \underbrace{10 \text{ kN/m} \cdot x \cdot \frac{x}{2}}_R = 0$$

→ M quadratische Parabel.

→ Max/Min M bei $M'_x = 0 \hat{=} V_x = 0$

$$M_x = 25 \text{ kN} \cdot x - 10 \text{ kN/m} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M'_x = 25 \text{ kN} - 10 \text{ kN/m} \cdot \frac{2x}{2} \hat{=} V_x$$

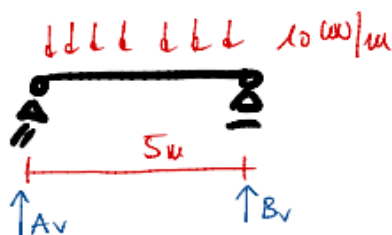
$$\begin{aligned} V(0) &= 25 \text{ kN} \\ V(x=5\text{m}) &= -25 \text{ kN} \\ V(x=2.5\text{m}) &= 0 \\ M(0) &= 0 \\ M(5\text{m}) &= 0 \\ M(2.5\text{m}) &= 25 \cdot 2.5 - 10 \cdot \frac{2.5^2}{2} \\ &= 31.25 \text{ kNm} \\ &\hat{=} M_{\text{max}}! \end{aligned}$$

Rückblick

Schnittkräfte | Ermittlung mit Tabellenwerken

Beispiel:

Einfeldträger mit Streckenlast



$$A_v = B_v = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{10 \text{ kN/m} \cdot 5 \text{ m}}{2} = 25 \text{ kN}$$

$$M_{x_0} = 0,5 \cdot 5 \text{ m} = 2,5 \text{ m}, \text{ max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{10 \text{ kN/m} \cdot 5^2}{8} = 31,25 \text{ kNm}$$

1 Formeln für Schnitt- und Verschiebungsgrößen

1.1 Einzelstab, Vereinbarung: $\Delta \rightarrow$ Lager überträgt nur Vertikalkraft

1.1.1 Träger auf zwei Stützen, $\alpha = a/l$, $\beta = b/l$

$EI = \text{konst.}$	Auflagerkräfte	M-Linie	Biegelinie
$i \Delta \rightarrow$	$\Delta \rightarrow$	$\Delta \rightarrow$	$\Delta \rightarrow$
l	A	B	W_{Mitte}
1 q	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^4}{76,8EI}$
2 q	$\frac{ql}{6}$	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^4}{153,6EI}$
3 q	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql}{6}$	$\frac{ql^4}{153,6EI}$
4 q_1, q_2	$\frac{2q_1 + q_2}{6}$	$\frac{q_1 + 2q_2}{6}$	$\frac{q_1 + q_2}{153,6EI}$
5 quadr. Parabel	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql}{3}$	$\frac{61ql^4}{5760EI}$
6 F	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{Fl^3}{48EI}$
7 F	βF	αF	$\alpha \beta F l$ bei $\xi_0 = \alpha$
8 $n-1$ Lasten F	$\frac{n-1}{2} F$	$\frac{n-1}{2} F$	$\frac{n F l^3}{76,8EI} \left(1 - \frac{0,8}{n^2}\right)$
9 n Lasten F	$\frac{n}{2} F$	$\frac{n}{2} F$	$\frac{n F l^3}{76,8EI} \left(1 + \frac{0,4}{n^2}\right)$
10 F_1, F_2			$\frac{F_1^2}{l} (F_1 + F_2)$ bei $x_0 = \frac{1}{2} \left(l - \frac{F_2}{F_1 + F_2} c \right)$
11 M_1, M_2	$\frac{M_1 - M_2}{l}$	$\frac{M_2 - M_1}{l}$	M_1 oder M_2
12 w_1, w_2	0	0	0
13 w_1, w_2	0	0	0

Festigkeitslehre | Dimensionierung

Beispiel 1:

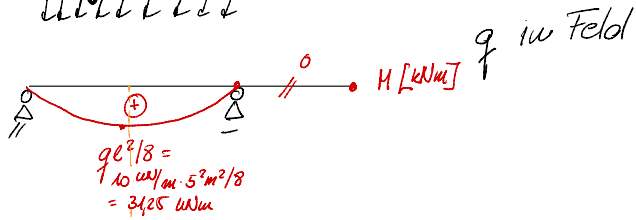
Verformung in Feldmitte max $w = 2 \text{ cm}$

Stahl: $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$

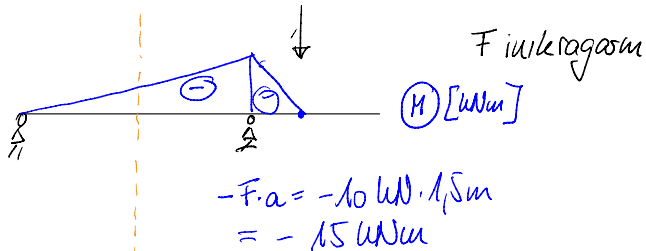
zul. Spannung $\sigma = 21,8 \text{ kN/mm}^2$

Schnittgrößenermittlung

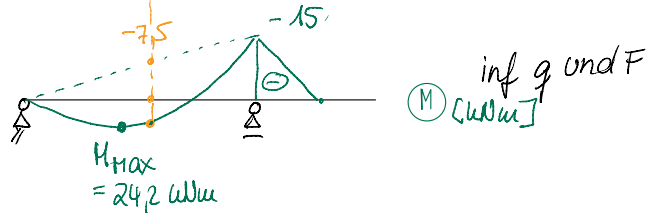
a



b



c



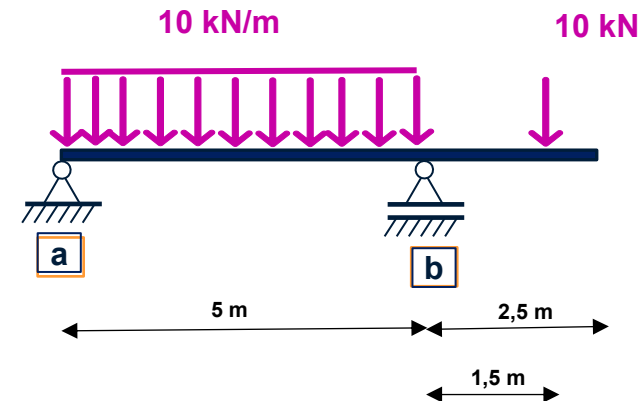
Annahme:

- Belastungen sind ständige Lasten
- $\rightarrow$ Fall [c] ist maßgebend.
- bei veränderlichen Lasten müsste Fall [a]-[c] jeweils untersucht werden.

$M_{\text{Feldmitte}} = 31,25 + (-7,5) = 23,75 \text{ kNm}$

@ 1.1.6 Träger auf zwei Stützen mit Kragarm

$EI = \text{konst.}$	M-Linie				Biegelinie	
$i \xrightarrow{l} k \xrightarrow{c} j$	Auflagerkräfte				w_{Mitte}	w_j
	A	B	max M	M_k		
1	$(l^2 - c^2) \frac{q}{2l}$	$(l + c)^2 \frac{q}{2l}$	$\frac{A^2}{2q}$	$-\frac{qc^2}{2}$	$\left(\frac{l^2 - c^2}{2,4} - c^2\right) \frac{ql^2}{32EI}$	$\left(\frac{c^3}{8} + \frac{c^2 l}{6} - \frac{l^3}{24}\right) \frac{qc}{EI}$
2	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{ql^4}{76,8EI}$	$-\frac{ql^3 c}{24EI}$
3	$-\frac{qc^2}{2l}$	$\left(1 + \frac{c}{2l}\right) qc$	M_k	$-\frac{qc^2}{2}$	$\frac{ql^2 c^2}{32EI}$	$\left(\frac{l}{6} + \frac{c}{8}\right) \frac{qc^3}{EI}$
4	$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fa}{l}$	$\frac{Fab}{l}$	0	$\left(\frac{l^2}{16} - \frac{a^2}{12}\right) \frac{Fa}{EI}$	$-(l+a) \frac{Fabc}{6EI}$
5	$-\frac{Fa}{l}$	$\left(1 + \frac{a}{l}\right) F$	M_k	$-Fa$	$-\frac{Fal^2}{16EI}$	$\left(\frac{lc}{3} + \frac{ac}{2} - \frac{a^2}{6}\right) \frac{Fa}{EI}$
6	$-\frac{M^e}{l}$	$\frac{M^e}{l}$	$-M^e$	$-M^e$	$\frac{M^e l^2}{16EI}$	$\left(\frac{l}{3} + \frac{c}{2}\right) \frac{c M^e}{EI}$
7	0	0	0	0	$\kappa^e l^2 / 8$	$-\kappa^e l c / 2$
8	0	0	0	0	0	$-\kappa^e c^2 / 2$



Festigkeitslehre | Dimensionierung

Beispiel 1:

Verformung in Feldmitte max $w = 2 \text{ cm}$

Stahl: $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$

zul. Spannung $\sigma = 21,8 \text{ kN/mm}^2 = 21,8 \text{ N/mm}^2$

Spannungsnachweis

$$M_{\max} = 24,2 \text{ kNm}$$

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_y}{J_y} \cdot z \leq \sigma_{\text{zul}} = 21,8 \text{ kN/cm}^2$$

$$W_{y \text{ erf}} \geq \frac{M_y}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{24,2 \text{ kNm} \cdot 100 \frac{\text{cm}}{\text{m}}}{21,8 \text{ kN/cm}^2} = 111 \text{ cm}^3$$

Verformungsnachweis

$$EIw =$$

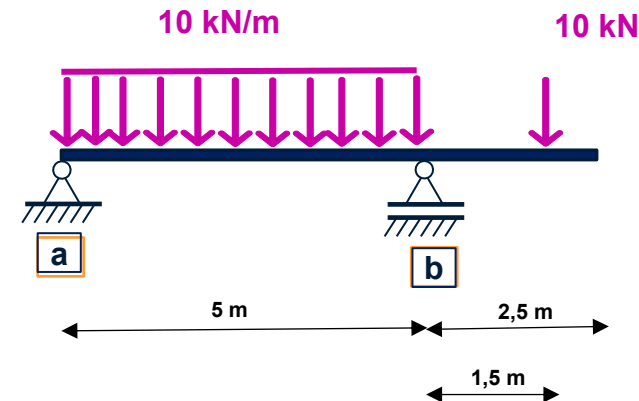
$$\frac{ql^4}{76,8} - \frac{F \cdot a \cdot l^2}{16} = \frac{10 \text{ kN/m} \cdot 5 \text{ m} \cdot 500^3 \text{ cm}^3}{76,8} - \frac{10 \text{ kN} \cdot 150 \text{ cm} \cdot 500^2 \text{ cm}^2}{16}$$

$$EIw = 57942708 \text{ kNcm}^3$$

$$w < 2 \text{ cm}$$

@ 1.1.6 Träger auf zwei Stützen mit Kragarm

$El = \text{konst.}$	M-Linie				Biegelinie	
$i \xrightarrow{l} k \xrightarrow{c} j$	Auflagerkräfte				w_{Mitte}	w_j
	A	B	max M	M_k		
1	$(l^2 - c^2) \frac{q}{2l}$	$(l + c)^2 \frac{q}{2l}$	$\frac{A^2}{2q}$	$-\frac{qc^2}{2}$	$\left(\frac{l^2}{2,4} - c^2\right) \frac{ql^2}{32EI}$	$\left(\frac{c^3}{8} + \frac{c^2 l}{6} - \frac{l^3}{24}\right) \frac{qc}{EI}$
2	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{ql^4}{76,8EI}$	$-\frac{ql^3 c}{24EI}$
3	$-\frac{qc^2}{2l}$	$\left(1 + \frac{c}{2l}\right) qc$	M_k	$-\frac{qc^2}{2}$	$\frac{ql^2 c^2}{32EI}$	$\left(\frac{l}{6} + \frac{c}{8}\right) \frac{qc^3}{EI}$
4	$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fa}{l}$	$\frac{Fab}{l}$	0	$\left(\frac{l^2}{16} - \frac{a^2}{12}\right) \frac{Fa}{EI}$ wenn $a \leq l/2$	$-(l+a) \frac{Fabc}{6EI}$
5	$-\frac{Fa}{l}$	$\left(1 + \frac{a}{l}\right) F$	M_k	$-Fa$	$-\frac{Fal^2}{16EI}$	$\left(\frac{lc}{3} + \frac{ac}{2} - \frac{a^2}{6}\right) \frac{Fa}{EI}$
6	$-\frac{M^e}{l}$	$\frac{M^e}{l}$	$-M^e$	$-M^e$	$\frac{M^e l^2}{16EI}$	$\left(\frac{l}{3} + \frac{c}{2}\right) \frac{cM^e}{EI}$
7	0	0	0	0	$\kappa^e l^2 / 8$	$-\kappa^e l c / 2$
8	0	0	0	0	0	$-\kappa^e c^2 / 2$



Beispiel 1:

Stahl: $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$

Verformungsnachweis

$$E \nabla \omega =$$

$$\frac{9 \ell^4}{768} - \frac{F \cdot a \cdot \ell^2}{16} = \frac{10 \text{ kN/m} \cdot 5 \text{ m} \cdot 500^3 \text{ cm}^3}{768} - \frac{10 \text{ kN} \cdot 150 \text{ cm} \cdot 500^2 \text{ cm}^2}{16}$$

$$EIW = 57942708 \text{ kNcm}^3$$

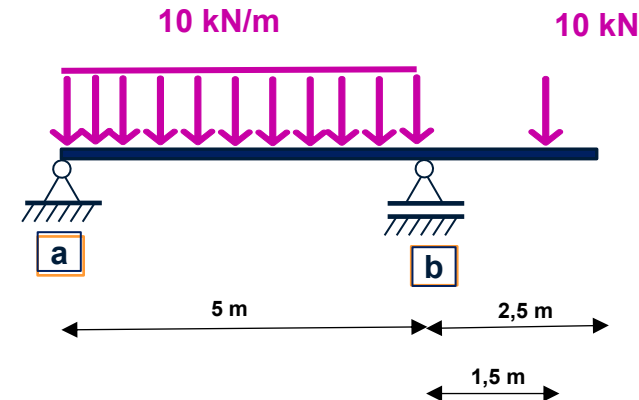
$$\omega < 2\alpha m$$

$$\frac{57942708 \text{ WNCm}^3}{21.000 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \cdot J_y} < 2 \text{ cm}$$

$$J_g > \frac{57942708 \text{ W/cm}^2}{21000 \text{ W/cm}^2 \cdot 2 \text{ cm}} = 1379 \text{ cm}^4$$

L > IPEZOO

$EI = \text{konst.}$		M-Linie				Biegelinie	
		Auflagerkräfte					
		A	B	max M	M_k	w_{Mitte}	w_j
1		$(l^2 - c^2) \frac{q}{2l}$	$(l+c)^2 \frac{q}{2l}$	$\frac{A^2}{2q}$	$-\frac{qc^2}{2}$	$\left(\frac{l^2}{2,4} - c^2\right) \frac{ql^2}{32EI}$	$\left(\frac{c^3}{8} + \frac{c^2l}{6} + \frac{l^3}{24}\right) \frac{qc}{EI}$
2		$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{ql^4}{76,8EI}$	$-\frac{ql^3c}{24EI}$
3		$-\frac{qc^2}{2l}$	$\left(1 + \frac{c}{2l}\right) qc$	M_k	$-\frac{qc^2}{2}$	$-\frac{ql^2c^2}{32EI}$	$\left(\frac{l}{6} + \frac{c}{8}\right) \frac{qc^3}{EI}$
4		$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fa}{l}$	$\frac{Fab}{l}$	0	$\left(\frac{l^2}{16} - \frac{a^2}{12}\right) \frac{Fa}{EI}$ wenn $a \leq l/2$	$-(l+a) \frac{Fabc}{6lEI}$
5		$-\frac{Fa}{l}$	$\left(1 + \frac{a}{l}\right) F$	M_k	$-Fa$	$-\frac{Fal^2}{16EI}$	$\left(\frac{lc}{3} + \frac{ac}{2} - \frac{a^2}{6}\right) \frac{Fa}{EI}$
6		$-\frac{M^e}{l}$	$\frac{M^e}{l}$	$-M^e$	$-M^e$	$-\frac{M^e l^2}{16EI}$	$\left(\frac{l}{3} + \frac{c}{2}\right) \frac{cM^e}{EI}$
7		0	0	0	0	$\kappa^e l^2 / 8$	$-\kappa^e l c / 2$
8		0	0	0	0	0	$-\kappa^e c^2 / 2$

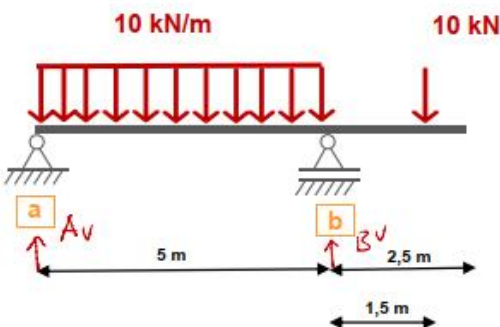


Rückblick

Schnittkräfte | Ermittlung mit Tabellenwerken

Beispiel:

Wiederholung heute



@ 1.1.6 Träger auf zwei Stützen mit Kragarm

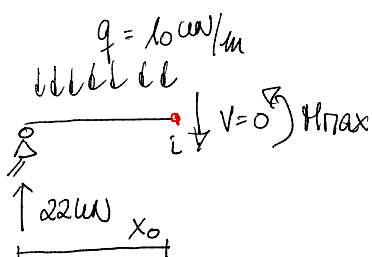
l	M -Linie	Auflagerkräfte	$\max M$	M_0	Biegelinie	$w_{\max}$	w_j
1		$(l^2 - c^2) \frac{q}{2l}$	$(l+c) \frac{q}{2l}$	$\frac{ql^2}{2}$	$\frac{ql^2}{2}$	$\frac{ql^2}{2}$	$\frac{ql^2}{2}$
2		$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{ql^4}{768EI}$	$-\frac{ql^3c}{24EI}$
3		$-\frac{qc^2}{2l}$	$(1 + \frac{c}{2l}) qc$	M_0	$-\frac{qc^2}{2}$	$-\frac{ql^2c^2}{32EI}$	$(\frac{l}{6} + \frac{c}{8}) \frac{qc^3}{EI}$
4		$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fa}{l}$	$\frac{Fab}{l}$	0	$(\frac{l^2}{16} - \frac{a^2}{12}) \frac{Fa}{EI}$	$-(l+a) \frac{Fabc}{6EI}$
5		$-\frac{Fa}{l}$	$(1 + \frac{a}{l}) F$	M_0	$-Fa$	$-\frac{Fa^2}{16EI}$	$(\frac{lc}{3} + \frac{ac}{2} + \frac{a^2}{6}) \frac{Fa}{EI}$
6		$-\frac{M^0}{l}$	$\frac{M^0}{l}$	$-M^0$	$-M^0$	$-\frac{M^0 l^2}{16EI}$	$(\frac{l}{3} + \frac{c}{2}) \frac{cM^0}{EI}$
7		0	0	0	0	$\kappa^0 l^2 / 8$	$-\kappa^0 c l / 2$
8		0	0	0	0	0	$-\kappa^0 c^2 / 2$

Lineare Überlagerung von mehreren Lasten ist zulässig!

$$A_v = + \frac{q \cdot l}{2} - \frac{F \cdot a}{l} = \frac{10 \text{ kN/m} \cdot 5 \text{ m}}{2} - \frac{10 \text{ kN} \cdot 1.5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 22 \text{ kN}$$

$$B_v = + \frac{q \cdot l}{2} + (1 + \frac{a}{l}) \cdot F = \frac{10 \cdot 5}{2} + (1 + \frac{1.5}{5}) \cdot 10 \text{ kN} = 38 \text{ kN}$$

$M_{\max}$



$$x_0 = 22 / 10 \text{ kN/m} = 2.2 \text{ m}$$

$$\sum M_i = 0$$

$$M_{\max} + \underbrace{10 \text{ kN/m} \cdot 2.2 \text{ m} \cdot 1.1 \text{ m}}_R - 22 \cdot 2.2 \text{ m} = 0$$

$$M_{\max} = 24.2 \text{ kNm}$$

Profilreihen IPE, HEA, HEB, HEM

Profilreihe		IPE								
Nennhöhe		80	100	120	140	160	180	200	220	240
h	mm	80	100	120	140	160	180	200	220	240
b	mm	46	55	64	73	82	91	100	110	120
t_w	mm	3,8	4,1	4,4	4,7	5	5,3	5,6	5,9	6,2
t_f	mm	5,2	5,7	6,3	6,9	7,4	8	8,5	9,2	9,8
r	mm	5	7	7	7	9	9	12	12	15
d	mm	59,6	74,6	93,4	112	127	146	159	178	190
A	cm ²	7,64	10,3	13,2	16,4	20,1	23,9	28,5	33,4	39,1
A_{vy}	cm ²	4,78	6,27	8,06	10,1	12,1	14,6	17,0	20,2	23,5
A_{vz}	cm ²	3,6	5,1	6,3	7,6	9,7	11,2	14	15,9	19,1
A_w	cm ²	26,45	36,33	47,26	59,31	72,60	86,92	102,5	118,9	136,6
g_k	kN/m	0,06	0,081	0,104	0,129	0,158	0,188	0,224	0,262	0,307
U	m ² /m	0,3278	0,3998	0,4752	0,5502	0,6221	0,6979	0,7682	0,8484	0,9210
a	-	0,374	0,391	0,389	0,386	0,396	0,391	0,404	0,394	0,398
d/t_w	-	15,7	18,2	21,2	23,9	25,4	27,5	28,4	30,1	30,7
c/t_f	-	3,1	3,2	3,6	3,9	4	4,2	4,1	4,4	4,3
I_y	cm ⁴	80,1	171	318	541	869	1320	1940	2770	3890
$W_{el,y}$	cm ³	20	34,2	53	77,3	109	146	194	252	324
$W_{pl,y}$	cm ³	23,22	39,41	60,73	88,34	123,9	166,4	220,6	285,4	366,6
k_{My}	-	0,3409	0,37	0,351	0,336	0,355	0,342	0,369	0,352	0,371
a_{vy}	-	0,6538	0,647	0,642	0,638	0,639	0,636	0,64	0,644	0,651
i_y	cm	3,24	4,07	4,9	5,74	6,58	7,42	8,26	9,11	9,97

Profilreihen IPE, HEA, HEB, HEM (Fortsetzung)

Profilreihe		IPE								
Nennhöhe		270	300	330	360	400	450	500	550	600
h	mm	270	300	330	360	400	450	500	550	600
b	mm	135	150	160	170	180	190	200	210	220
t_w	mm	6,6	7,1	7,5	8	8,6	9,4	10,2	11,1	12
t_t	mm	10,2	10,7	11,5	12,7	13,5	14,6	16	17,2	19
r	mm	15	15	18	18	21	21	21	24	24
d	mm	220	249	271	299	331	379	426	468	514
A	cm ²	45,9	53,8	62,6	72,7	84,5	98,8	116	134	156
A_{Vy}	cm ²	27,5	32,1	36,8	43,2	48,6	55,5	64,0	72,2	83,6
A_{Vz}	cm ²	22,1	25,7	30,8	35,1	42,7	50,8	60,4	71,9	83,8
A_w	cm ²	164,7	197,8	230,25	267,68	320,78	395,55	477,36	572,32	674,4
g_k	kN/m	0,361	0,422	0,491	0,571	0,663	0,776	0,907	1,055	1,224
U	m ² /m	1,042	1,161	1,2541	1,3539	1,4667	1,6055	1,7435	1,8774	2,0148
a	-	0,400	0,403	0,412	0,406	0,425	0,438	0,448	0,461	0,464
d/t_w	-	33,3	35	36,1	37,3	38,5	40,3	41,8	42,1	42,8
c/t_t	-	4,8	5,3	5,1	5	4,8	4,7	4,6	4,4	4,2
I_y	cm ⁴	5790	8360	11770	16270	23130	33740	48200	67120	92080
$W_{el,y}$	cm ³	429	557	713	904	1160	1500	1930	2440	3070
$W_{pl,y}$	cm ³	484	628,4	804,3	1019	1307	1702	2194	2787	3512
k_{My}	-	0,3591	0,3507	0,3687	0,3577	0,3807	0,3847	0,3847	0,4051	0,4013
α_{Vy}	-	0,6411	0,6323	0,6322	0,6318	0,6204	0,5996	0,5885	0,5729	0,5677
i_y	cm	11,2	12,5	13,7	15	16,5	18,5	20,4	22,3	24,3

Profilreihen IPE, HEA, HEB, HEM (Fortsetzung)

Profilreihe		HEA								
Nennhöhe		100	120	140	160	180	200	220	240	260
h	mm	96	114	133	152	171	190	210	230	250
b	mm	100	120	140	160	180	200	220	240	260
t_w	mm	5	5	5,5	6	6	6,5	7	7,5	7,5
t_f	mm	8	8	8,5	9	9,5	10	11	12	12,5
r	mm	12	12	12	15	15	18	18	21	24
d	mm	56	74	92	104	122	134	152	164	177
A	cm ²	21,2	25,3	31,4	38,8	45,3	53,8	64,3	76,8	86,8
A_{Vy}	cm ²	16,0	19,2	23,8	28,8	34,2	40,0	48,4	57,6	65,0
A_{Vz}	cm ²	7,5	8,4	10,1	13,2	14,5	18,1	20,6	25,1	28,7
A_w	cm ²	40,0	49,0	63,8	80,4	91,2	110,5	131,6	154,5	168,8
g_k	kN/m	0,167	0,199	0,247	0,304	0,355	0,423	0,505	0,603	0,682
U	m ² /m	0,5614	0,6774	0,7944	0,9062	1,024	1,136	1,255	1,369	1,484
a	-	0,245	0,241	0,242	0,258	0,245	0,257	0,247	0,250	0,251
d/t_w	-	11,2	14,8	16,7	17,3	20,3	20,6	21,7	21,9	23,6
c/t_f	-	4,4	5,7	6,5	6,9	7,6	7,9	8	7,9	8,2
I_y	cm ⁴	349	606	1030	1670	2510	3690	5410	7760	10450
$W_{el,y}$	cm ³	72,8	106	155	220	294	389	515	675	836
$W_{pl,y}$	cm ³	83,01	119,5	173,5	245,1	324,9	429,5	568,5	744,6	919,8
k_{My}	-	0,2693	0,2474	0,233	0,2515	0,2324	0,2484	0,2333	0,2414	0,248
α_{Vy}	-	0,8113	0,8063	0,7968	0,7928	0,7987	0,7946	0,7953	0,7988	0,8056
i_y	cm	4,06	4,89	5,73	6,57	7,45	8,28	9,17	10,1	11

Profilreihen IPE, HEA, HEB, HEM (Fortsetzung)

Profilreihe		HEA								
Nennhöhe		280	300	320	340	360	400	450	500	550
h	mm	270	290	310	330	350	390	440	490	540
b	mm	280	300	300	300	300	300	300	300	300
t_w	mm	8	8,5	9	9,5	10	11	11,5	12	12,5
t_f	mm	13	14	15,5	16,5	17,5	19	21	23	24
r	mm	24	27	27	27	27	27	27	27	27
d	mm	196	208	225	243	261	298	344	390	438
A	cm ²	97,3	113	124	133	143	159	178	198	212
A_{vy}	cm ²	72,8	84,0	93,0	99,0	105,0	114,0	126,0	138,0	144,0
A_{vz}	cm ²	31,8	37,8	40,8	44,5	49,2	57,4	65,8	75,2	84
A_w	cm ²	195,2	222,7	251,1	282,2	315	387,2	457,7	532,8	615
g_k	kN/m	0,764	0,883	0,976	1,048	1,121	1,248	1,398	1,551	1,662
U	m ² /m	1,603	1,717	1,756	1,795	1,834	1,912	2,011	2,11	2,209
a	-	0,252	0,257	0,250	0,256	0,266	0,283	0,292	0,303	0,321
$dl t_w$	-	24,5	24,5	25	25,6	26,1	27,1	29,9	32,5	35
c/t_f	-	8,6	8,5	7,6	7,2	6,7	6,2	5,6	5,1	4,9
I_y	cm ⁴	13670	18260	22930	27690	33090	45070	63720	86970	111900
$W_{el,y}$	cm ³	1010	1260	1480	1680	1890	2310	2900	3550	4150
$W_{pl,y}$	cm ³	1112	1383	1628	1850	2088	2562	3216	3949	4622
k_{My}	-	0,2409	0,2471	0,2449	0,2478	0,251	0,2617	0,2665	0,2715	0,2832
a_{vy}	-	0,7994	0,8029	0,7975	0,7879	0,7797	0,7565	0,7429	0,7309	0,7099
i_y	cm	11,9	12,7	13,6	14,4	15,2	16,8	18,9	21	23

Festigkeitslehre | Dimensionierung

Beispiel 2 a: Kragträger

Verformung in Feldmitte max $w = 2 \text{ cm}$

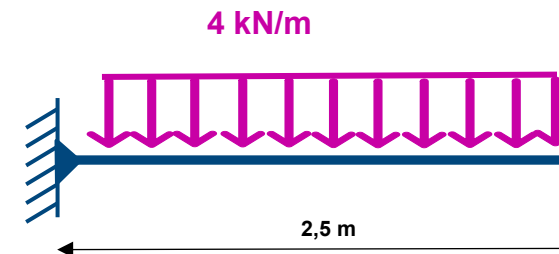
Stahl: $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$

zul. Spannung $\sigma = 21,8 \text{ kN/cm}^2$

*L 120 JPE 140
oder HEA 120*

@ 1.1.7 Kragträger

	$EI = \text{konst.}$ 	M-Linie 	Biegelinie 		
		A	M_i	w_k	φ_k
1		ql	$-\frac{ql^2}{2}$	$\frac{ql^4}{8EI}$	$\frac{ql^3}{6EI}$
2		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{6}$	$\frac{ql^4}{30EI}$	$\frac{ql^3}{24EI}$
3		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{3}$	$\frac{11ql^4}{120EI}$	$\frac{ql^3}{8EI}$
4		F	$-Fl$	$\frac{Fl^3}{3EI}$	$\frac{Fl^2}{2EI}$
5		F	$-Fa$	$\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{6}\right) \frac{Fa^2}{EI}$	$\frac{Fa^2}{2EI}$
6		0	M_k	$-\frac{M_k l^2}{2EI}$	$-\frac{M_k l}{EI}$
7		0	0	$-\frac{\kappa^e l^2}{2}$	$-\kappa^e l$



Festigkeitslehre | Dimensionierung

Beispiel 2 b: Kragträger

am Kragarmende
Verformung in Feldmitte $\max w = 2 \text{ cm}$

Holz: $E = 10.000 \text{ N/mm}^2 = 1000 \text{ cm/cm}^2$

zul. Spannung $\sigma = 16 \text{ N/mm}^2$

$$M_{\max} = -ql^2/2 = -4 \cdot 2,5^2 \text{ m}^2 / 2 = -12,5 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} < \sigma_{\text{zul}}$$

$$W_y > \frac{|M_{\max}|}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{12,5 \cdot 100 \text{ kNm}}{16 \text{ cm/cm}^2} = 761 \text{ cm}^3$$

$$\frac{h^3}{12} > 761 \text{ cm}^3 \rightarrow h > 20,9 \text{ cm}$$

$$w = \frac{ql^4}{8 \cdot EI} < 2 \text{ cm}$$

$$\frac{4 \text{ kN/m} \cdot 2,5 \text{ m} \cdot 250^3 \text{ cm}^3}{8 \cdot 1000 \text{ cm/cm}^2 \cdot J} = \frac{19531,2}{J_y} \text{ cm}^5 < 2 \text{ cm}$$

$$J_y > 9765,5 \text{ cm}^4$$

$$\frac{h^4}{24} > 9765,5 \text{ cm}^4 \rightarrow h > 22 \text{ cm} \Rightarrow \text{gewählt: } b/h = 12/24 \text{ [cm]}$$

@ 1.1.7 Kragträger

	$El = \text{konst.}$ $i \xrightarrow{l} k$	M-Linie M_i A	Biegelinie w_k φ_k L
1		ql	$-\frac{ql^2}{2}$ $\frac{ql^3}{8EI}$ $\frac{ql^3}{6EI}$
2		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{6}$ $\frac{ql^3}{30EI}$ $\frac{ql^3}{24EI}$
3		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{3}$ $\frac{11ql^4}{120EI}$ $\frac{ql^3}{8EI}$
4		F	$-Fl$ $\frac{Fl^3}{3EI}$ $\frac{Fl^2}{2EI}$
5		F	$-Fa$ $\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{6}\right) \frac{Fa^2}{EI}$ $\frac{Fa^2}{2EI}$
6		0	M_k $-\frac{M_k l^2}{2EI}$ $-\frac{M_k l}{EI}$
7		0	0 $-\frac{\kappa^e l^2}{2}$ $-\kappa^e l$

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$J_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

mit $b = \frac{h}{2}$ (Annahme)

$$\rightarrow W_y = \frac{h^3}{12}$$

$$J_y = \frac{h^4}{24}$$

