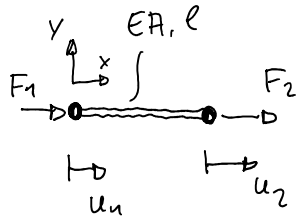
Energieprinzip - Ansatzfunktion

Donnerstag, 9. Januar 2025

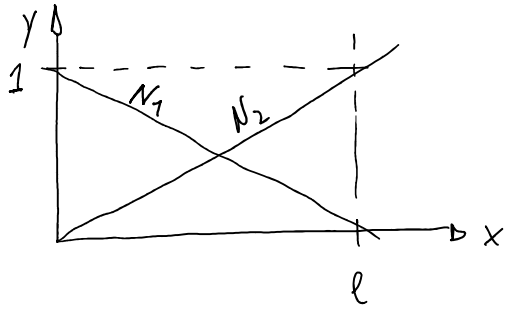
2 - Knoten - Element



Für die Entwicklung von Elementmatrizen spielen Ansatzfunktionen eine wichtige Rolle.

⇒ Formfunktion N_i

Sie hat die Eigenschaft, dass sie an einem Ende des Elementes 1 ist und am anderen Ende 0 ist.



$N_1(x=0) = 1$; $N_1(x=\ell) = 0$

$N_2(x=0) = 0$; $N_2(x=\ell) = 1$

Die Näherungslösung für die Verformung $u(x)$ lässt sich als Linearkombination der Formfunktion $N_i(x)$ auffassen.

$$\boxed{u(x) = N_1 u_1 + N_2 \cdot u_2}$$

1) Wahl der geeigneten Ansatzfunktion

→ für den Stab mit 2 Freiheitsgraden (u_1, u_2) ⇒ lineare Ansatz-funktion

$$u(x) = a_1 + a_2 x$$

2) Erfüllen der Randbedingungen

$$u(0) = u_1 = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = u_1$$

$$u(\ell) = u_2 = a_1 + a_2 \ell \quad \Rightarrow \quad a_2 = (u_2 - u_1)/\ell$$

3) Einsetzen in die Ansatzfunktion

$$u(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{\ell}$$

$$u(x) = u_1\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + u_2\frac{x}{\ell}$$

$$u(x) = u_1 N_1 + u_2 N_2$$

$$\rightarrow \quad N_1 = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad \rightarrow \quad N_1' = -\frac{1}{\ell}$$

$$\rightarrow \quad N_2 = \frac{x}{\ell} \quad \rightarrow \quad N_2' = \frac{1}{\ell}$$

4.) Einsetzen in DGL für das Gesamtpotential

$$\boxed{\Pi = \int_0^\ell \frac{1}{2} EA \left[\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\right]^2 dx - F_k u_k(0) - F_k u_k(\ell)}$$

Partielle Ableitungen nach u_k mit dem Ansatz $u(x) = \sum u_i N_i$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\Pi}{du_k} = \int_0^\ell \frac{2}{2} EA \left[\sum_{i=1}^{n} u_i N_i'(x)\right] N_k' \, dx - F_k N_k(0) - F_k N_k(\ell)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\Pi}{du_k} = \sum_{i=1}^{u} u_i \int_0^\ell EA \, N_i'(x) N_k' \, dx - F_k N_k(0) - F_k N_k(\ell)}$$

für $k = 1, 2, 3 \ldots m$ (Anzahl der Reihen)

$i = 1, 2, 3 \ldots n$ (Anzahl der Spalten)

$\boxed{\text{für } k = 1}$ mit Potentialänderung $\frac{d\Pi}{du_k} = 0$

für $k = 1$ mit Potenzialänderung $\frac{d\Pi}{du_k} = 0$

$(i=1)$ $(i=2)$

$$0 = EA \left[u_1 \int_0^e N_1' N_1' \, dx + u_2 \int_0^e N_2' N_1' \, dx \right] - F_1 N_1(0) - \bar{F}_1 N_1(e)$$

$$= EA \left[u_1 \int_0^e \left(-\frac{1}{e}\right)\left(-\frac{1}{e}\right) dx + u_2 \int_0^e \left(\frac{1}{e}\right)\left(-\frac{1}{e}\right) dx \right] - F_1 \left(1 - \frac{0}{e}\right) - \bar{F}_1 \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$= EA \left[u_1 \int_0^e \frac{1}{e^2} \, dx + u_2 \int_0^e -\frac{1}{e^2} \, dx \right] - \bar{F}_1$$

$$= EA \left[u_1 \left(\frac{x}{e^2}\right)\Big|_0^e + u_2 \left(-\frac{x}{e^2}\right)\Big|_0^e \right] - \bar{F}_1$$

$$= EA \left(u_1 \frac{e}{e^2} + u_2 \left(-\frac{e}{e^2}\right) \right) - \bar{F}_1$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = EA \frac{1}{e} (u_1 - u_2)$$

---

für $k = 2$ mit $\frac{d\Pi}{du_k} = 0$

$(i=1)$ $(i=2)$

$$0 = EA \left(u_1 \int_0^e N_1 N_2' \, dx + u_2 \int_0^e N_2 N_2' \, dx \right) - F_2 (N_2(0) - \bar{F}_2 (N_2(e))$$

$$= EA \left(u_1 \int_0^e \left(-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right) dx + u_2 \int_0^e \left(\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right) dx \right) - \bar{F}_2 \left(\frac{0}{e}\right) - F_2 \left(\frac{e}{e}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = EA \frac{1}{e} (-u_1 + u_2)$$

Mit Hilfe der Formfunktion N und den Ableitungen N' lassen sich direkt die Elementsteifigkeiten k_{ik} ermitteln.

$$k_{ik} = \int_0^e EA \, N_i' N_k' \, dx$$

mit $k \rightarrow$ Zeilen
$i \rightarrow$ Spalten

v_0 $\quad$ $i \rightarrow$ Spalten

$$\Rightarrow \quad K_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{12} \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} N_1' N_1' & N_1' N_2' \\ N_2' N_1' & N_2' N_2' \end{bmatrix}$$

einsetzen

$$\left.\begin{aligned} N_1' &= -\frac{1}{\ell} \\ N_2' &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad K_e = EA \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{\ell}\right)\left(-\frac{1}{\ell}\right) & \left(-\frac{1}{\ell}\right)\left(\frac{1}{\ell}\right) \\ \left(-\frac{1}{\ell}\right)\left(\frac{1}{\ell}\right) & \left(\frac{1}{\ell}\right)\left(\frac{1}{\ell}\right) \end{bmatrix}$$

$$= EA \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{K_e}\,\vec{u_e} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$