Mechanik und Tragkonstruktion

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

U!REKA EUROPEAN UNIVERSITY

Festigkeitslehre Einführung

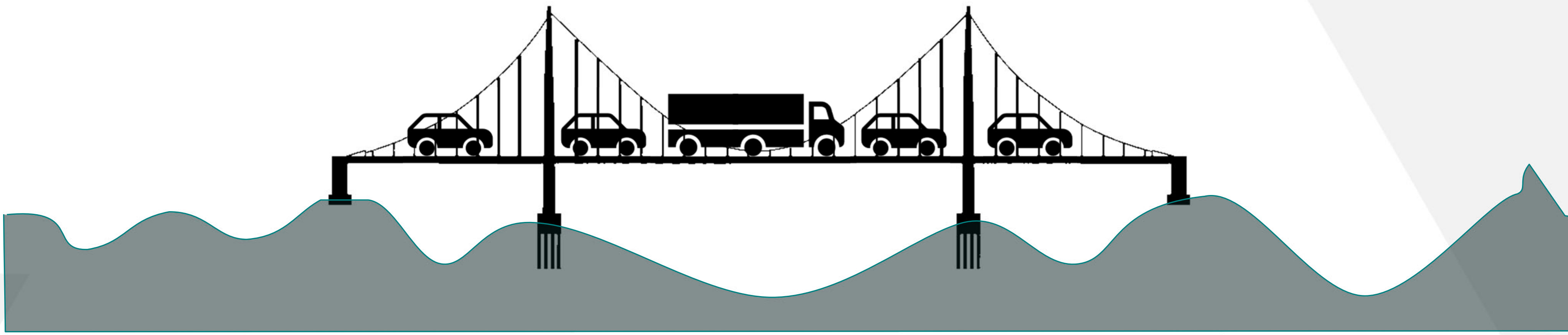
Inhalt Mechanik und Tragkonstrukion

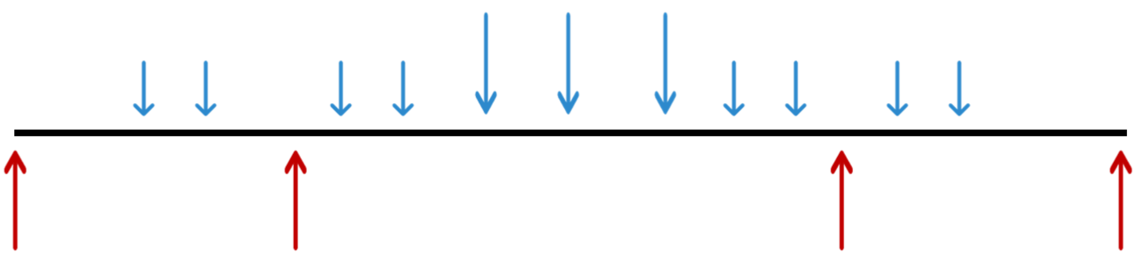
1. Grundbegriffe/Herangehensweise an eine Planungsaufgabe/Beanspruchungen
2. Zentrales Kraftsystem
3. Allgemeines Kraftsystem
4. Tragwerke/Lasten
5. Biegeträger – Schnittkräfte
6. Festigkeitslehre – Querschnittskennwerte, Berechnung von Spannungen, Verformungen

Festigkeitslehre | Inhalt heute

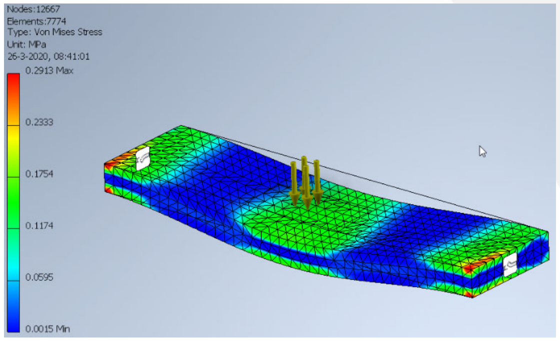
- Einführung
- Begriffsbestimmung
- Querschnittskennwerte

Festigkeitslehre | Einführung





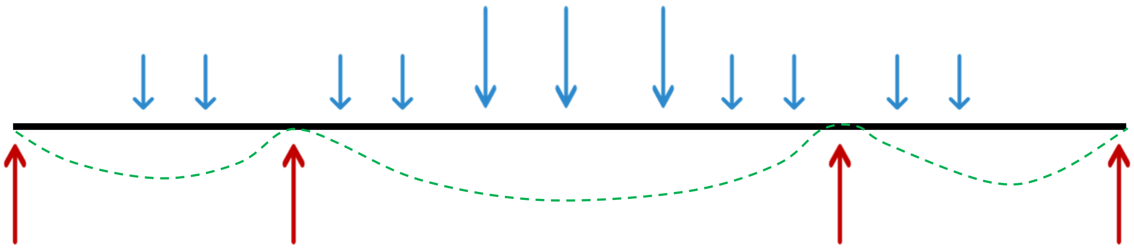
Festigkeitslehre | Einführung



Berechnung der Beanspruchungen in den Bauteilen

Berechnung der Verformung

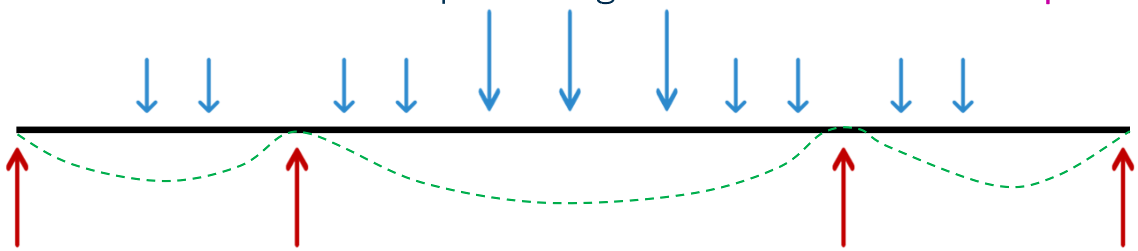
→ Bezug zwischen Schnittkräften und Verformungen = Dehnungen/Krümmung

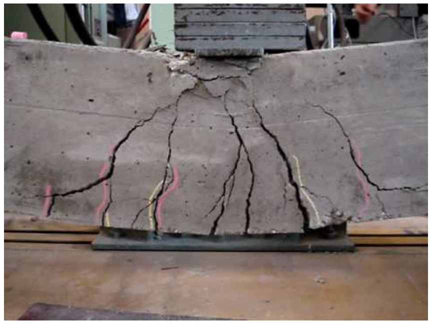


Festigkeitslehre | Einführung

Vergleich der aufnehmbaren Beanspruchungen mit den ermittelten Beanspruchungen

→ Bezug zwischen Schnittkräften und Beanspruchungen im Bauteil selbst = Spannungen





Festigkeitslehre | Begriffsbestimmung

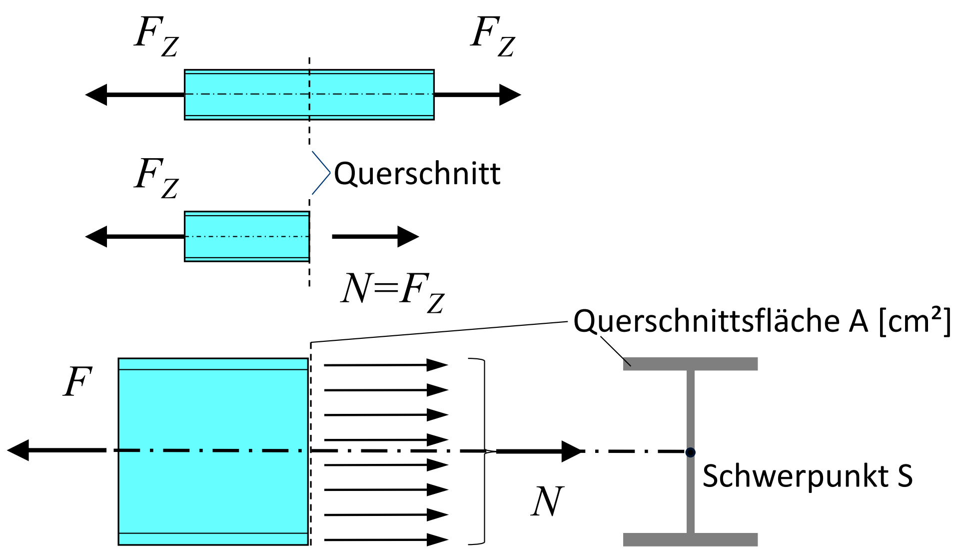
Spannungen: Spannungen treten in Bauteilen aufgrund äußerer Kräfte auf.

Schnittkräfte/ -größen: N,V und M sind die Resultanten der Spannungen.

N und M resultieren aus **Normalspannungen σ** : senkrecht zur betrachteten Schnittfläche

Normalspannungen aus einer Normalkraft:

- Im ganzen Querschnitt konstant
- Resultierende wirkt im Schwerpunkt



$\boxed{\sigma = N/A}$ [kN/cm²]; Zug positiv, Druck negativ

Festigkeitslehre | Begriffsbestimmung

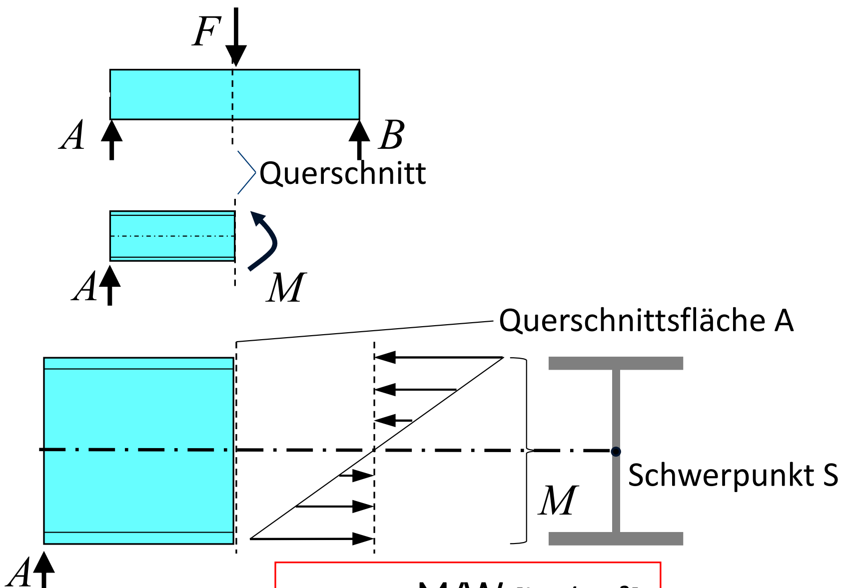
Spannungen: Spannungen treten in Bauteilen aufgrund äußerer Kräfte auf.

Schnittkräfte/ -größen: N,V und M sind die Resultanten der Spannungen.

N und M resultieren aus **Normalspannungen σ** : senkrecht zur betrachteten Schnittfläche

Normalspannungen infolge eines Biegemomentes:

- Linearer Verlauf
- An den Randfasern am größten
- in der Schwerachse: $\sigma = 0$
- W: Widerstandsmoment des Querschnittes



$$\boxed{\sigma_{max} = M/W \text{ [kN/cm}^2\text{]}}$$

Festigkeitslehre | Begriffsbestimmung

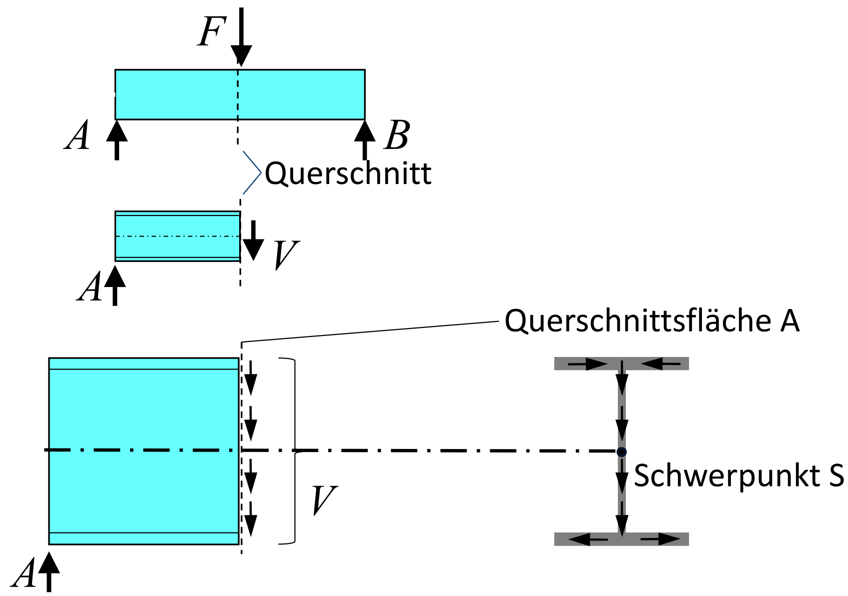
Spannungen: Spannungen treten in Bauteilen aufgrund äußerer Kräfte auf.

Schnittkräfte/ -größen: N,V und M sind die Resultanten der Spannungen.

V resultiert aus **Schubspannungen τ** : parallel zur betrachteten Schnittfläche

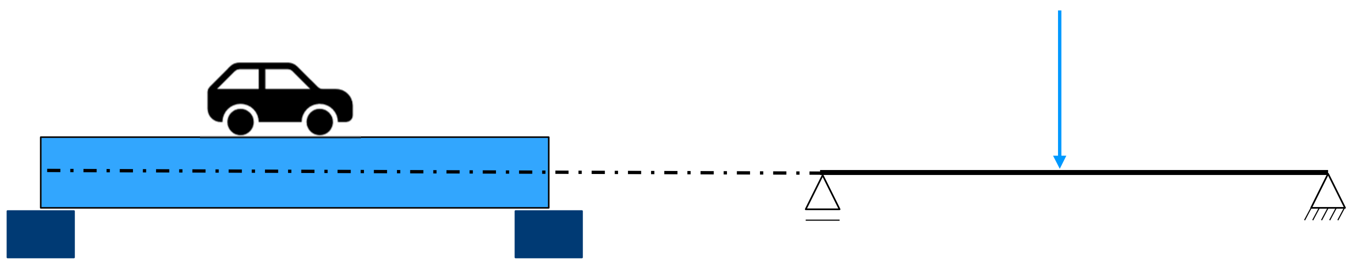
Schubspannungen infolge einer Querkraft:

- Parallel zu den Bauteilrändern
- im Schwerpunkt ist **τ** maximal



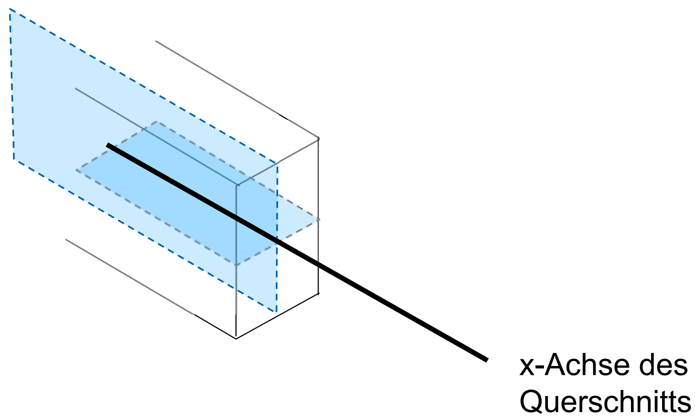
Festigkeitslehre | Querschnittswerte

Schwerpunkt – entspricht Lage der Trägerachse



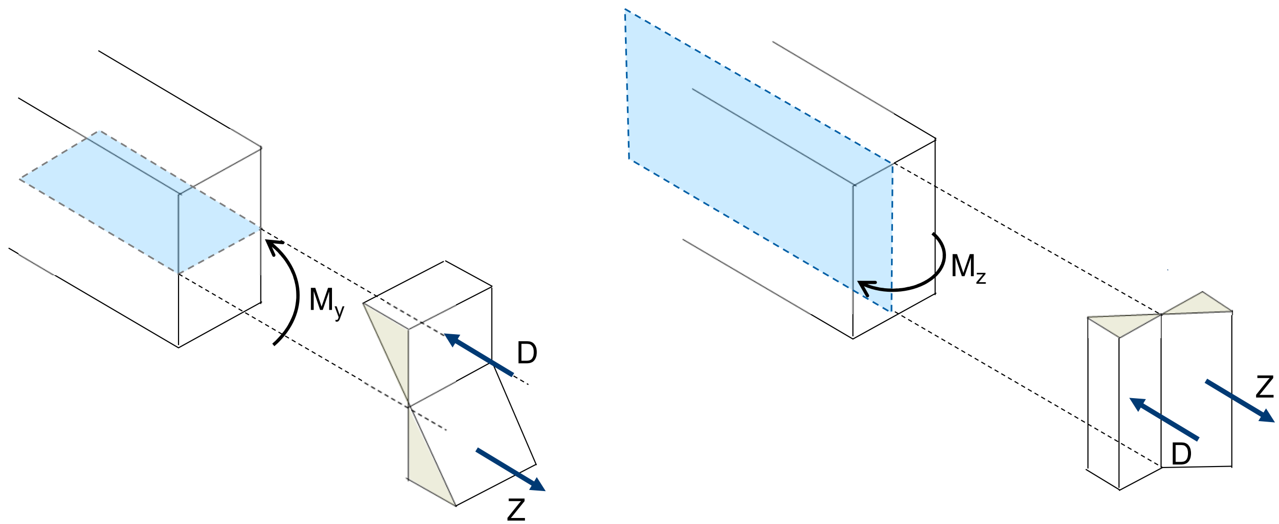
Festigkeitslehre | Querschnittswerte

- Schwerpunkt – entspricht Lage der Trägerachse



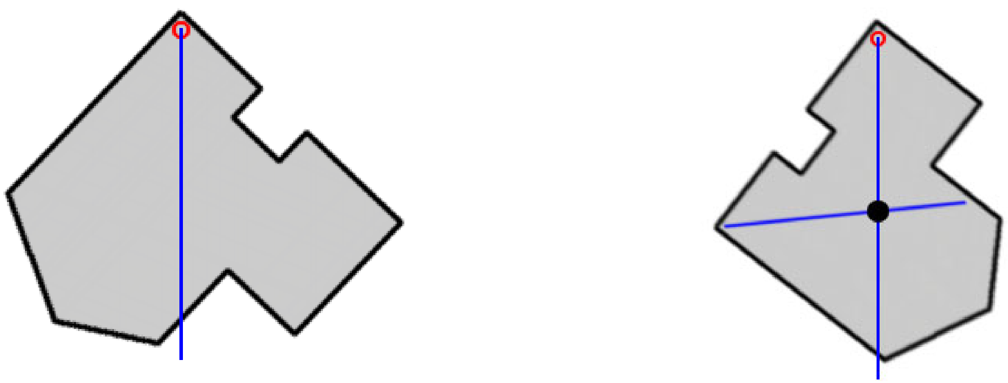
Festigkeitslehre | Querschnittswerte

Schwerpunkt – in dieser Achse wird die Spannung bei reiner Biegung = 0



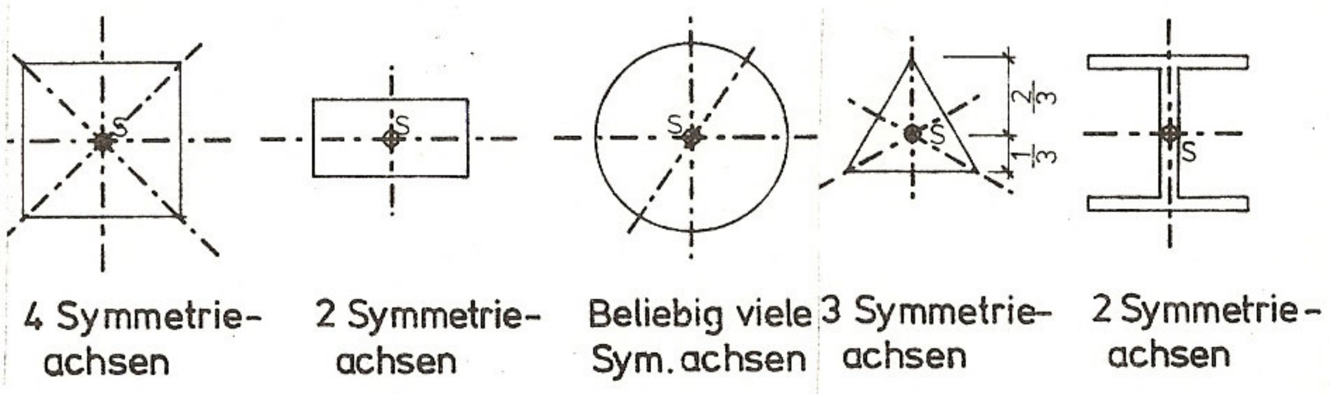
Festigkeitslehre | Schwerpunkt

- Ein beliebiger Körper kann durch Unterstützung an einem Punkt ins Gleichgewicht gebracht werden, wenn dieser Punkt der Schwerpunkt ist.

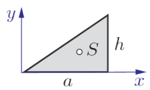
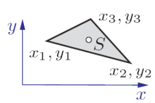


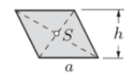
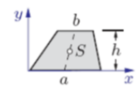
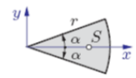
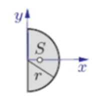
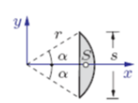
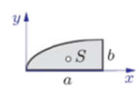
- Alle Schwerlinien schneiden sich im Schwerpunkt.
- Symmetrieachsen sind Schwerachsen

Festigkeitslehre | Schwerpunkt – sym. Querschnitte



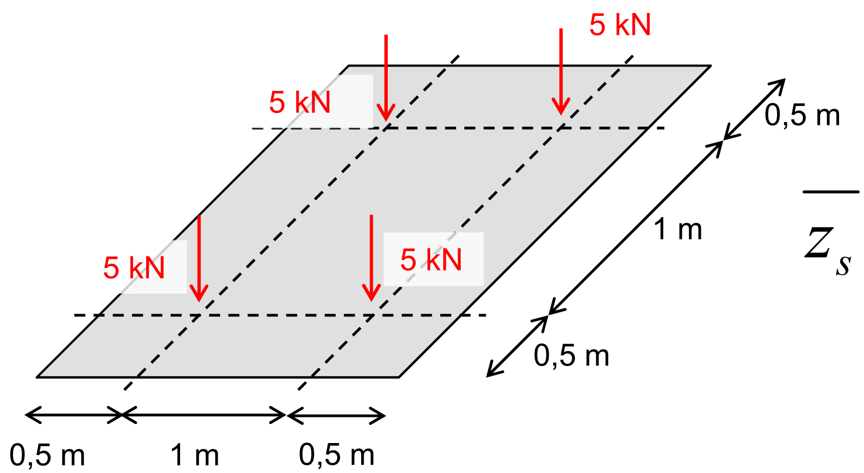
Festigkeitslehre | bekannte Schwerpunkte

Fläche	Flächeninhalt	Schwerpunktslage
rechtwinkliges Dreieck 	$A = \frac{1}{2}ah$	$x_s = \frac{2}{3}a, \quad y_s = \frac{h}{3}$
beliebiges Dreieck 	$A = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$	$x_s = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ $y_s = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$

Fläche	Flächeninhalt	Schwerpunktslage
Parallelogramm 	$A = a\,h$	S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen
Trapez 	$A = \frac{h}{2}(a+b)$	S liegt auf der Seitenhalbierenden $y_s = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}$
Kreisausschnitt 	$A = \alpha\,r^2$	$x_s = \frac{2}{3}\,r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
Halbkreis 	$A = \frac{\pi}{2}\,r^2$	$x_s = \frac{4\,r}{3\,\pi}$
Kreisabschnitt 	$A = \frac{1}{2}\,r^2(2\,\alpha - \sin 2\,\alpha)$	$x_s = \frac{s^3}{12\,A} = \frac{4}{3}\,r\,\frac{\sin^3\alpha}{2\,\alpha - \sin 2\,\alpha}$
quadratische Parabel 	$A = \frac{2}{3}\,a\,b$	$x_s = \frac{3}{5}\,a$ $y_s = \frac{3}{8}\,b$

Festigkeitslehre |

Schwerpunktbestimmung



$$\overline{z_s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \cdot \overline{z_i}}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

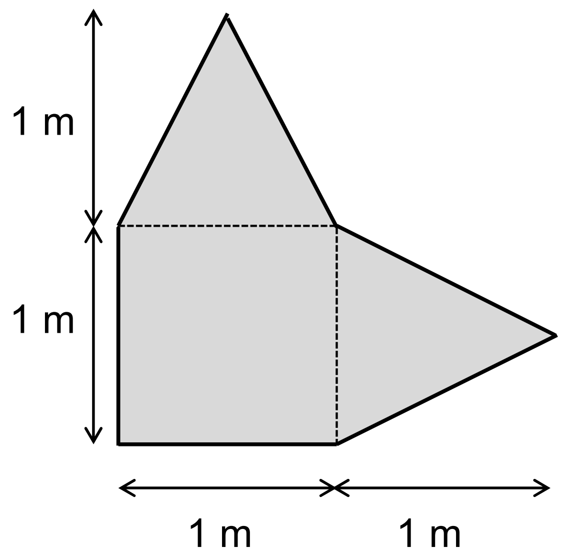
Festigkeitslehre | Flächenschwerpunkt

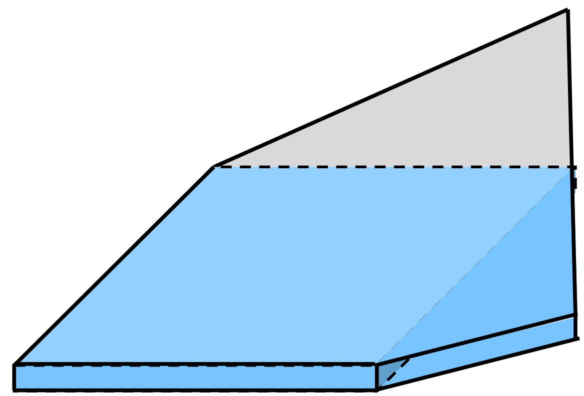
FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

U!REKA EUROPEAN UNIVERSITY

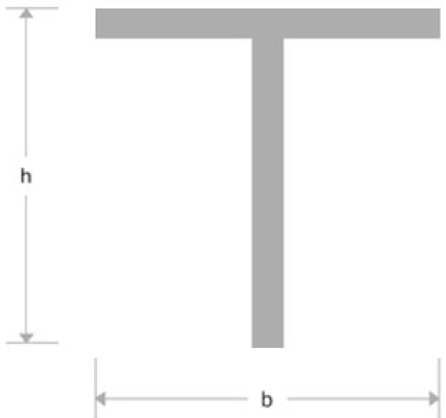
- Sonderfall homogener Körper
  mit Wichte = konstant, Dicke= konstant

$$\overline{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \overline{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \overline{z}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \overline{z_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$


1 m
1 m
1 m
1 m



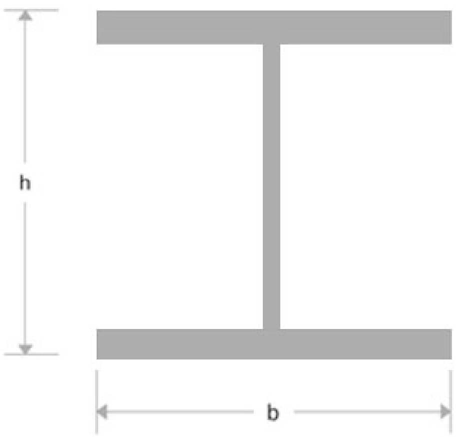
Festigkeitslehre | Flächenschwerpunkt



$$\overline{y_s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \overline{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

$$\overline{z_s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \overline{z_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

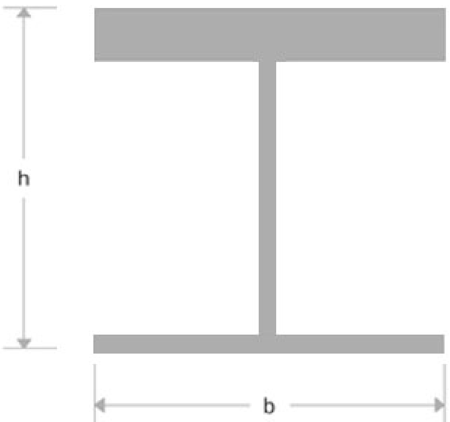
Festigkeitslehre | Flächenschwerpunkt



$$\overline{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \overline{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

$$\overline{z}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \overline{z}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

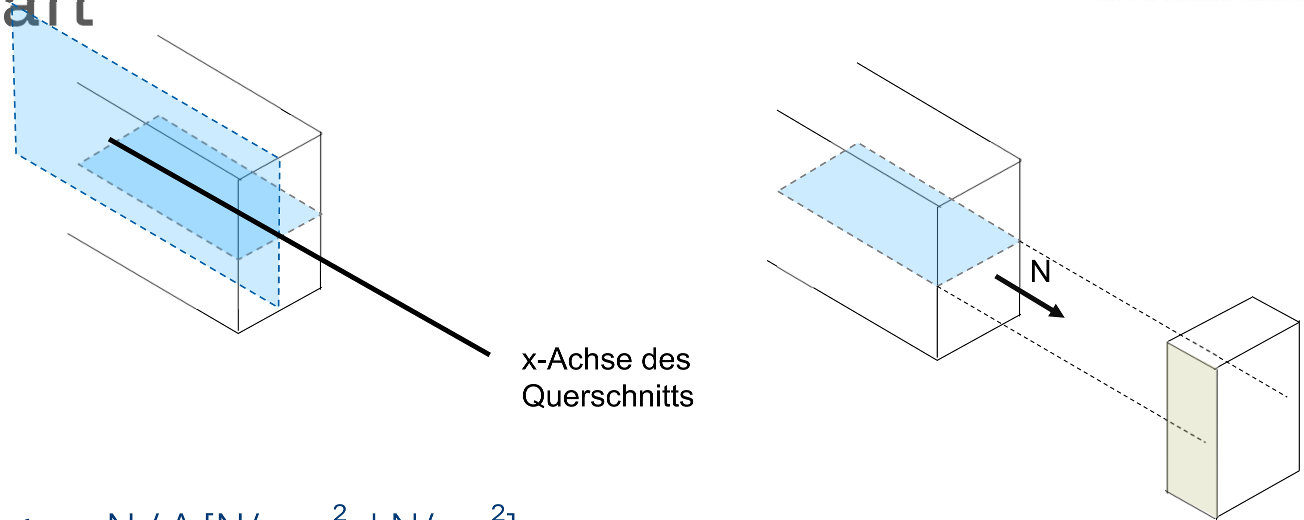
Festigkeitslehre | Flächenschwerpunkt



$$\overline{y_s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \overline{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

$$\overline{z_s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \overline{z_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Festigkeitslehre | Spannung infolge Normalkraft

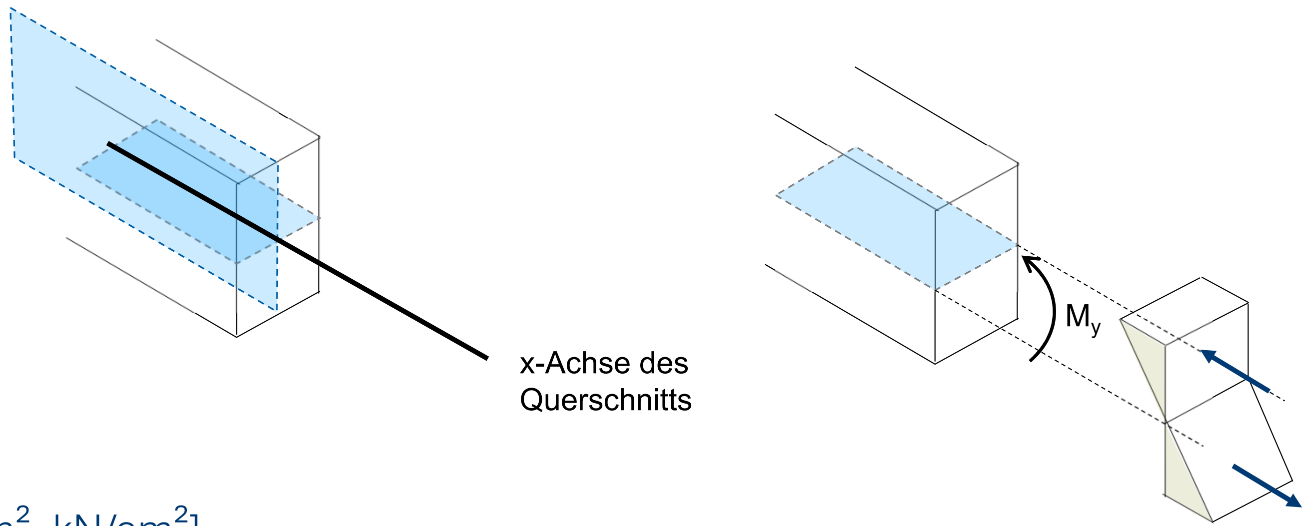


Normalspannung σ = N / A [N/mm², kN/cm²]

- (Kraft pro Fläche)

- N = Normalkraft [N, kN]
- A = Querschnittsfläche [mm², cm²]

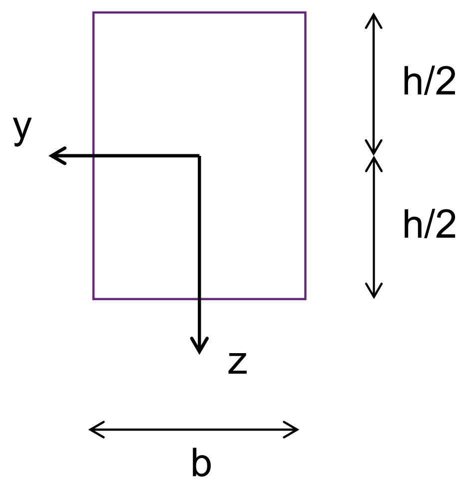
Festigkeitslehre | Spannung infolge Biegung

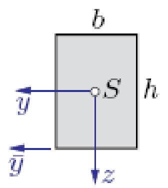
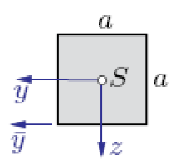
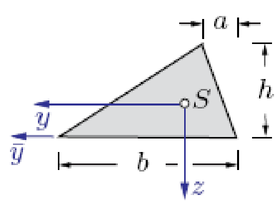


$\sigma = M / W$ [N/mm², kN/cm²]

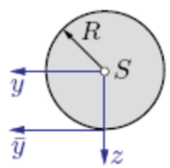
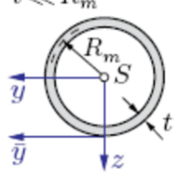
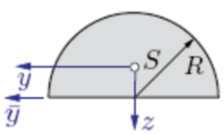
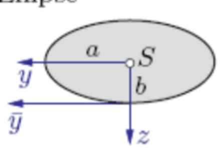
- M = Moment [kNm, kNcm, Nmm]
- W = Widerstandsmoment des Querschnitts [m³, cm³, mm³]
  = *I / max z* ; *I*= Flächenträgheitsmoment

Festigkeitslehre | Flächenträgheitsmoment



Fläche	I_y	I_z	I_{yz}	I_p	$I_{\bar{y}}$
Rechteck 	$\frac{b\,h^3}{12}$	$\frac{h\,b^3}{12}$	0	$\frac{b\,h}{12}(h^2+b^2)$	$\frac{b\,h^3}{3}$
Quadrat 	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	0	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{a^4}{3}$
Dreieck 	$\frac{b\,h^3}{36}$	$\frac{b\,h}{36}(b^2-b\,a+a^2)$	$-\frac{b\,h^2}{72}(b-2\,a)$	$\frac{b\,h}{36}(h^2+b^2-b\,a+a^2)$	$\frac{b\,h^3}{12}$

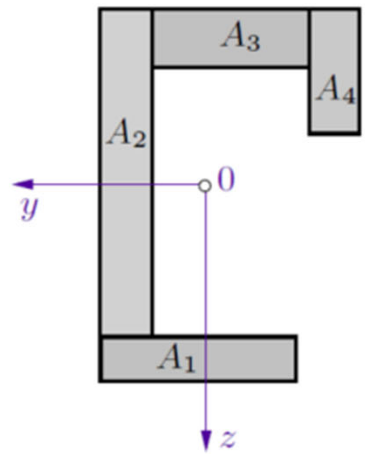
Festigkeitslehre | bekannte Flächenträgheitsmoment

Kreis 	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0	$\frac{\pi R^4}{2}$	$\frac{5\pi}{4} R^4$
dünner Kreisring $t \ll R_m$ 	$\pi R_m^3 \, t$	$\pi R_m^3 \, t$	0	$2\pi R_m^3 \, t$	$3\pi R_m^3 \, t$
Halbkreis 	$\frac{R^4}{72\pi}(9\pi^2 - 64)$	$\frac{\pi R^4}{8}$	0	$\frac{R^4}{36\pi}(9\pi^2 - 32)$	$\frac{\pi R^4}{8}$
Ellipse 	$\frac{\pi}{4} a b^3$	$\frac{\pi}{4} b a^3$	0	$\frac{\pi a b}{4}(a^2 + b^2)$	$\frac{5\pi}{4} a b^3$

Flächenträgheitsmomente bei dünnwandigen offenen Profilen

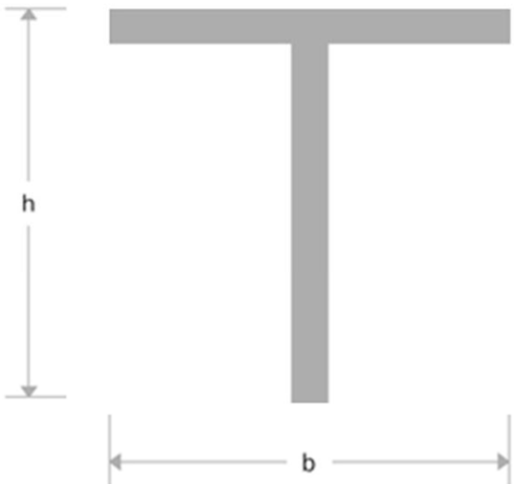
$$I_y = \sum(I_{yi} + A_i * z_i^2)$$

$$I_z = \sum(I_{zi} + A_i * y_i^2)$$



Festigkeitslehre | Satz von Steiner

Flächenträgheitsmomente bei dünnwandigen offenen Profilen

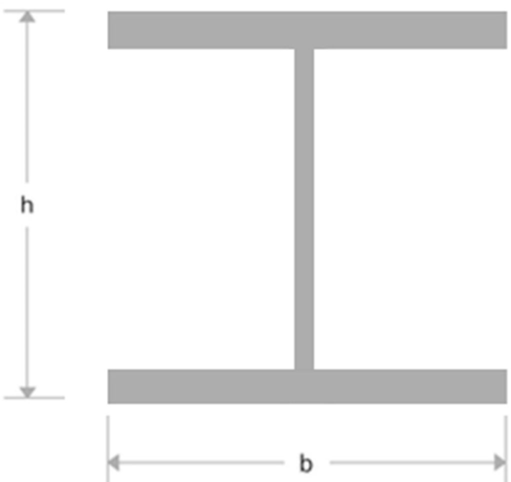


$$I_y = \sum(I_{yi} + A_i * z_i^2)$$

$$I_z = \sum(I_{zi} + A_i * y_i^2)$$

Festigkeitslehre | Satz von Steiner

Flächenträgheitsmomente bei dünnwandigen offenen Profilen

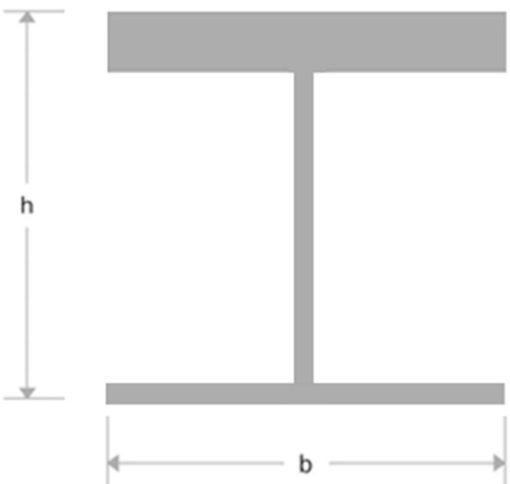


$$I_y = \sum(I_{yi} + A_i * z_i^2)$$

$$I_z = \sum(I_{zi} + A_i * y_i^2)$$

Festigkeitslehre | Satz von Steiner

Flächenträgheitsmomente bei dünnwandigen offenen Profilen

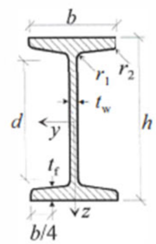


$$I_y = \sum(I_{yi} + A_i * z_i^2)$$

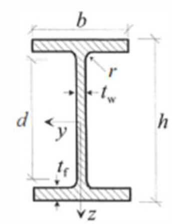
$$I_z = \sum(I_{zi} + A_i * y_i^2)$$

Festigkeitslehre | bekannte Flächenträgheitsmoment

Schmale I-Träger



Mittelbreite I-Träger
IPEa
IPEo
IPEv
IPE siehe S. 8.161 f.



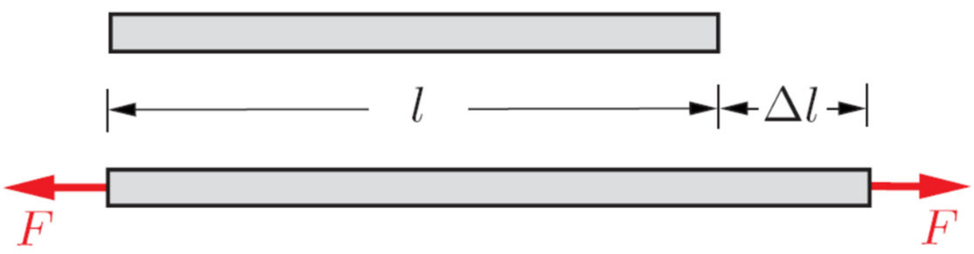
I-Reihe nach DIN 1025-1 (04.09) und DIN EN 10 034 (03.94)

Nennhöhe	Profilmaße						Statische Werte								g
	h mm	b mm	$t_w = r_1$ mm	t_f mm	r_2 mm	d mm	A cm²	I_y cm⁴	$W_{el,y}$ cm³	i_y cm	I_z cm⁴	$W_{el,z}$ cm³	i_z cm	S_y cm³	kN/m
80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	7,57	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	0,059
100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	10,6	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	0,083
120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	14,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	0,111
140	140	66	5,7	8,6	3,4	109	18,2	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	47,7	0,143
160	160	74	6,3	9,5	3,8	125	22,8	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	0,179
180	180	82	6,9	10,4	4,1	142	27,9	1 450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	0,219
200	200	90	7,5	11,3	4,5	159	33,4	2 140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	0,262
220	220	98	8,1	12,2	4,9	176	39,5	3 060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	0,311
240	240	106	8,7	13,1	5,2	192	46,1	4 250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	0,362
260	260	113	9,4	14,1	5,6	208	53,3	5 740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	0,419
280	280	119	10,1	15,2	6,1	225	61,0	7 590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	0,479
300	300	125	10,8	16,2	6,5	241	69,0	9 800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	0,542
320	320	131	11,5	17,3	6,9	258	77,7	12 510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	0,610
340	340	137	12,2	18,3	7,3	274	86,7	15 700	923	13,5	674	98,4	2,80	540	0,680
360	360	143	13,0	19,5	7,8	290	97,0	19 610	1 090	14,2	818	114	2,90	638	0,761
400	400	155	14,4	21,6	8,6	323	118	29 210	1 460	15,7	1 160	149	3,13	857	0,924
450	450	170	16,2	24,3	9,7	363	147	45 850	2 040	17,7	1 730	203	3,43	1 200	1,15
500	500	185	18,0	27,0	10,8	404	179	68 740	2 750	19,6	2 480	268	3,72	1 620	1,41
550	550	200	19,0	30,0	11,9	445	212	99 180	3 610	21,6	3 490	349	4,02	2 120	1,66
600	600	215	21,6	32,1	13,0	485	254	139 000	4 630	23,4	4 670	434	4,30	2 730	1,99

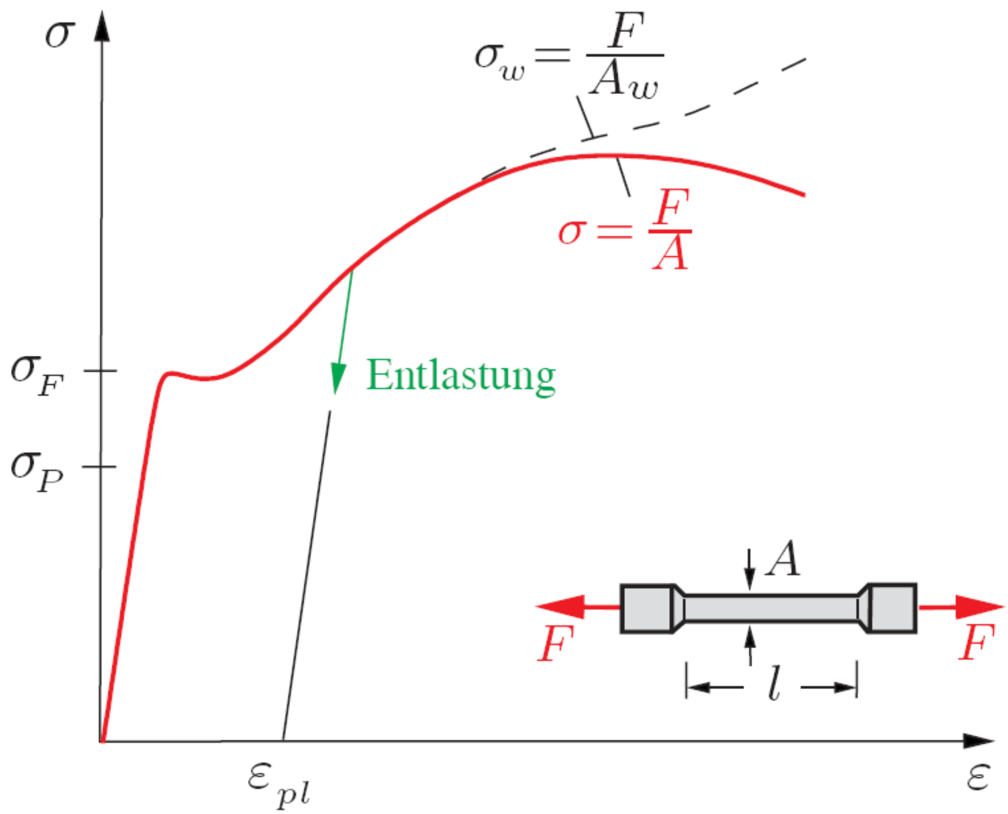
Festigkeitslehre | Dehnung

- Dehnung ist das Verhältnis der
- Längenänderung zur Ausgangslänge.
- Die Dehnung $\varepsilon = \Delta l / l$ ist dimensionslos.

- Verlängerung: positiv
- Verkürzung: negativ



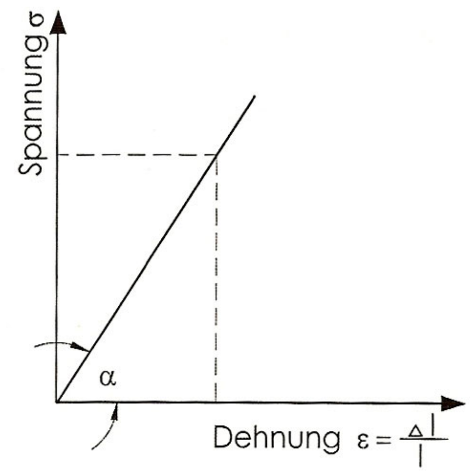
Festigkeitslehre | Dehnung - werkstoffabhängig



Festigkeitslehre | Hooksches Gesetz

Spannungen und Dehnungen sind im elastischen Bereich proportional zueinander.

$$\sigma = E\varepsilon$$



Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Biegung – Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y und M_z

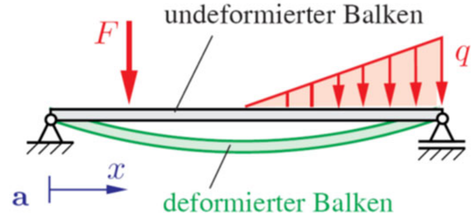
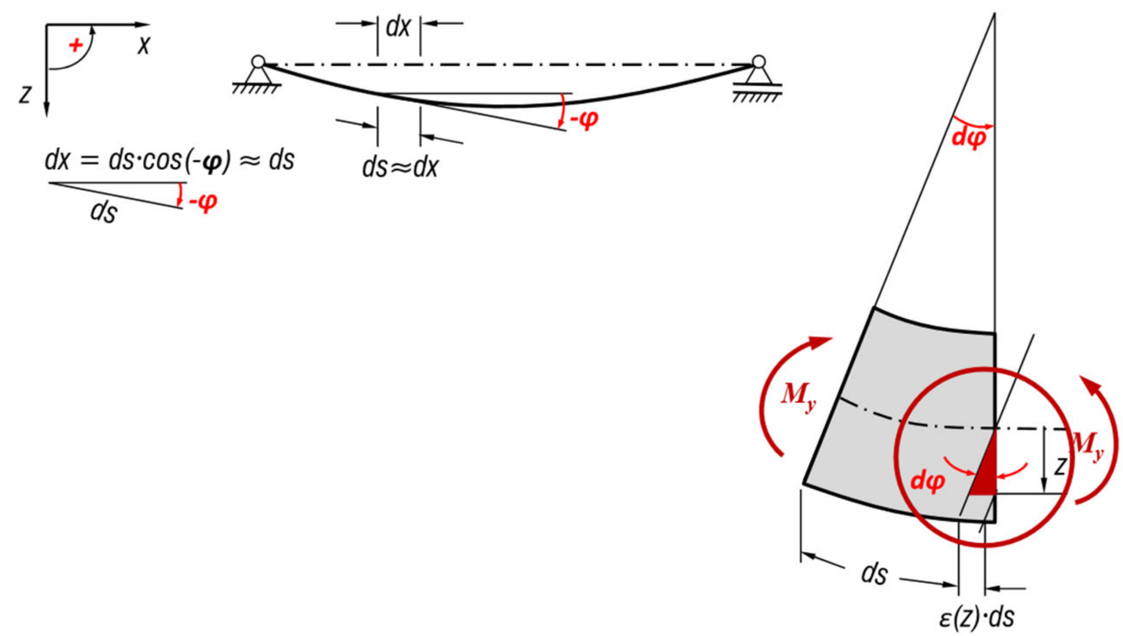


Abb. 4.18

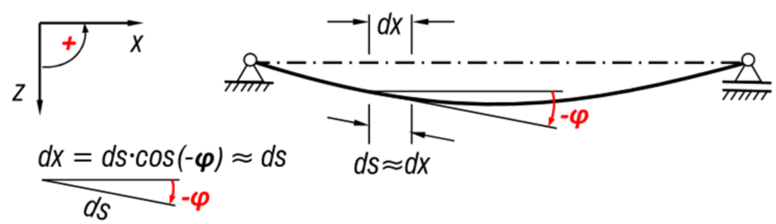
Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



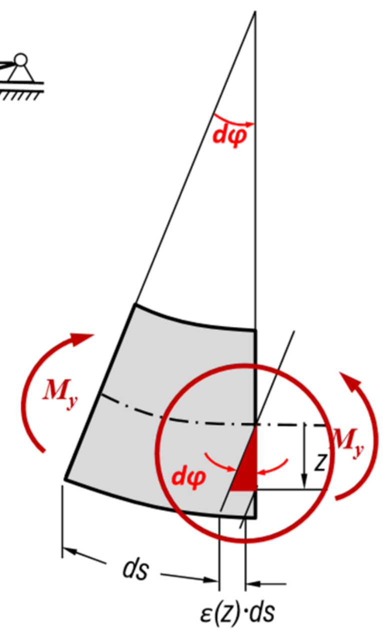
Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d\varphi}{dx} = -w''$$

Krümmung = -(2. Ableitung der Durchbiegung)

mit: $$d\varphi = \frac{M_y}{EI_y} dx$$

folgt: $$M_y = -EI_y w''$$



Festigkeitslehre | Biegung infolge Krümmung

Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y

$$EI_y \underbrace{w(x)}_{\text{Durchbiegung}} = -\iint M_y(x)dx + C_1 \cdot x + C_2$$

$$EI_y \underbrace{w'(x)}_{\text{Verdrehung}} = -\int M_y(x)dx + C_1$$

$$EI_y \underbrace{w''(x)}_{\text{Krümmung}} = -\underbrace{M_y(x)}_{\text{Moment}}$$

$$EI_y w'''(x) = -\frac{dM_y(x)}{dx} = -\underbrace{V_z(x)}_{\text{Querkraft}}$$

$$EI_y w''''(x) = -\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} = -\frac{dV_z(x)}{dx} = q_z(x) \text{ — Last}$$