

Studiengang Mechatronik

Modul 16:

# FEM – Finite Elemente Methode

- 8. Vorlesung -

Prof. Dr. Enno Wagner

15. Dezember 2025

## Übersicht

- Wärmeübertragung
  - Natürliche Konvektion
  - Sieden
- Wärmerohre
- Forschung
  - 3-Phasen-Kontaktlinie

# Finite Elemente Methoden In der Thermodynamik

## Arten des Wärmeübergangs:

1.) Wärmeleitung:  $R_{\lambda} = \frac{d}{\lambda \cdot A}$  (mit  $\lambda$  = Wärmeleitfähigkeit [W/mK])

2.) Konvektion:  $R_{\alpha} = \frac{1}{\alpha \cdot A}$  (mit  $\alpha$  = Wärmeübergangskoeffizient [W/m<sup>2</sup>K])

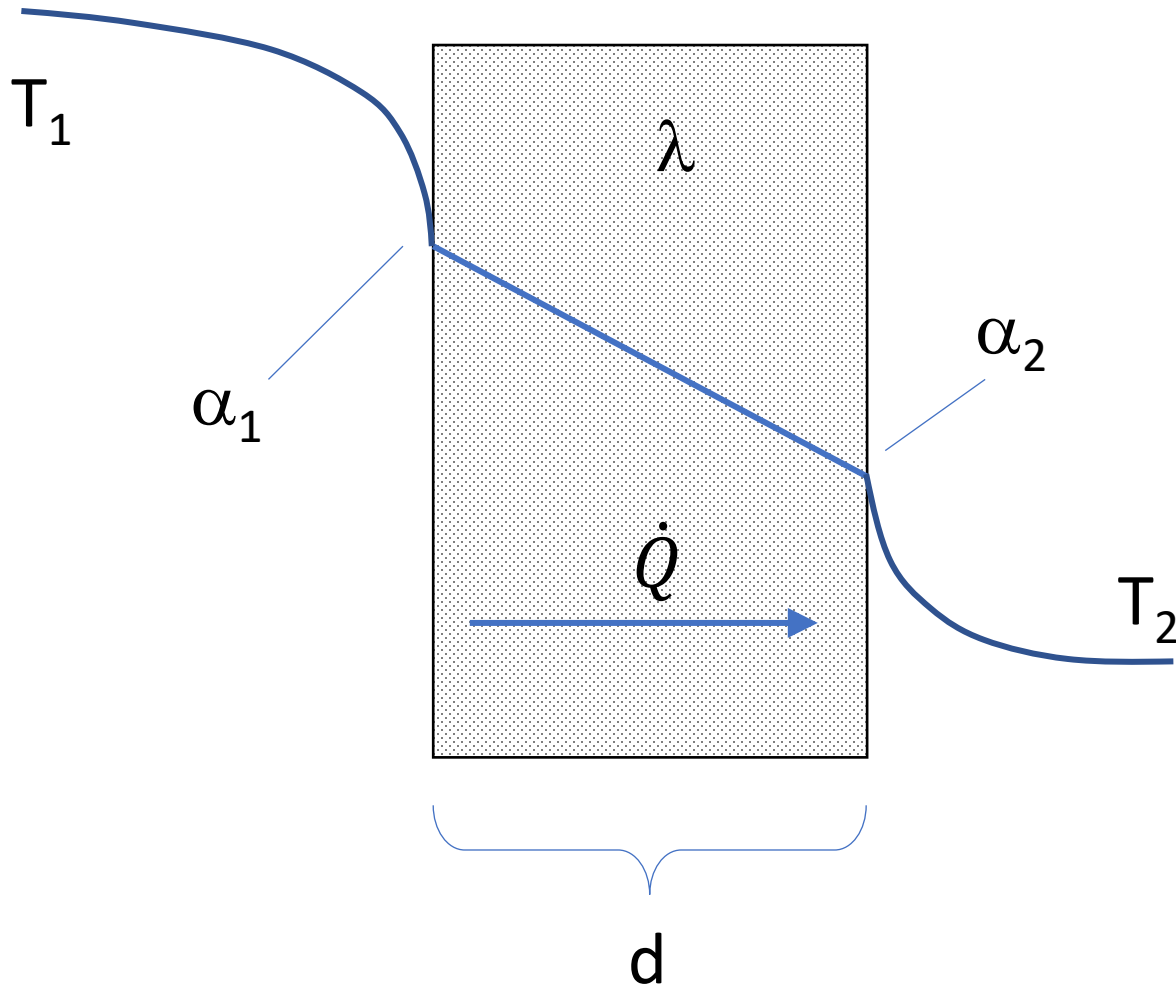
3.) Strahlung (hier nicht betrachtet)

Die Wärmeleitung erfolgt analog der elektrischen Leitung

$$\Delta U = R_{\text{el}} * I \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = R_{\text{therm}} * \dot{Q}$$

Die einzelnen Widerstände können (bei Reihenschaltung) einfach addiert werden:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \frac{d}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\alpha 1} + R_{\lambda} + R_{\alpha 2}} = \frac{T_1 - T_2}{R_k}$$



## Wärmeleitung durch ebene Wand

- Konvektion innen
- Wärmeleitung Wand
- Konvektion außen

$$\dot{q} = \frac{1}{R} (T_1 - T_2)$$

$\dot{Q}$  = Wärmestrom [W]

$R$  = Wärmewiderstand [K/W]

$\alpha$  = Wärmeübergangskoeffizient [W/mK]

# Wärmeleitfähigkeit Metalle

Stoff	t	$\rho$	c	$\lambda$	$10^6 a$
Aluminium 99 75 Al.....	20	2700	0,896	229	94,6
Duraluminium.....	20	2700	0,912	165	67,0
Beryllium.....	20	1850	1,80	159	47,8
Blei (rein).....	0	11340	0,128	35,1	24,2
Bronze (6 Sn, 9 Zn, 84 Cu, 1 Pb)	20	8700-8900	0,377	61,7	18,6
Cadmium.....	0-100	8650	0,230	92,2	46,4
Eisen.....					
Schmiedeeisen rein.....	0	7850	0,465	59	16,2
Gußeisen 3% C.....	20	7000-7700	0,540	58	14,7
Bessemerstahl.....	20	7830		40	
Chromnickelstahl.....	20	7900	0,477	14,5	3,85
V2A Stahl vergütet.....	20	8000	0,477	15	3,93
Cr-Stahl (X8 Cr17) rost- und säurebeständig.....	20	7700	0,46	25,1	7,09
Cr-Al-Stahl (X10 CrAl24) hitzebeständig.....	20	7600	0,50	16,7	4,41
Manganstahl.....	20		0,502	41	
Kobaltstahl 35 Co.....	20	8000		41	
Wolframstahl.....	20	8200		39	
Kesselblech H III.....	20	7900	0,47	52	14,1
Gold (rein).....	20	19290	0,129	310	124
Gold-Platin (40 Au, 60 Pt)....	25			26	
(10 Au, 90 Pt)....	25			76,3	
Iridium.....	20	22500	0,130	58,6	20
Kalium.....	20	860	0,741	196,3	
Kobalt.....	20	8900	0,414	69,1	18,7
Konstantan (60 Cu, 40 Ni).....	20	8800	0,410	22,6	5,69
Kupfer, sehr rein.....	20	8930	0,383	395	115
Handelsware.....	20	8300	0,419	372	107

t Temperatur in °C

$\rho$  Dichte in kg/m<sup>3</sup>

c, c<sub>p</sub> spezifische Wärmekapazität in kJ/kg K

$\lambda$  Wärmeleitfähigkeit in W/m K

$10^6 a$  Temperaturleitfähigkeit in m<sup>2</sup>/sek [ $a = \lambda / (c_p \rho)$ ]

Quelle:

H. Beer, Thermodynamik III,  
TH Darmstadt

## Freie (natürliche) Konvektion

Wärmeübertragung entsteht aufgrund von Dichteunterschieden als Folge von Temperaturunterschieden.

$$Nu = f(Gr \cdot Pr),$$

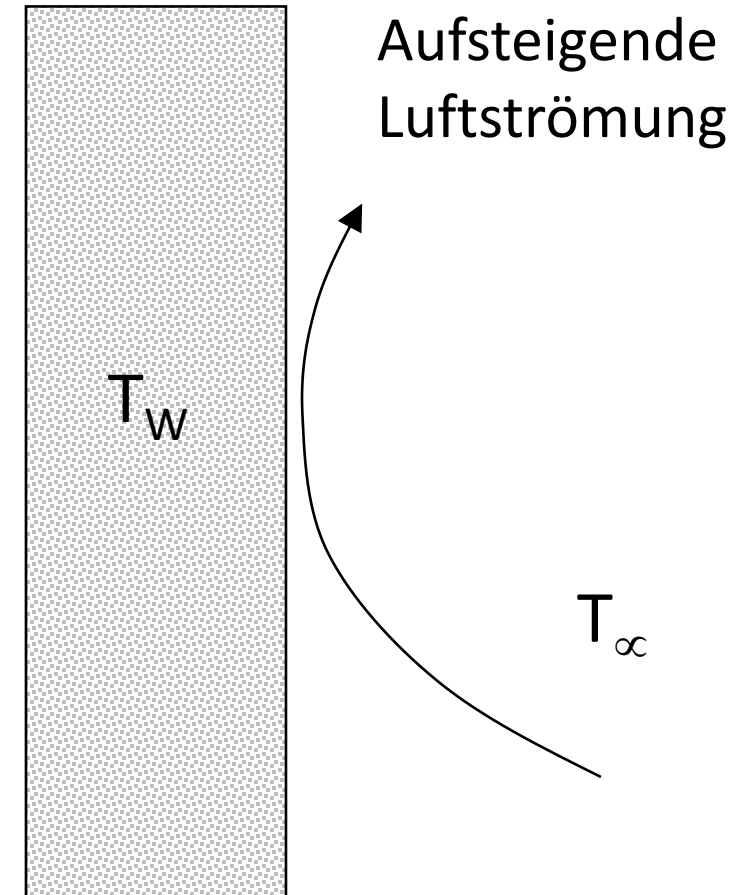
mit der Nußelt-Zahl

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

und der Grashof-Zahl

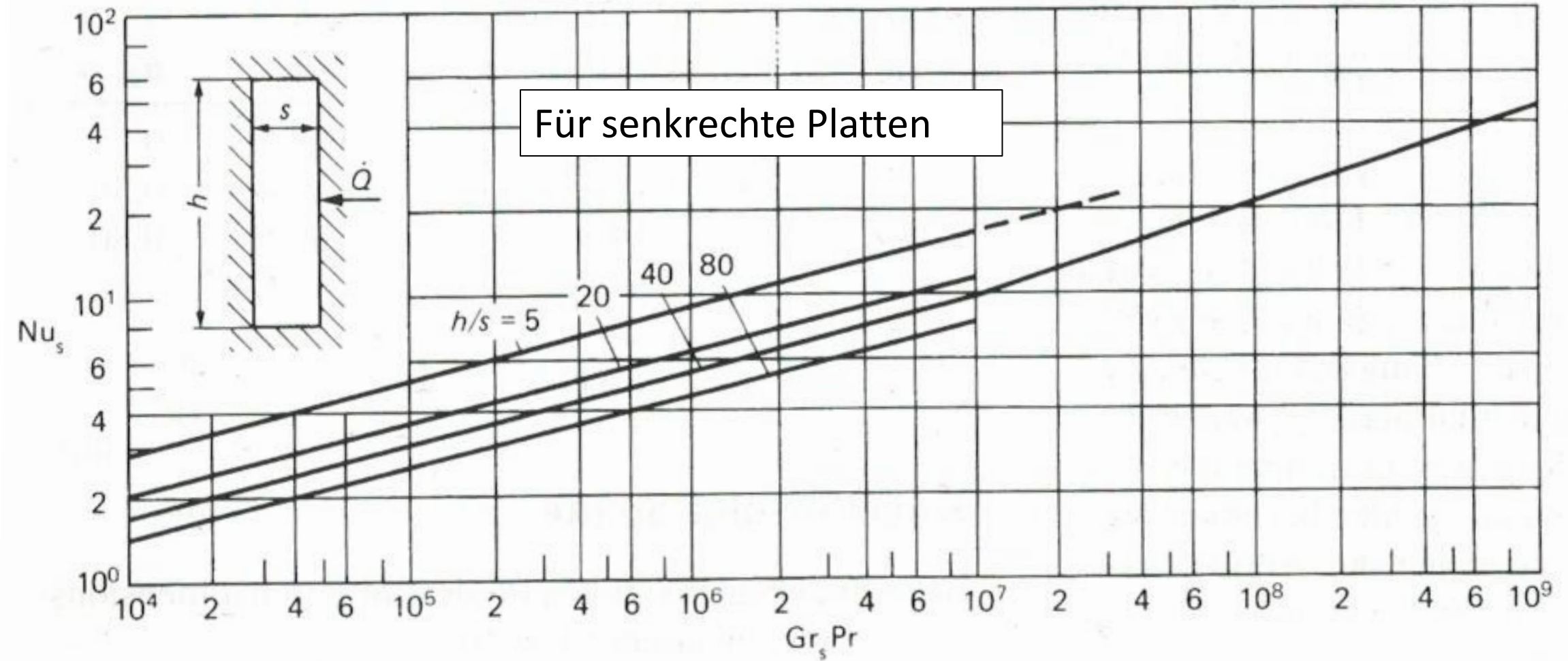
$$Gr = \frac{g l^3}{\nu^2} \beta \Delta \vartheta$$

Pr	Prandtl-Zahl,
$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient,
$l$	Anströmlänge,
$g$	Fallbeschleunigung,
$\nu$	kinematische Viskosität,
$\Delta \vartheta$	Temperaturdifferenz zwischen Oberfläche $\vartheta_0$ und Fluid $\vartheta_\infty$ ,
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit des Fluids,
$\beta$	räumlicher Wärmeausdehnungskoeffizient des Fluids, s. Gl. (5).





# Dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient



# Stoffwerte für trockene Luft

t	$\rho$	$c_p$	$c'_p$	$\lambda$	$\lambda'$	$10^3\beta$	$10^5\eta$	$10^6\nu$	$10^6a$	Pr
-150	2,793	1,028	0,245	0,0120	0,0103	8,21	0,870	3,11	4,19	0,74
-100	1,980	1,011	0,241	0,0165	0,0142	5,82	1,18	5,96	8,28	0,72
-50	1,534	1,007	0,240	0,0206	0,0177	4,51	1,47	9,55	13,4	0,715
0	1,2930	1,006	0,240	0,0243	0,0209	3,67	1,72	13,30	18,7	0,711
20	1,2045	1,007	0,240	0,0257	0,0221	3,43	1,82	15,11	21,4	0,713
40	1,1267	1,008	0,241	0,0271	0,0233	3,20	1,91	16,97	23,9	0,711
60	1,0595	1,009	0,241	0,0285	0,0245	3,00	2,00	18,90	26,7	0,709
80	0,9998	1,010	0,241	0,0299	0,0257	2,83	2,10	20,94	29,6	0,708
100	0,9458	1,012	0,242	0,0314	0,0270	2,68	2,18	23,06	32,8	0,704
120	0,8980	1,014	0,242	0,0328	0,0282	2,55	2,27	25,23	36,1	0,70
140	0,8535	1,017	0,242	0,0343	0,0295	2,43	2,35	27,55	39,7	0,694
160	0,8150	1,020	0,243	0,0358	0,0308	2,32	2,43	29,85	43,0	0,693
180	0,7785	1,023	0,244	0,0372	0,0320	2,21	2,51	32,29	46,7	0,69
200	0,7457	1,026	0,245	0,0386	0,0332	2,11	2,58	34,63	50,5	0,685
250	0,6745	1,035	0,247	0,0421	0,0362	1,91	2,78	41,17	60,3	0,68
300	0,6157	1,046	0,250	0,0454	0,0390	1,75	2,95	47,85	70,3	0,68
350	0,5662	1,057	0,252	0,0485	0,0417	1,61	3,12	55,05	81,1	0,68
400	0,5242	1,069	0,255	0,0516	0,0443	1,49	3,28	62,53	91,9	0,68
450	0,4875	1,081	0,258	0,0543	0,0467		3,44	70,54	103,1	0,685

t Temperatur in °C

$\rho$  Dichte in kg/m³

$c_p$  spezifische Wärme bei konstantem Druck in kJ/kg K

$c'_p$  spezifische Wärme bei konstantem Druck in kcal/kg K

$\lambda$  Wärmeleitfähigkeit in W/m K

$\lambda'$  Wärmeleitfähigkeit in kcal/m h K

$\beta$  thermische Ausdehnungszahl in 1/ K

$\eta$  dynamische Viskosität in kg/m sek

$\nu$  kinematische Viskosität in m²/sek

a Temperaturleitfähigkeit in m²/sek

Pr =  $\nu/a$  Prandtl-Zahl

Quelle:

H. Beer, Thermodynamik III,  
TH Darmstadt

## Natürliche Konvektion

Beispiel-Berechnung für 100 x 100 mm Fläche, 80°C  
Wandtemperatur

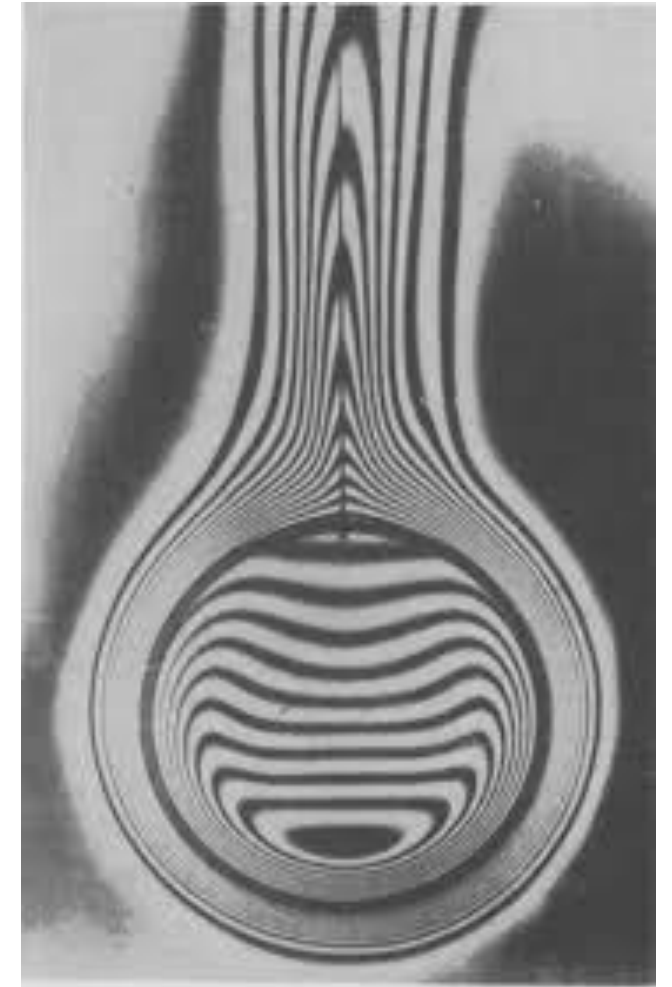
⇒ Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha = 4 \text{ W/m}^2\text{K}$

⇒ Sehr gering !!

Verbesserung mittels Strömung und dichtere Fluide:  
näherungsweise (Quelle: Wikipedia)

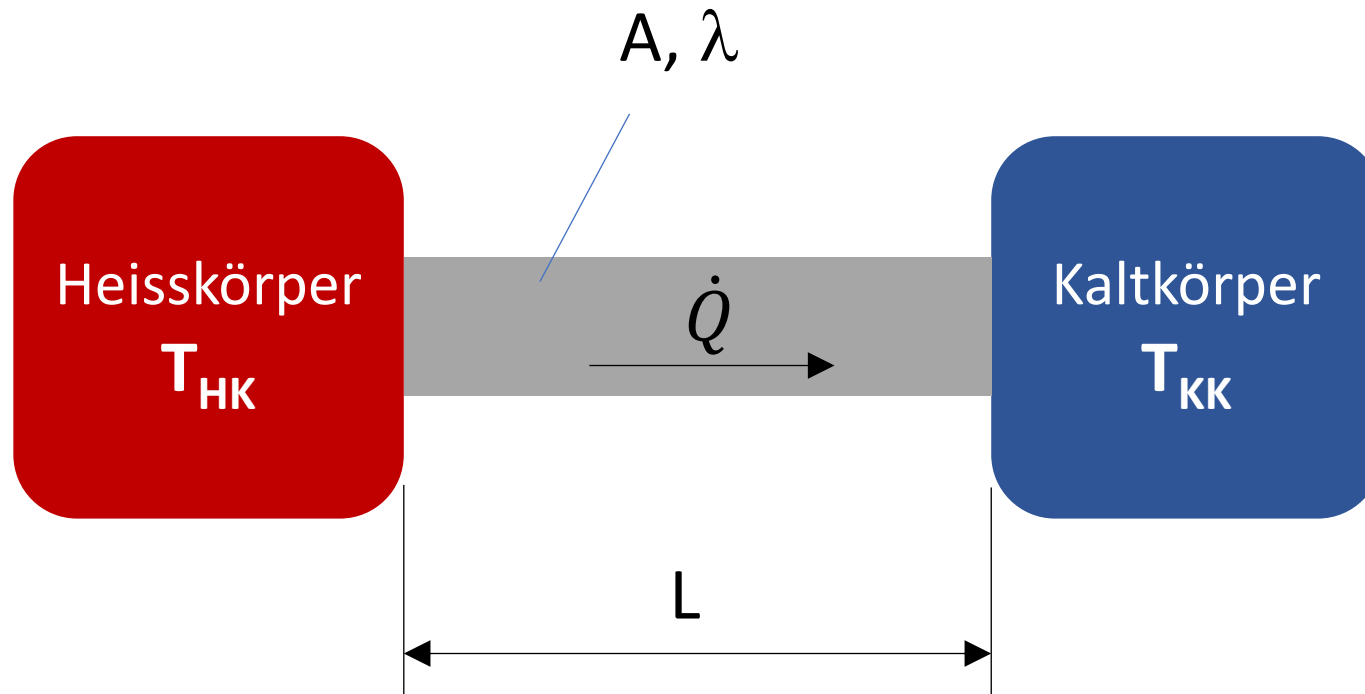
- Medium Luft:  $\alpha = 12 \cdot \sqrt{v} + 2$
- Medium Wasser:  $\alpha = 2100 \cdot \sqrt{v} + 580$

Mit  
Strömungs-  
geschwindigkeit  
 $v \text{ [m/s]}$





## Beispiel: Rundstab



**Berechnen Sie die  
Heißkörper-Temperatur**

$M = \text{Kupfer}$

$L = 0,3 \text{ m}$

$\varnothing = 8 \text{ mm}$

$A = 0,00005 \text{ m}^2$

$\dot{Q} = 100 \text{ W}$

$T_{KK} = 0^\circ\text{C}$

Wie hoch muss  $T_{HK}$  sein?

Wenn man z. B. über einen **massiven Kupferstab** mit 8 mm Durchmesser über eine Länge von 300 mm eine Wärmemenge von 100 Watt übertragen, würde man ein treibendes Temperaturgefälle von theoretisch 1493 °C benötigen, ein utopischer Wert der jenseits der Schmelztemperatur von Kupfer liegt.

Eine **Heatpipe** schafft den gleichen Wärmedurchsatz mit einem treibenden Temperaturgefälle von ca. 0,5°C

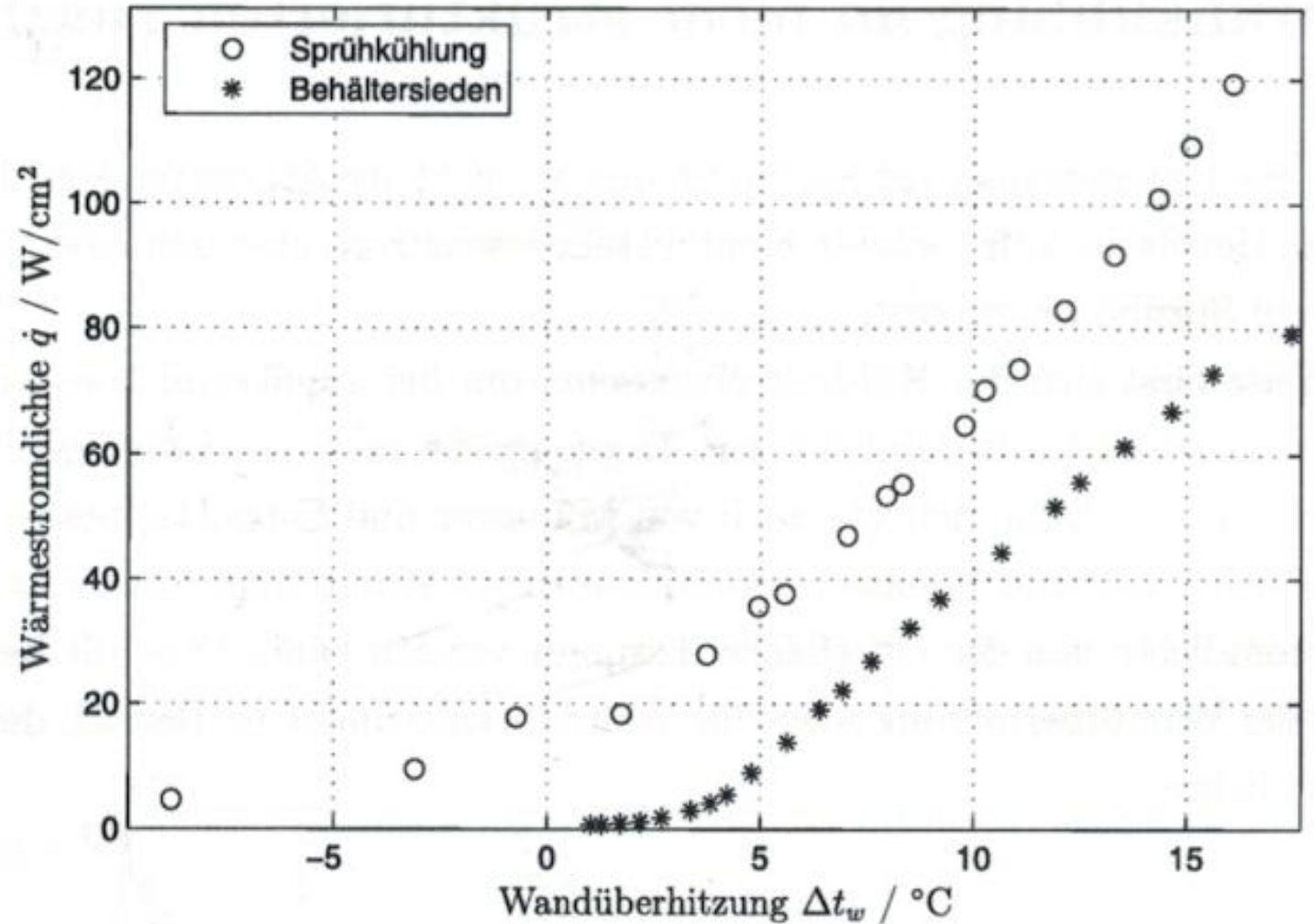
- Wie funktioniert so eine Heat-Pipe?
- Warum können sie so große Wärmeströme bei kleinem  $\Delta T$  übertragen?
- Welche weiteren Möglichkeiten gibt es, Wärme ohne große Temperaturdifferenzen zu übertragen?

## Behältersieden und Sprühkühlung

Quelle:

Diss. C. Sodtke

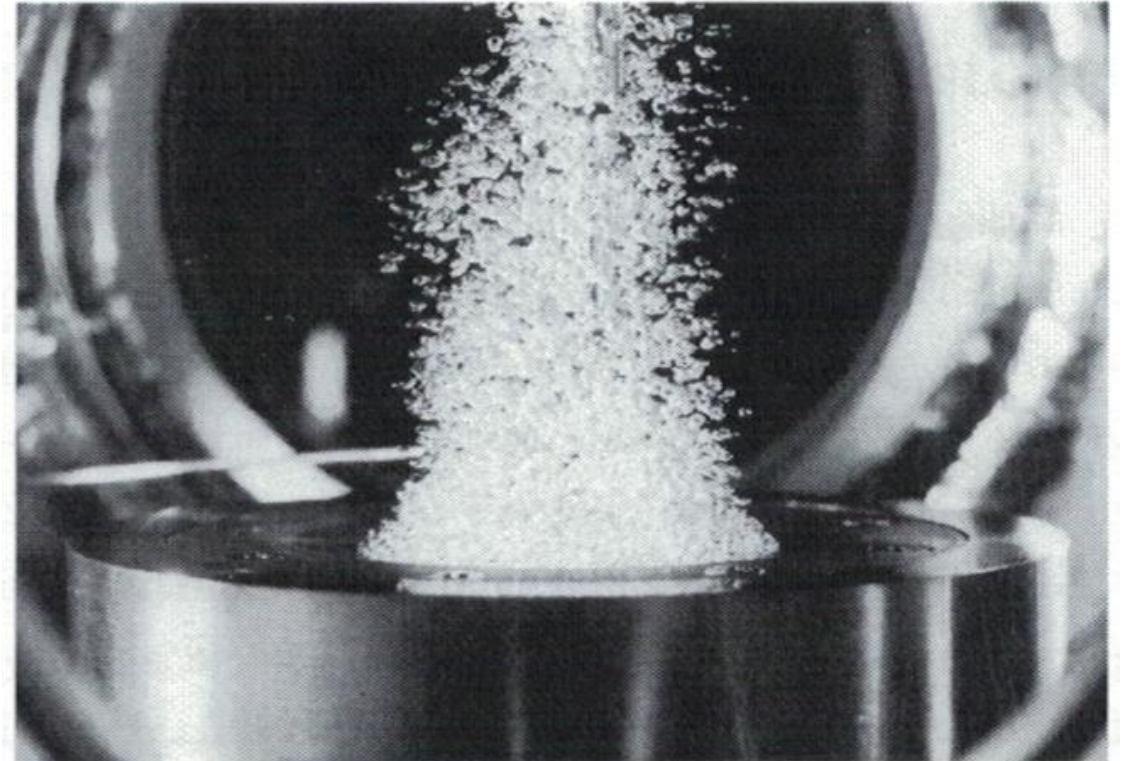
=> Behältersieden  
 $\alpha = 50.000 \text{ W/mK}$



## Behältersieden

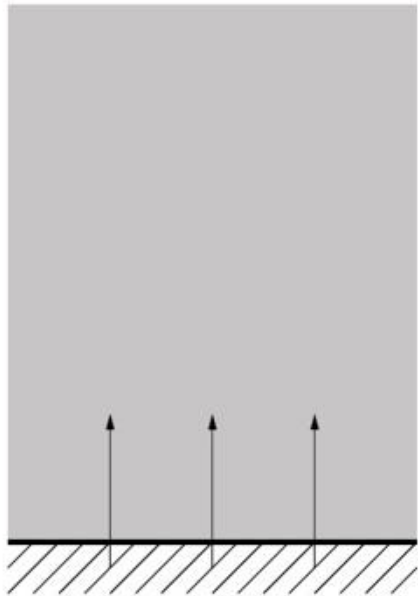
Übergang von flüssige in  
gasförmige Phase

Latente Wärme => sehr große  
Verdampfungsenthalpie!

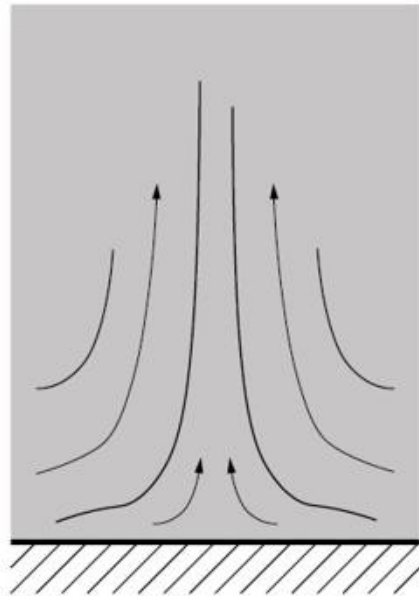




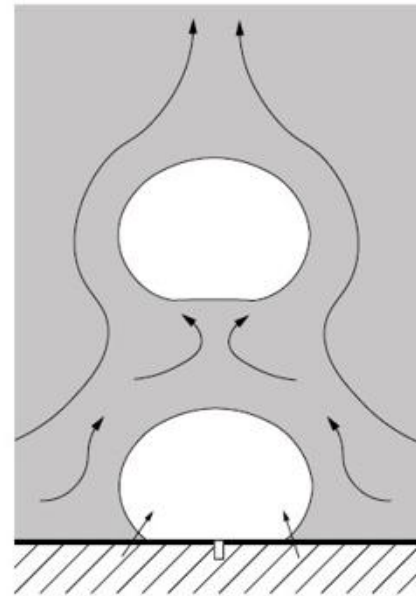
## Mechanismen der Wärmeübertragung beim Behältersieden



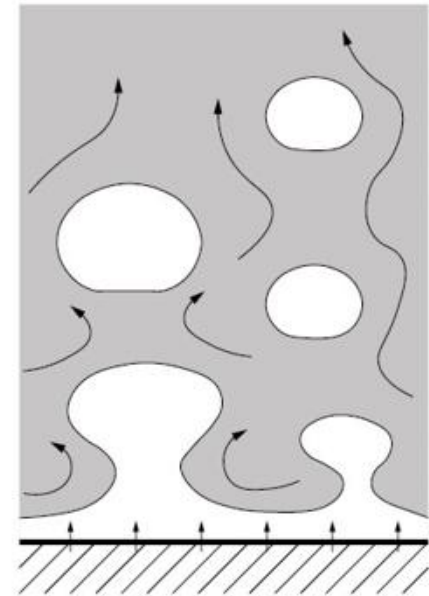
heat conduction



natural convection



nucleate boiling



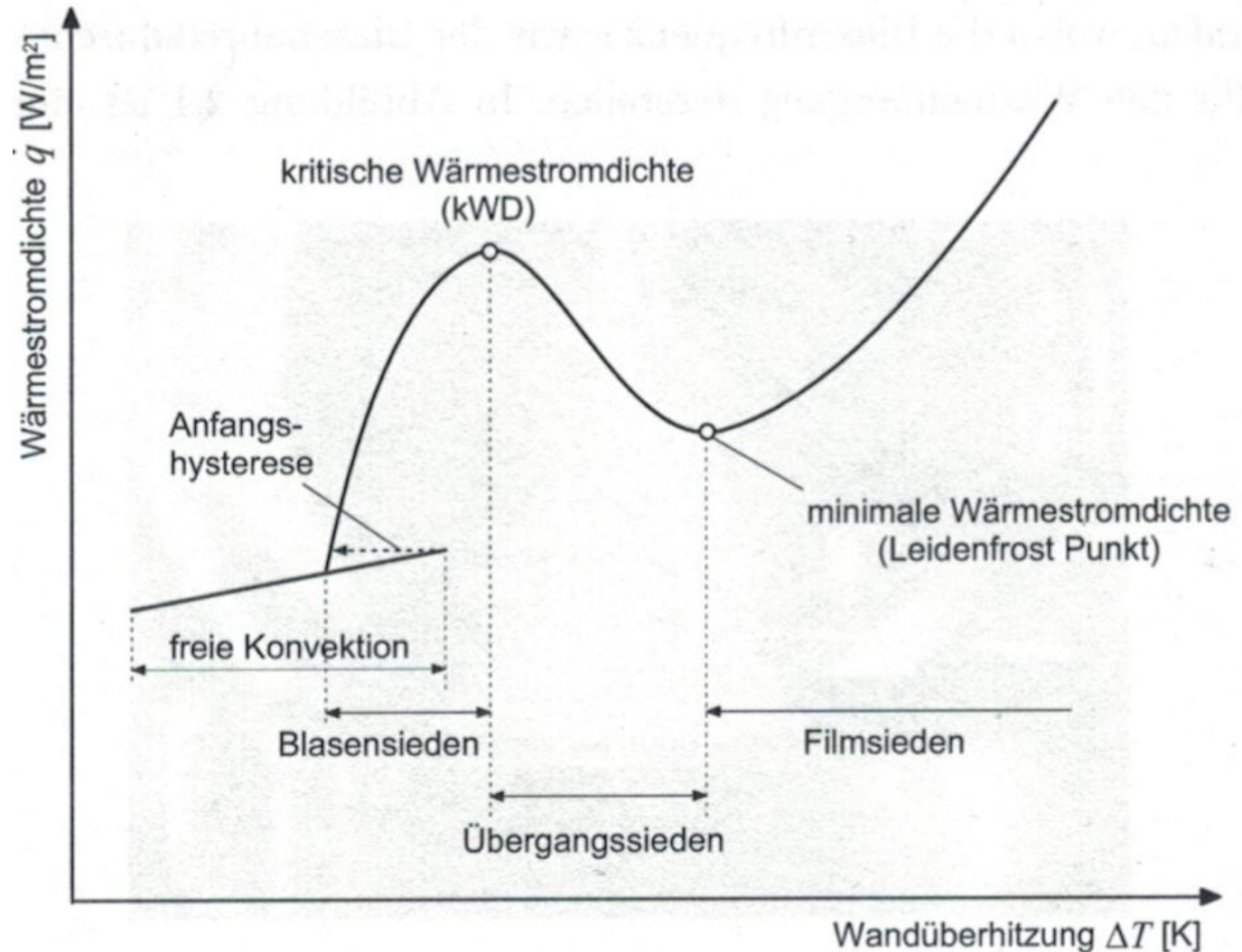
turbulent film boiling

## Siedekurve beim Behältersieden

Quelle:

Diss. E. Wagner

## Unterschiedliche Phasen der Wärmeübertragung



# Wärmerohre (Heatpipes)

## Heatpipes

Das Prinzip der Heatpipe ließ sich der amerikanische GM-Ingenieur Richard S. Gaugler 1944 patentieren. Die Entwicklung wurde 1963 von George M. Grover et al. wiederentdeckt, als man für das amerikanische Raumfahrtprogramm nach effizienten passiven Wärmetransportmöglichkeiten suchte.

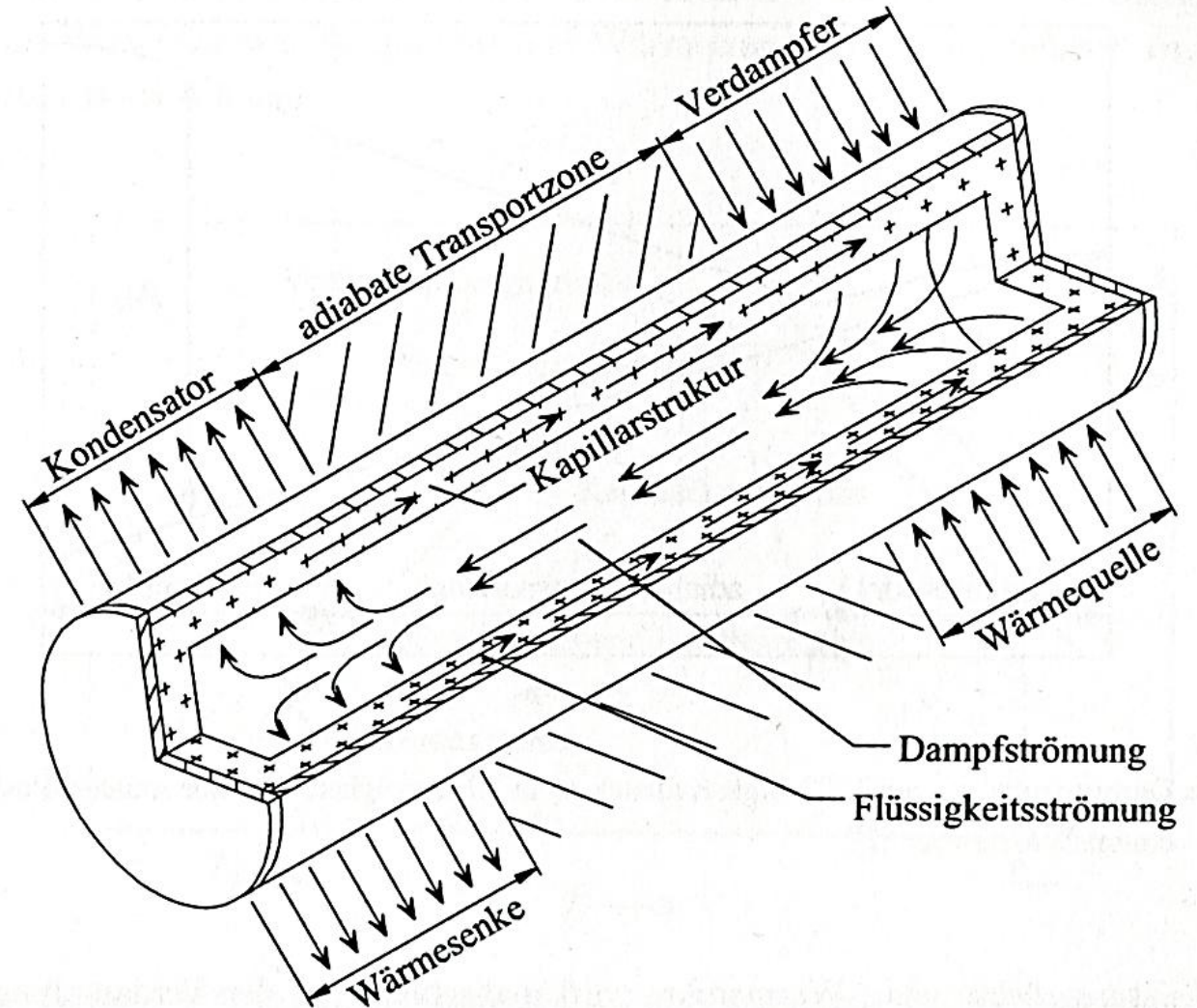
## Wärmerohre (Heat pipes)

Wärmeleitfähigkeit Kupfer

$$\lambda_{\text{Cu}} = 400 \text{ W/mK}$$

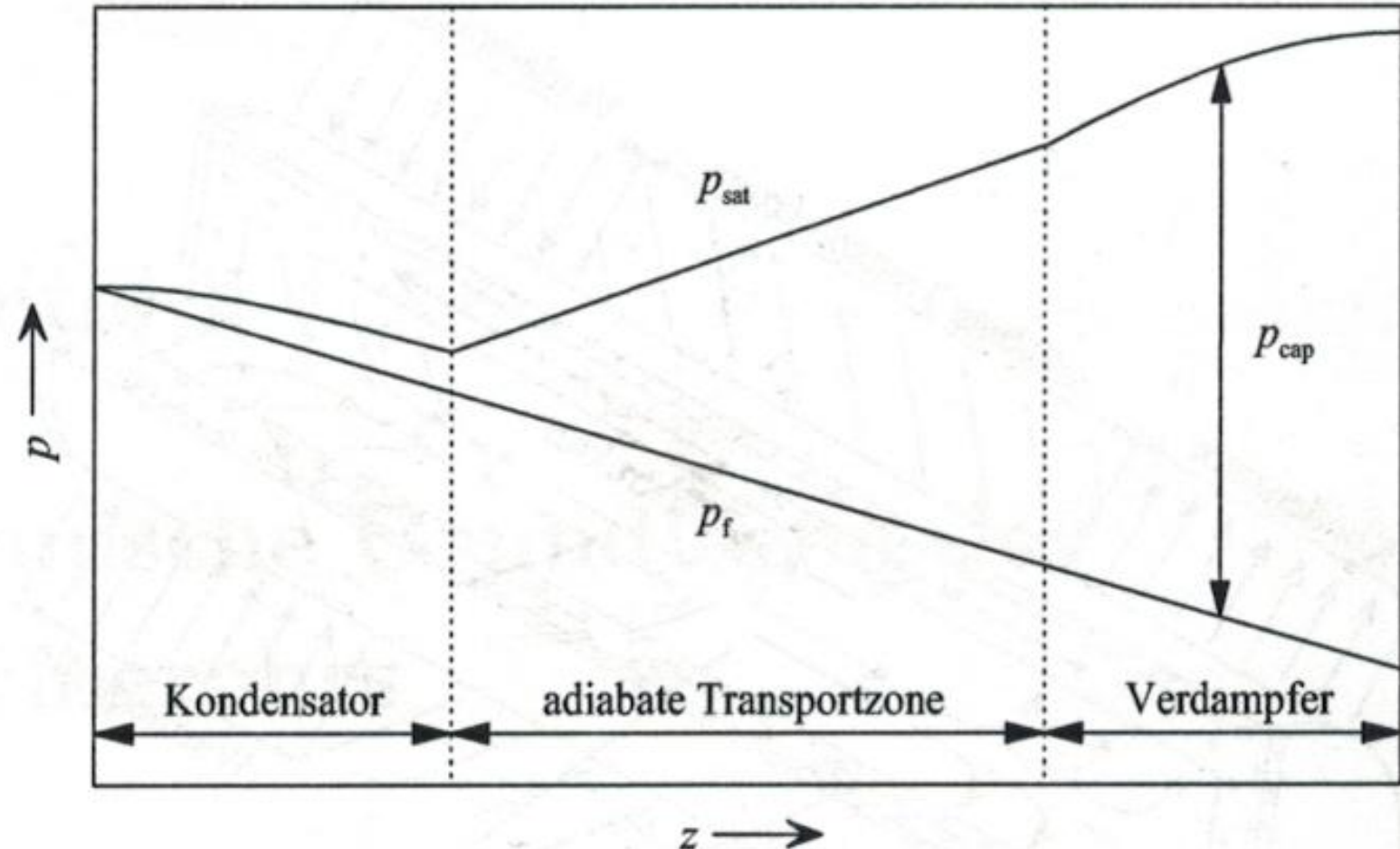
Wärmeleitfähigkeit Heat Pipe

$$\lambda_{\text{HP}} = 100.000 \text{ W/mK}$$



## Axiale Druckverläufe in einem Wärmerohr

Quelle:  
Diss. Brandt





## Kapillarstrukturen

### Optimierter Flüssigkeitstransport

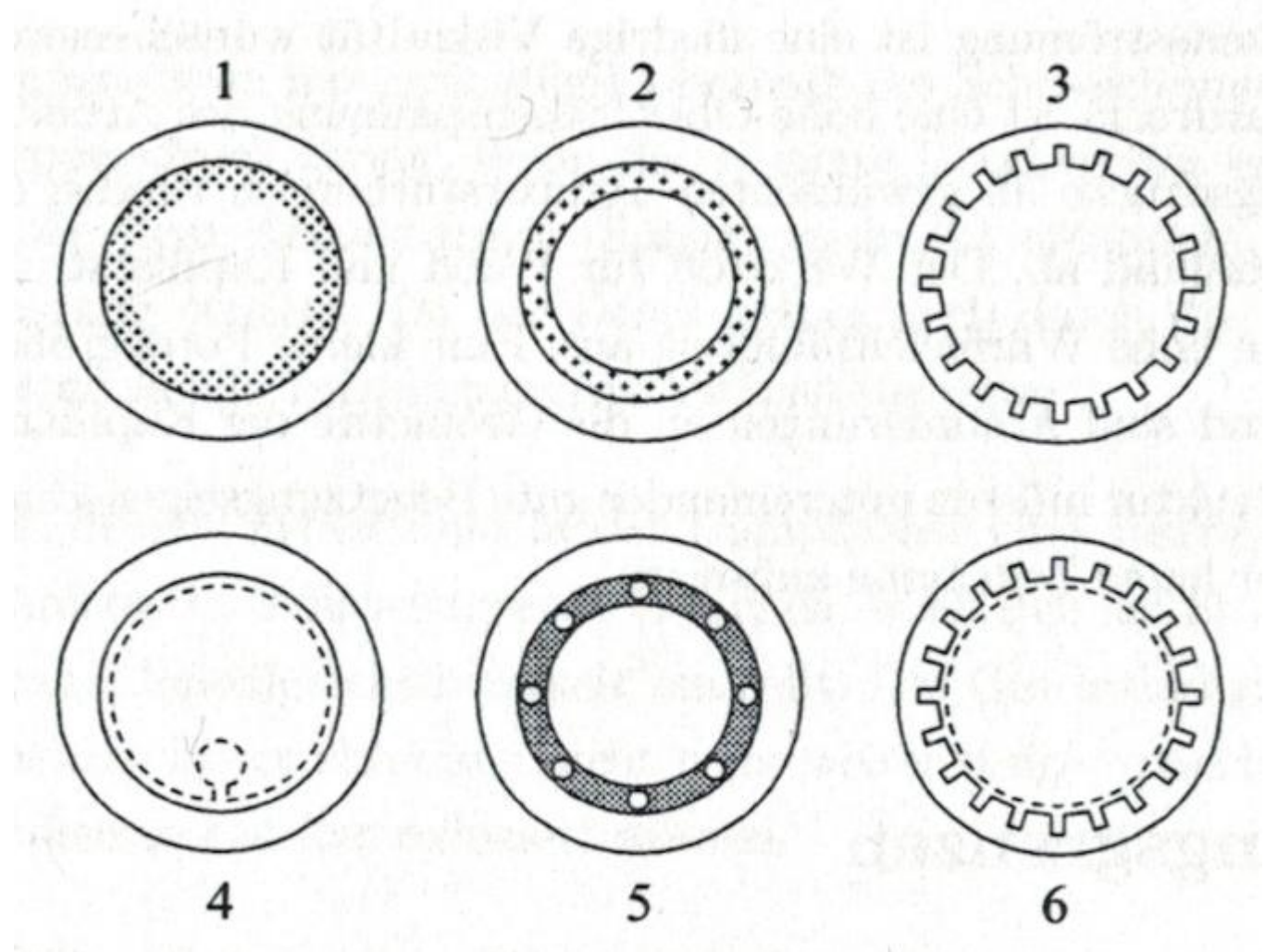
1 - Netzstruktur

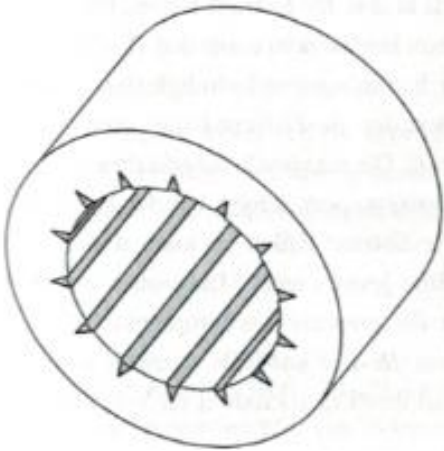
2 – Sinterstruktur

3 – offene Axialrillen

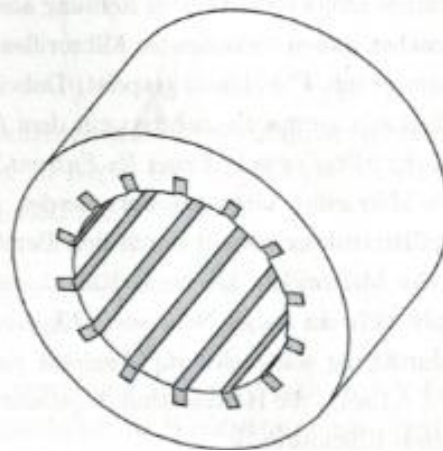
4, 5, 6 – kombinierte Strukturen

Quelle: Diss. Brandt

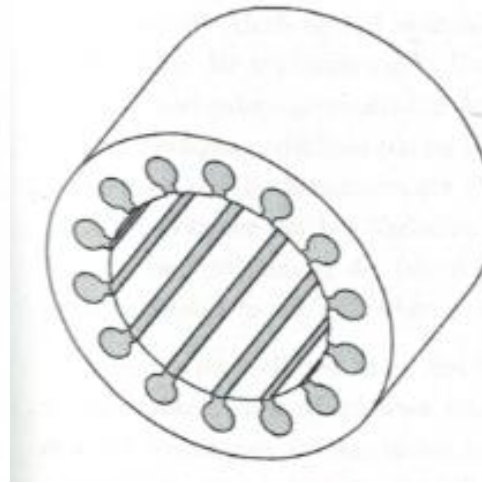




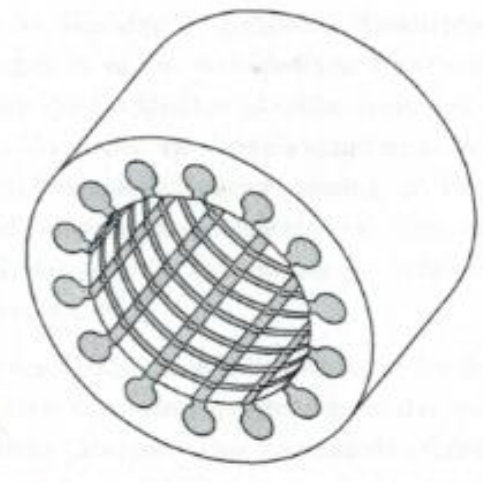
Dreieckige  
Axialrillen



rechteckige  
Axialrillen



Re-Entrant  
Axialrillen



Hochleistungs-  
kapilarstruktur



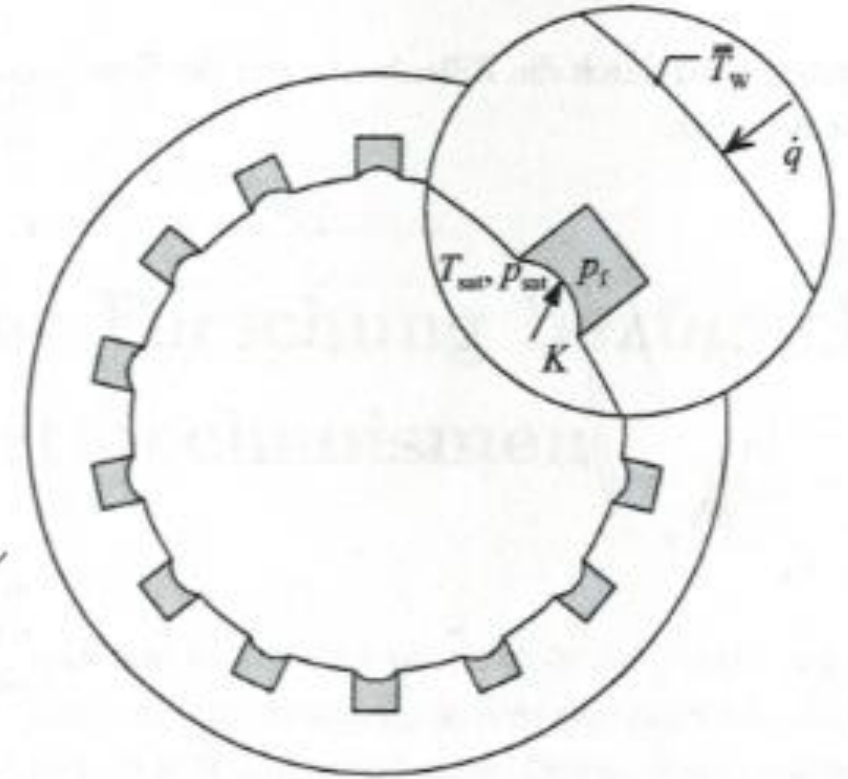
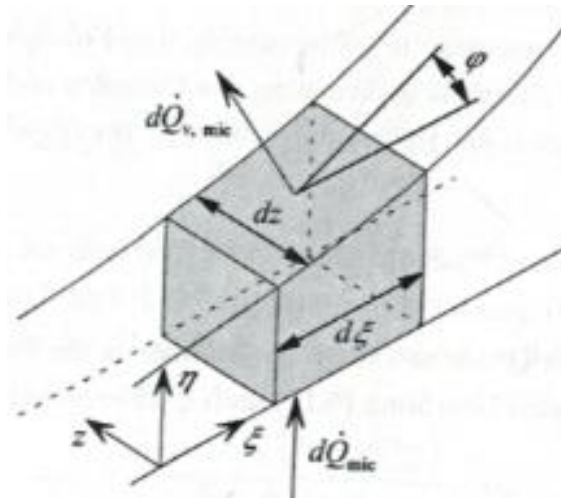
## Lokale Phänomene beim Wärmeübergang in Wärmerohren

$$k = \frac{\dot{q}}{\overline{\overline{T}}_W - T_{\text{sat}}}$$

Betrachtung eines finiten Elementes

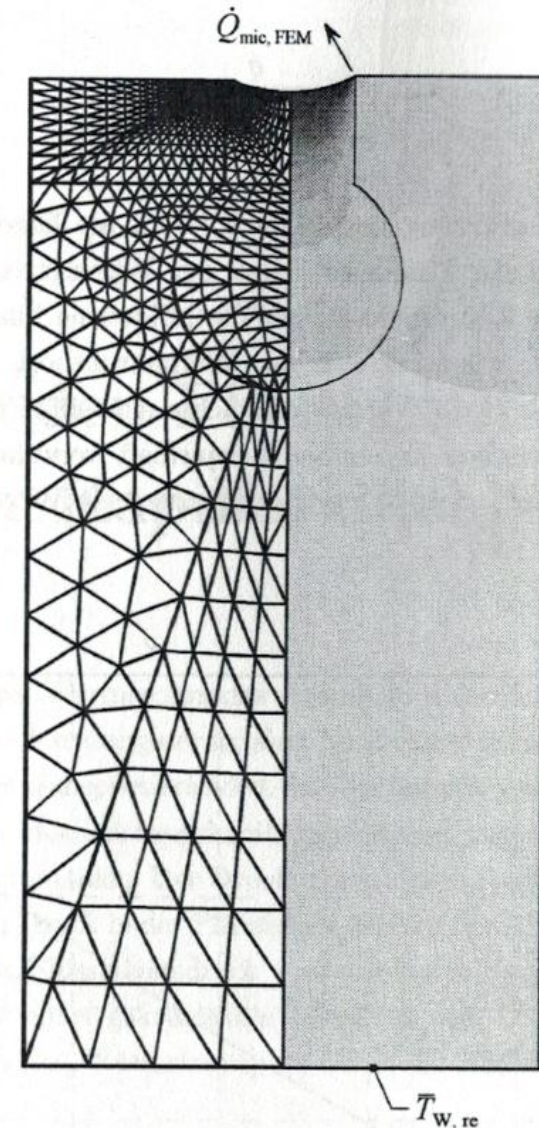
Lokale Berechnung von

- Impulsbilanz
- Energiebilanz
- Stoffbilanz



## Numerische Simulation

- Sehr hohe Auflösung im Bereich der „Mikrozone“
- Finite Elemente  $< 0,1 \mu\text{m}$
- Mäßige Auflösung im Bereich der Makrozone
- Finite Elemente  $< 1 \text{ mm}$



## Ergebnis der Simulation

Extrem hoher Peak der Wärmestromdichte im Bereich der Mikrozone (3-Phasen-Kontaktlinie)  
Räumliche Ausdehnung ca.  $1 \mu\text{m}$  !

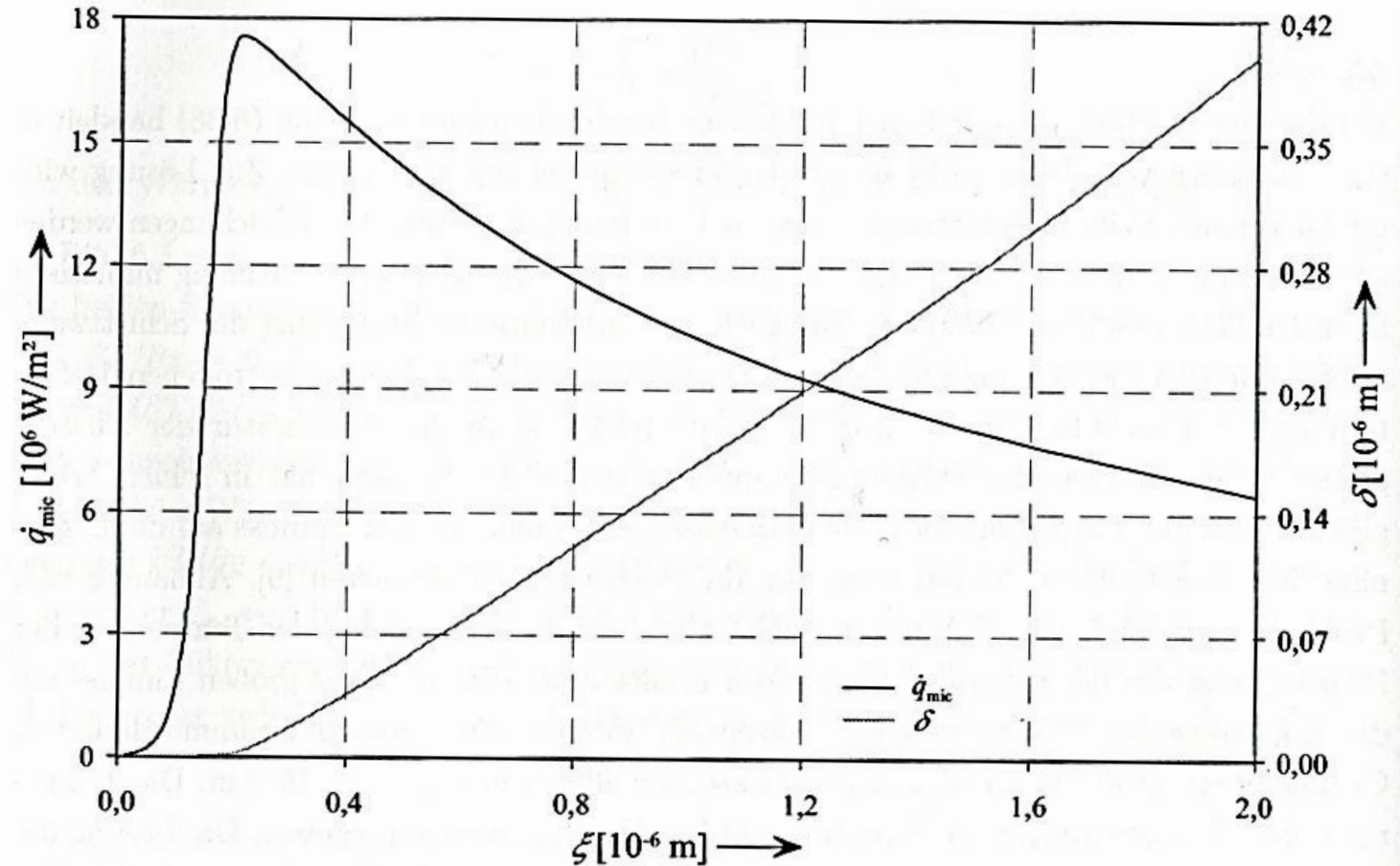
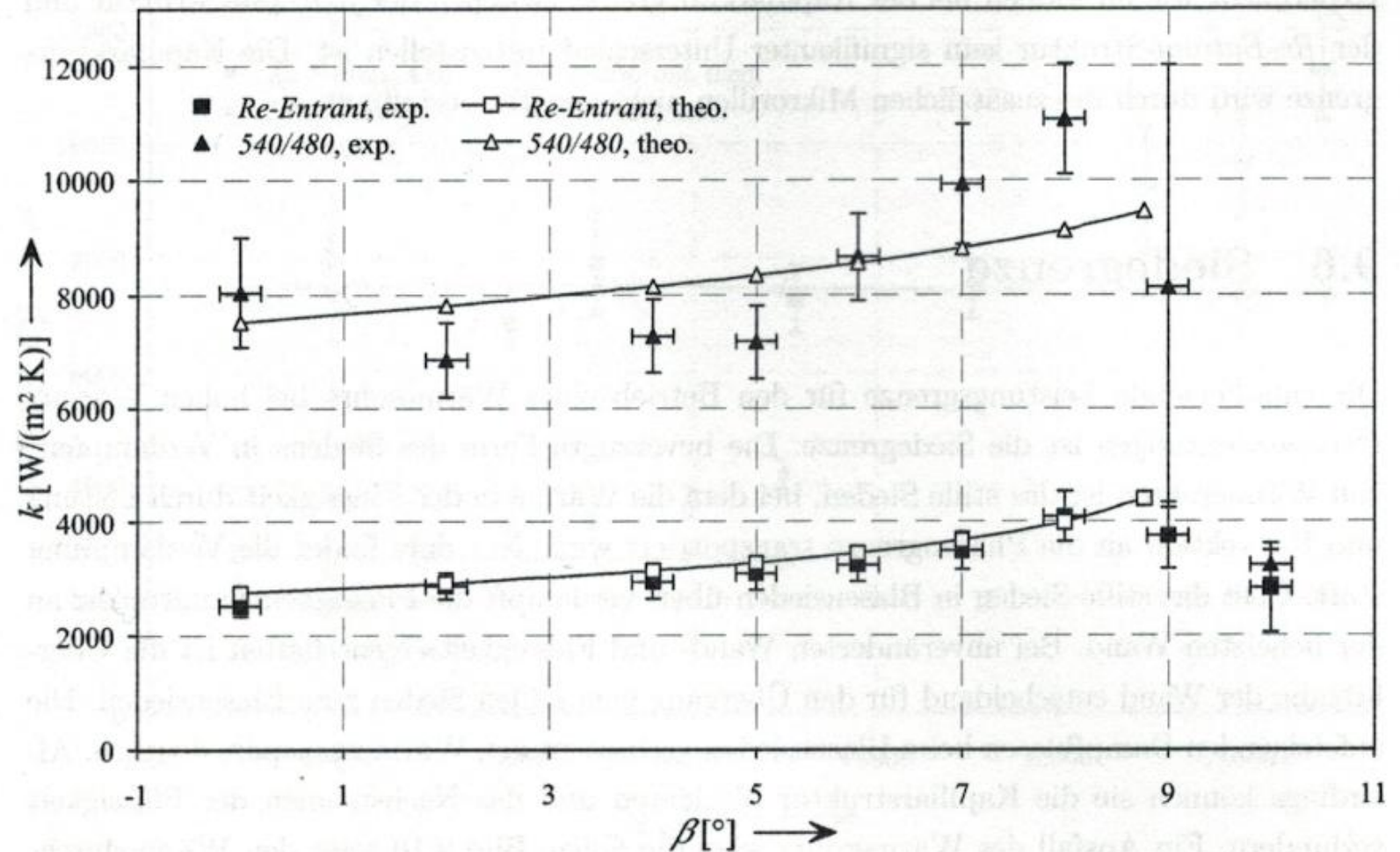


Bild 6.6: Filmdicke  $\delta$  und Wärmestromdichte  $\dot{q}_{\text{mic}}$  in Abhängigkeit von der Koordinate  $\xi$   
( $T_{\text{sat}} = 70^\circ\text{C}$ ,  $\dot{q} = 26000 \text{ W/m}^2$ ,  $\beta = 8^\circ$ ,  $z = L_a$ )

## Wärmeübergang in Wärmerohren mit unterschiedlichen Strukturen

In Abhängigkeit des  
Neigungswinkels  $\beta$

Quelle: Diss. Brandt





## Wärmeübergang in Wärmerohren mit unterschiedlichen Strukturen

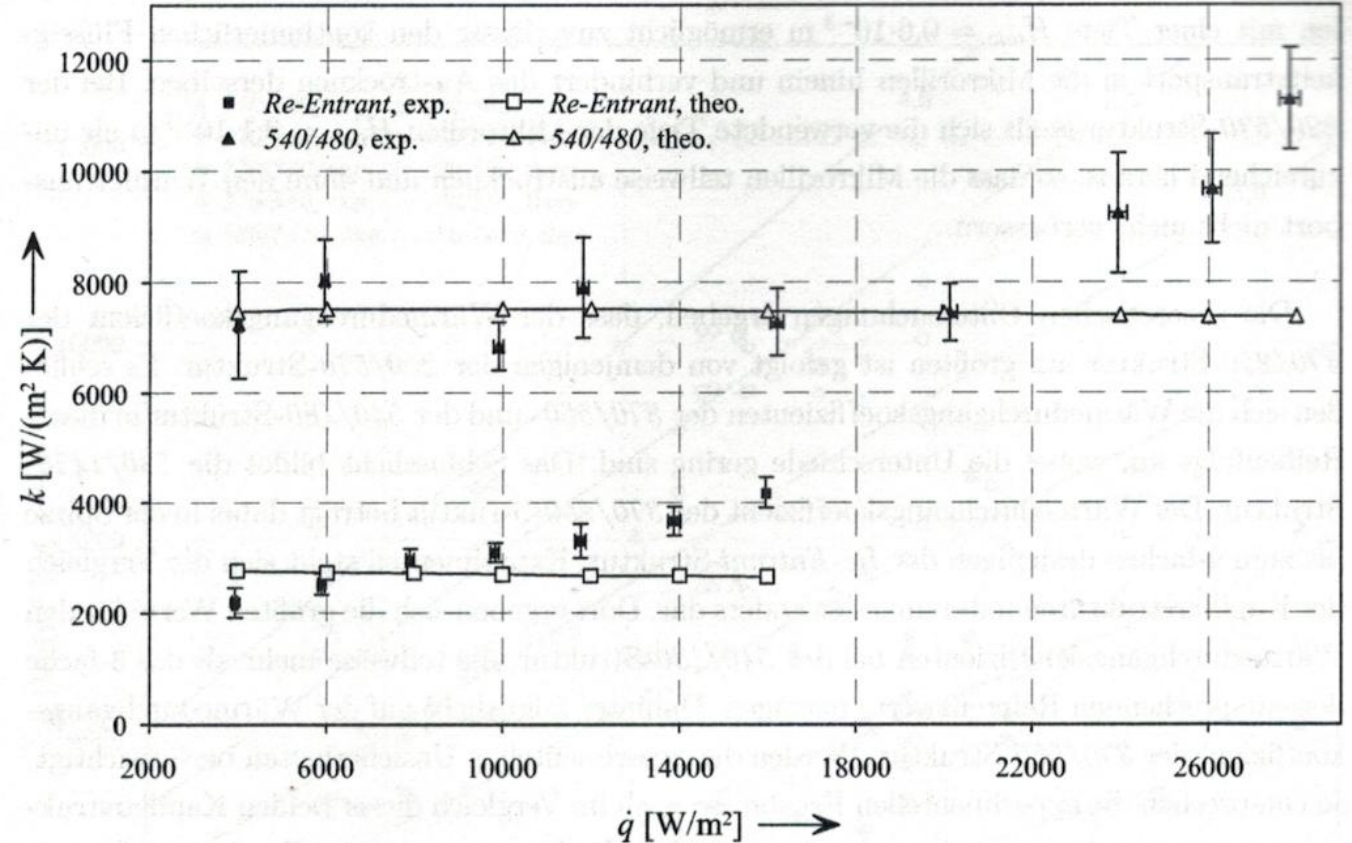
In Abhängigkeit der  
Wärmestromdichte

Ergebnis:

Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha = 8000 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Quelle: Diss. Brandt



## Auslegung von Wärmerohren – Maßgeblich ist der Temperaturbereich

Arbeitstemperatur (°C)	Arbeitsmedium	Hüllmaterial
- 200 bis -80	Flüssiger Stickstoff	Edelstahl
- 70 bis 60	Ammoniak	Aluminium, Edelstahl
- 45 bis 120	Methanol	Kupfer, Edelstahl
5 bis 300	Wasser	Kupfer
190 bis 550	Quecksilber	Edelstahl
400 bis 800	Kalium	Edelstahl
500 bis 900	Natrium	Edelstahl

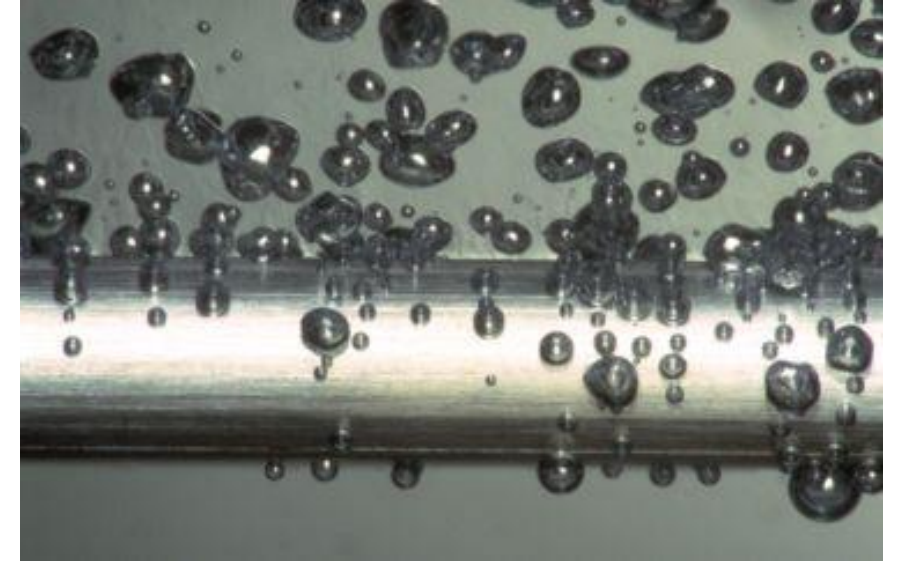
## Thermodynamik-Forschung:

# Experimentelle Untersuchung des Wärmeübergangs an der 3-Phasen-Kontaktlinie

## Warum Siede-Forschung ?

### Hintergrund:

Sehr hohe Wärmestromdichten an Brennstäben von Kernreaktoren

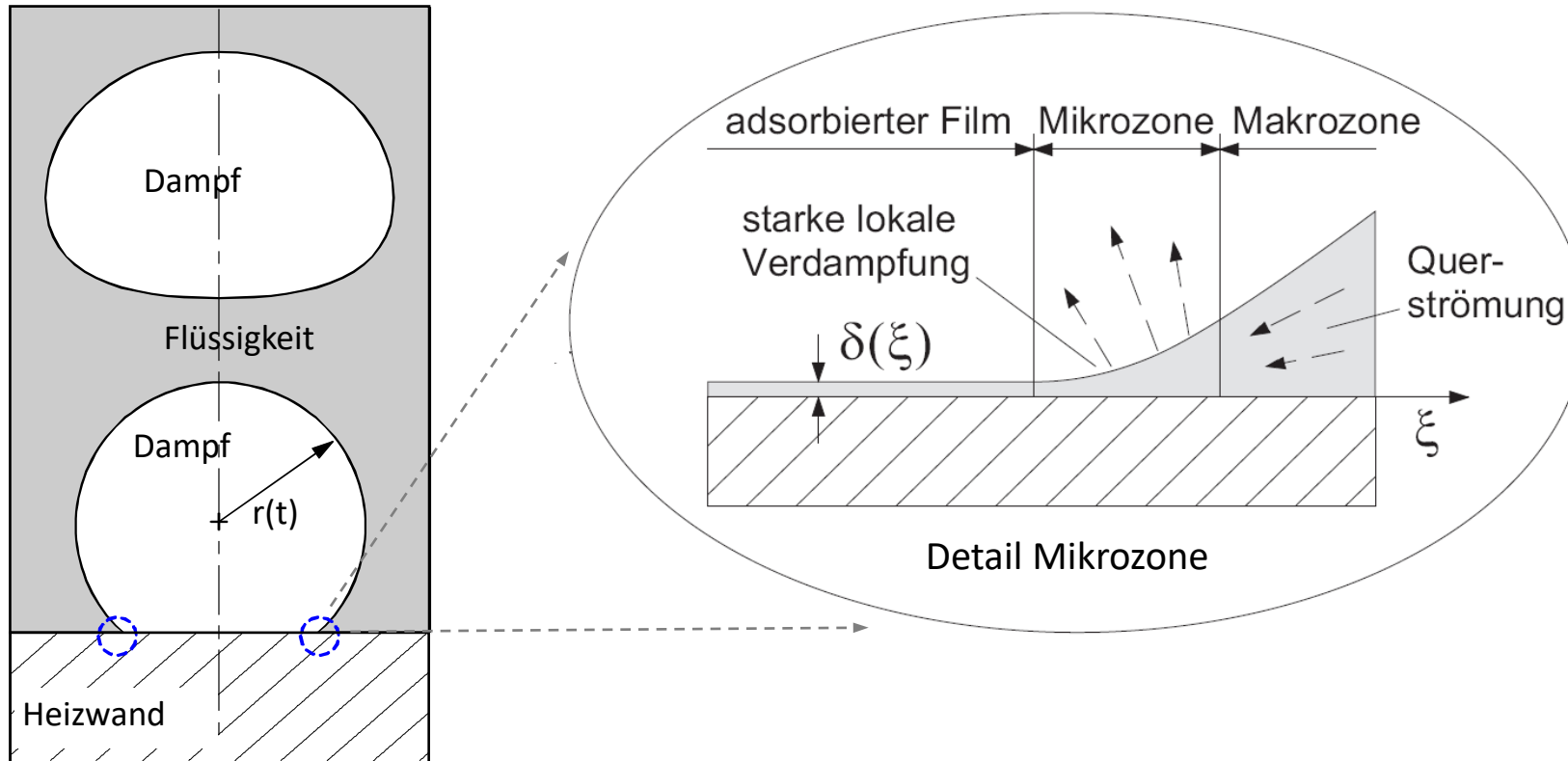


### Probleme beim Blasensieden:

- Durch die Bildung großer Wasser-Dampfblasen entstehen Hot-Spots in denen praktisch keine Wärme abgeführt werden kann => Gefahr durchbrennender Brennstäbe
- Nur aufwendige empirische Modelle zur Berechnung des Wärmeübergangs verfügbar
- Gültigkeit der Modelle nur für bestimmte Fluide, Heizwände
- Physikalische Mechanismen sehr komplex und nicht hinreichend verstanden



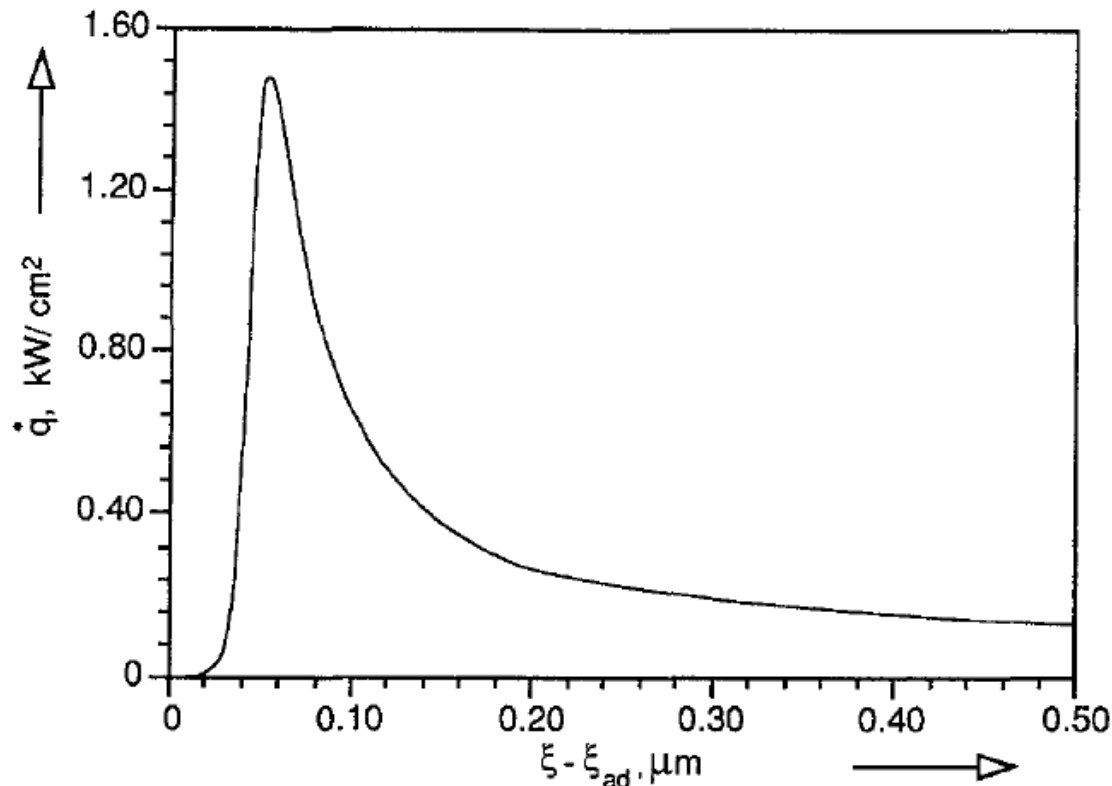
# Modellbildung: Theorie der Mikrozonen



- Einzelne Dampfblase wächst an definierter Keimstelle auf Heizwand an und steigt in Siedeflüssigkeit auf
- Adsorbierter Film (wenige Moleküllagen) ist adiabate Zone
- Starke lokale Verdampfung im Bereich der 3-Phasen-Kontaktlinie → „Mikrozone“

Ansatz von Stephan, P. und Hammer, J.: A new model for nucleate boiling heat transfer. Springer Wärme- und Stoffübertragung, 30: 119-125 (1994)

## Wärmestromdichte in der „Mikrozone“ – im Bereich der 3-Phasen-Kontaktlinie

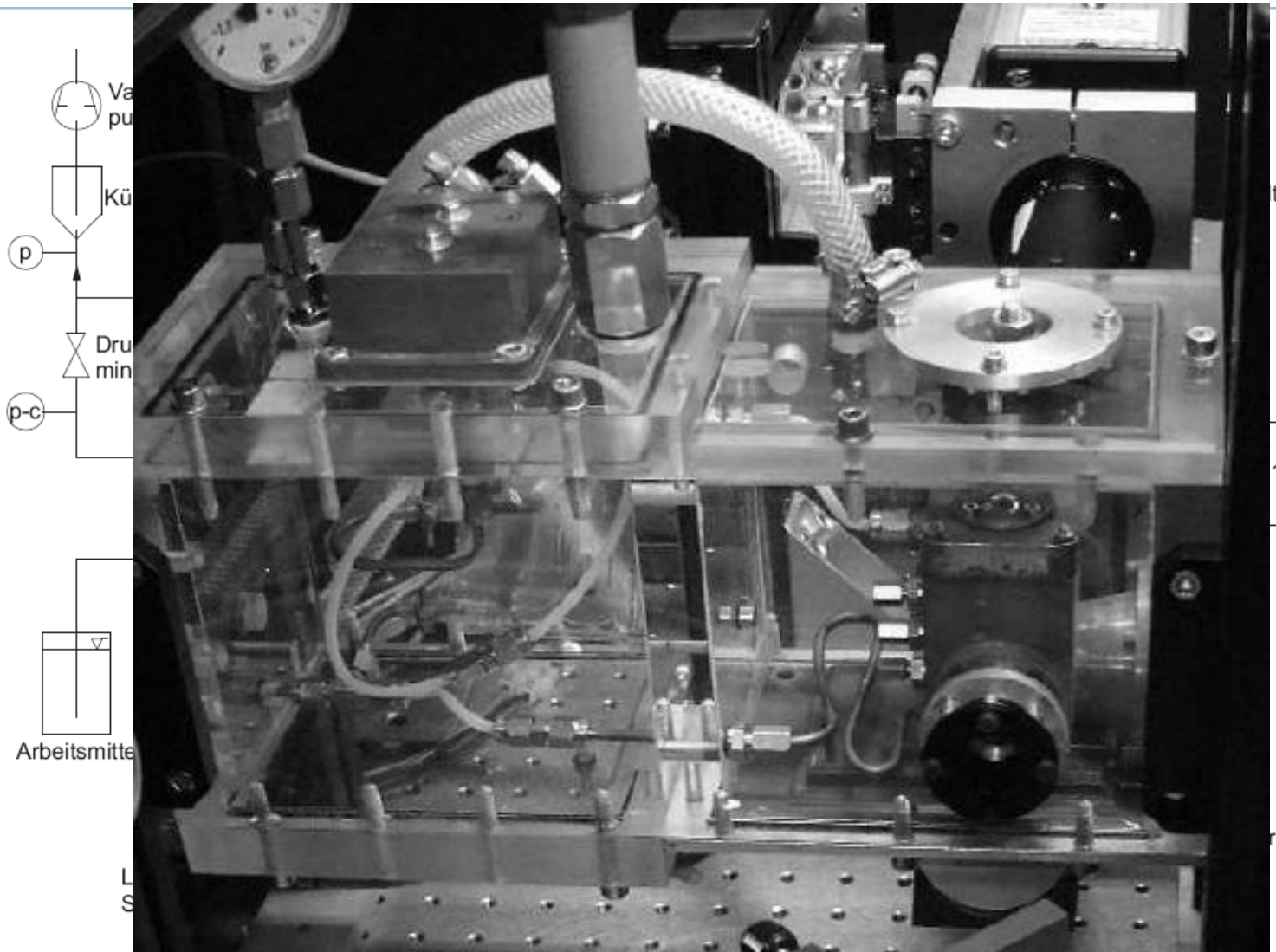


- Theoretisch/numerische Modelle
- Implementierung der Mikrozone in Blasensiedemodell (Stephan, Hammer 1994)  $\rightarrow q_{mic} = 15 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$

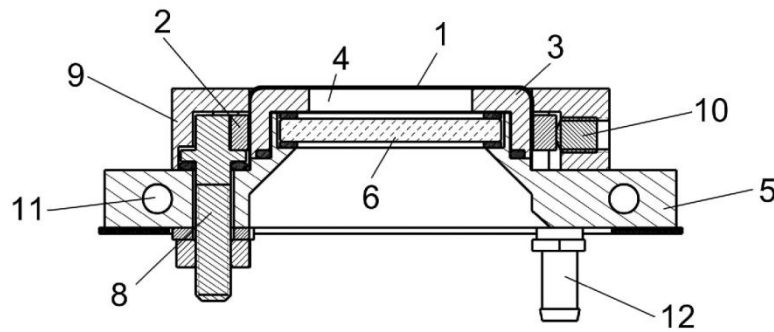
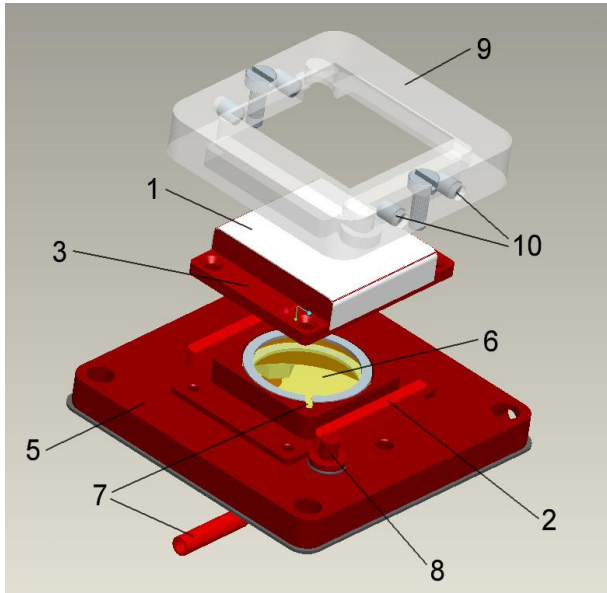
### Herausforderung:

Messtechnische Validierung, sehr hoher Wärmeströme auf extrem kleinen Abmessungen bei sehr großer Dynamik

# Konstruktion einer Siedeapparatur



- Erzeugung von Einzelblasen in einer kleinen metallischen Siedezelle
- Optische Zugänge von 3 Seiten und von unten
- Vollständige Temperierung im Wasserbad
- unabhängige Druckeinstellung
- Mikroskop-High-Speed Kamera für die Blasenkontur
- Mikroskop-High-Speed IR Kamera für die Aufnahme der Heizwand-Rückseite



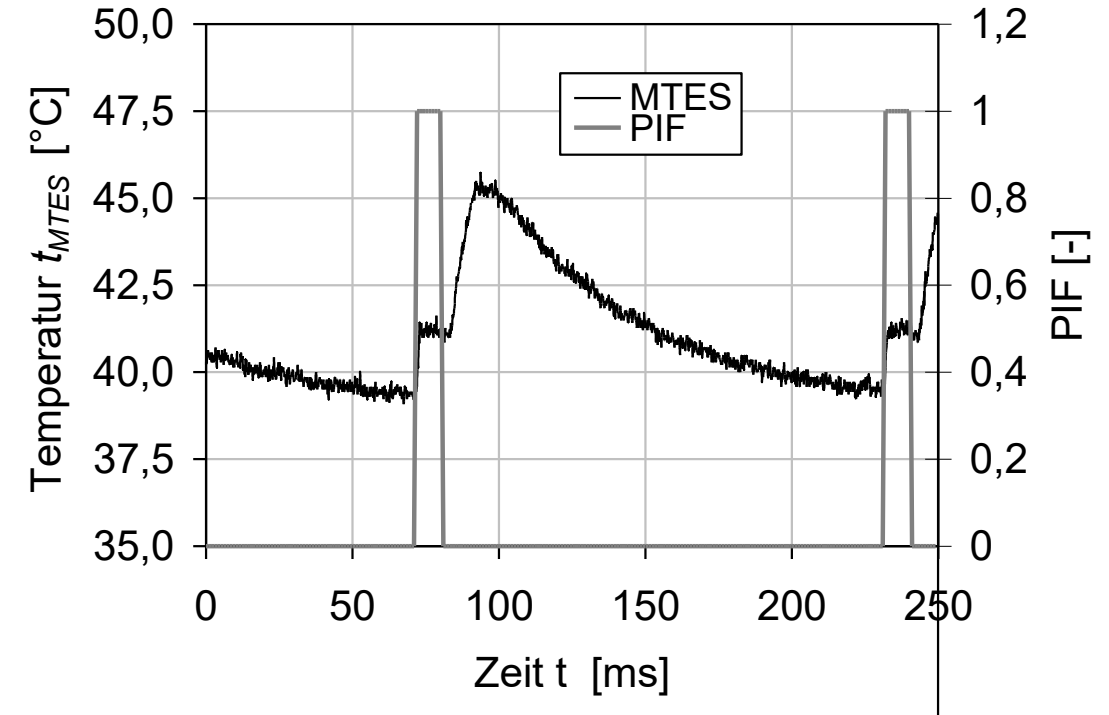
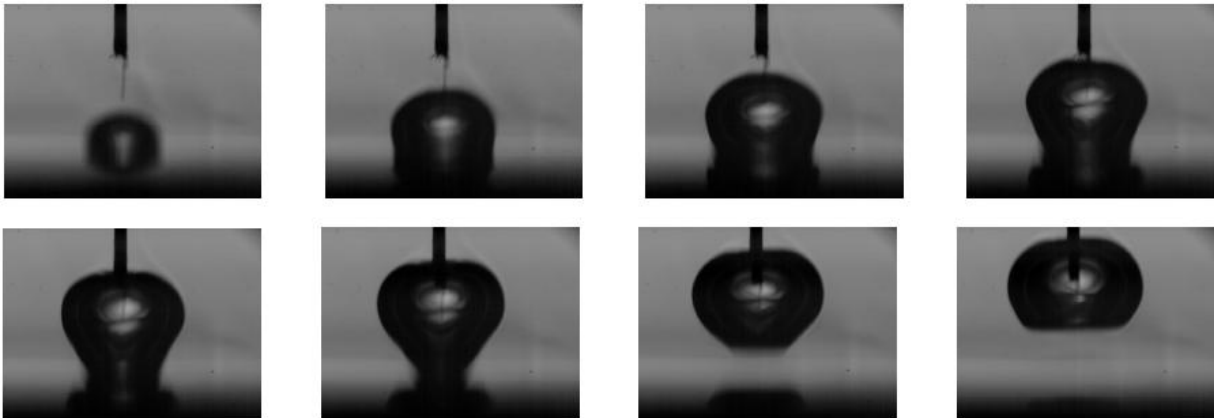
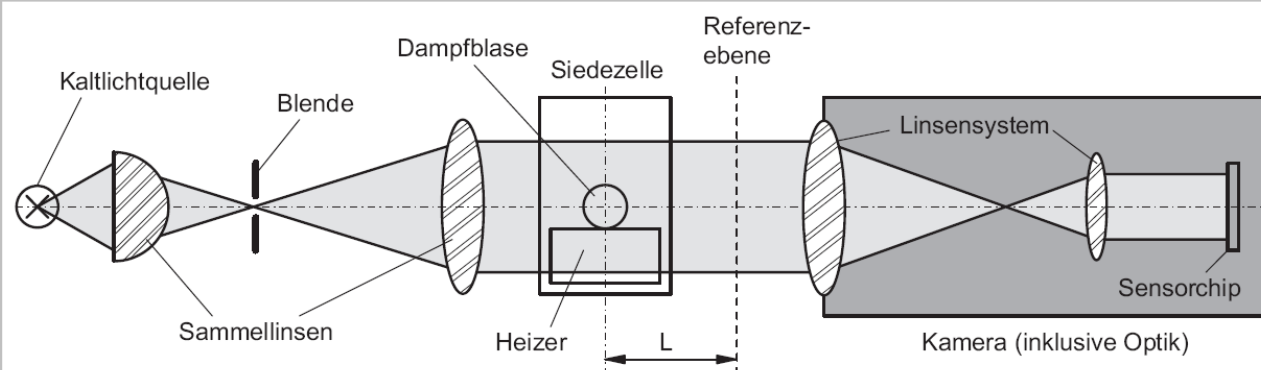
- 10-50  $\mu\text{m}$  dicke Edelstahlfolie (1) auf Kupfersockel (3) fixiert
- Eine mittige künstliche Keimstelle (FIB,  $\varnothing = 20 \mu\text{m}$ )
- Kontaktierung mit gekühlten Elektroden (2) zur elektrischen Widerstands-Beheizung
- Optischer Zugang von Unten durch IR transparentes Substrat (6)
- Druckausgleichsbohrung (7)
- Kühlmittelbohrungen (11) in Grundplatte (5) zur Unterdrückung von Blasensieden

## Sonstige Daten:

- Arbeitsmittel: HFE-7100, FC-84, FC-3284
- Druckbereich: 300 - 950 mbar
- Temperaturbereich: 30 - 80  $^{\circ}\text{C}$

# Darstellung Blasengeometrie

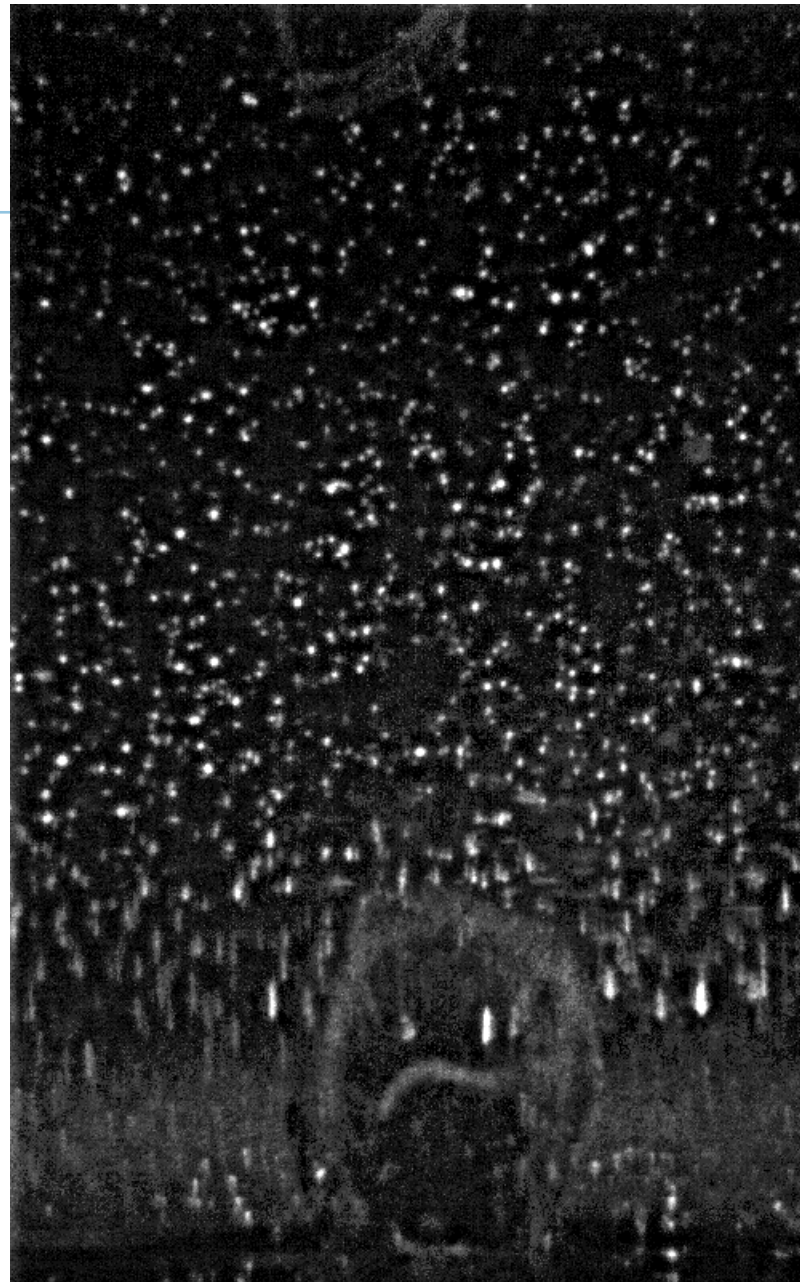
## Schattentechnik

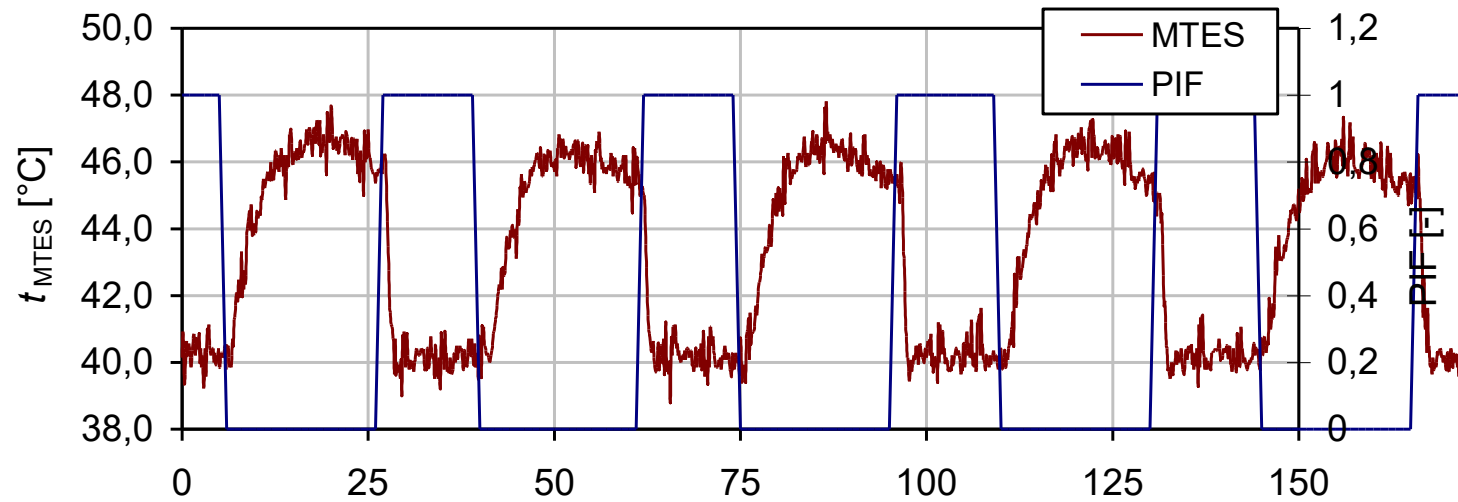


$$PIF = \begin{cases} 1 & : \text{Dampf} \\ 0 & : \text{Flüssigkeit} \end{cases}$$

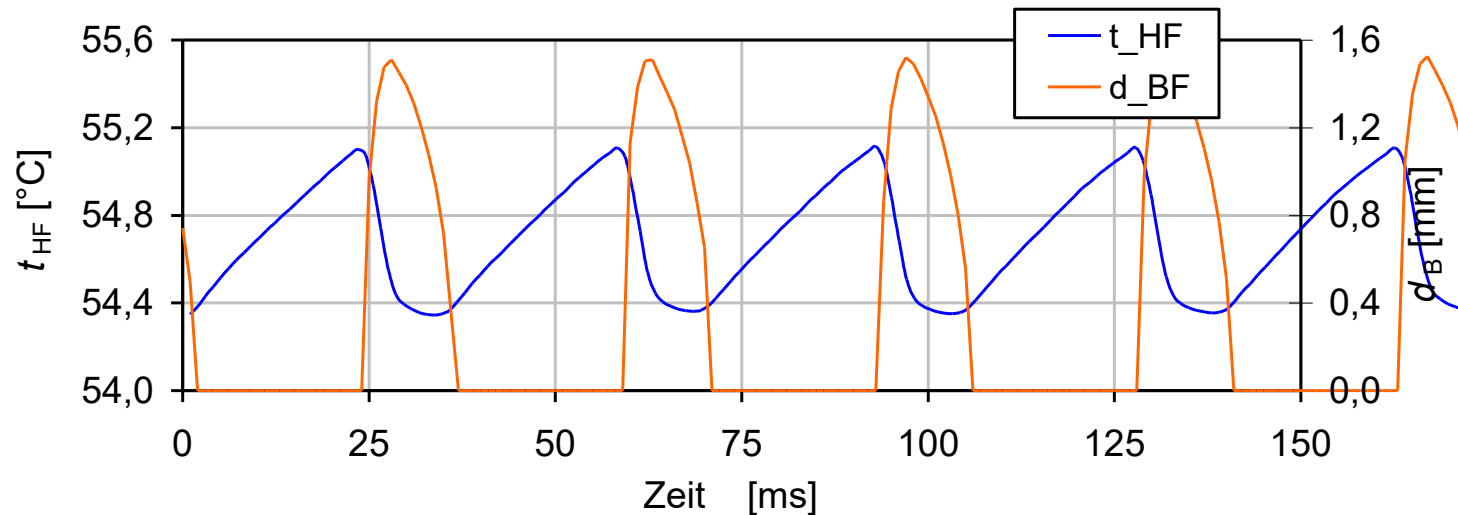


## Micro PIV





Verhalten in  
der Flüssigkeit



Verhalten an  
der Heizwand

Bedingungen:

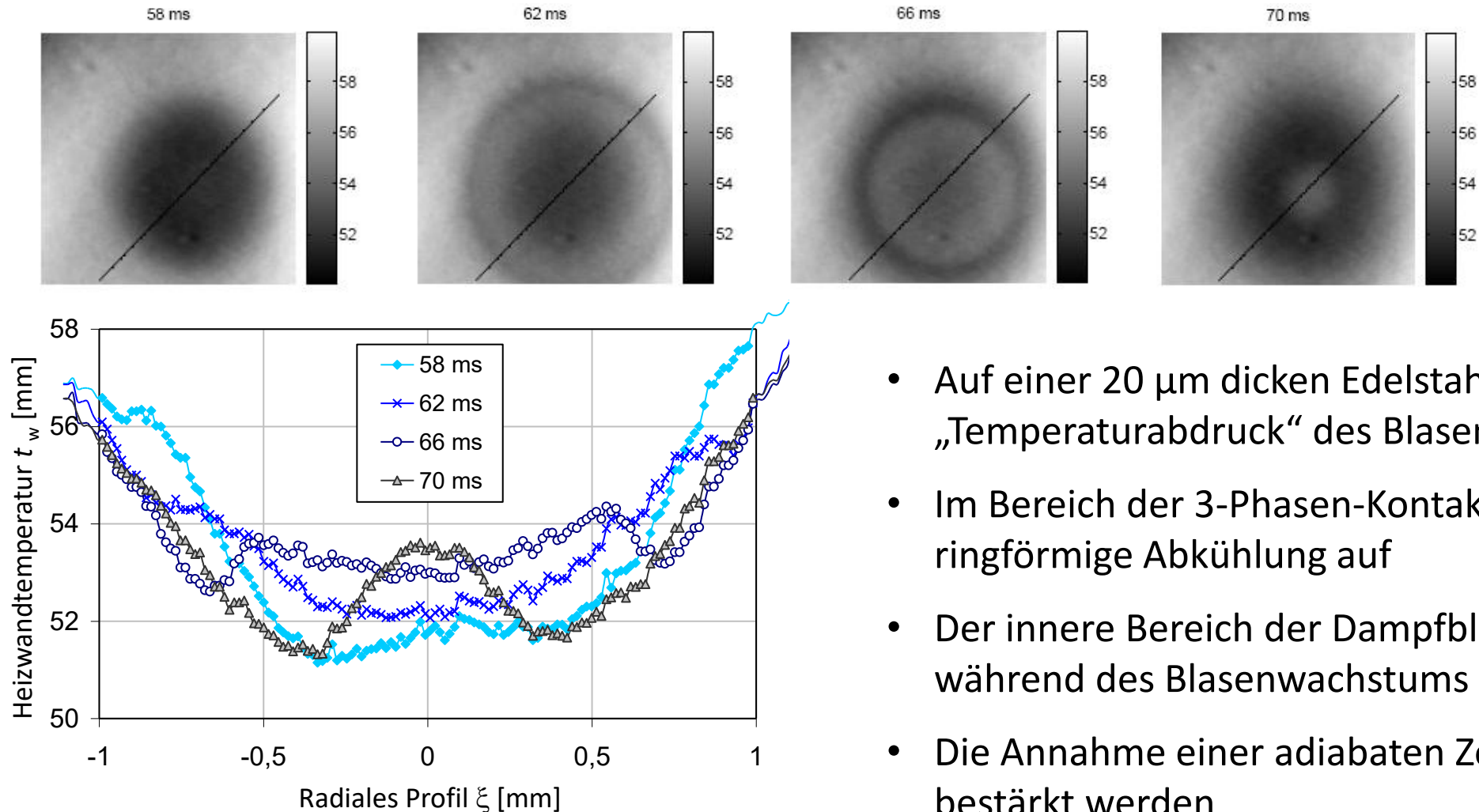
Fluid: HFE-7100

$\dot{q}_{el} = 0,7 \text{ W/cm}^2$

$p_{sys} = 500 \text{ mbar}$

$t_{sat} = 40^\circ\text{C}$

# Temperaturabdruck mittels IR Bildern



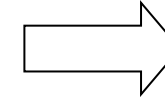
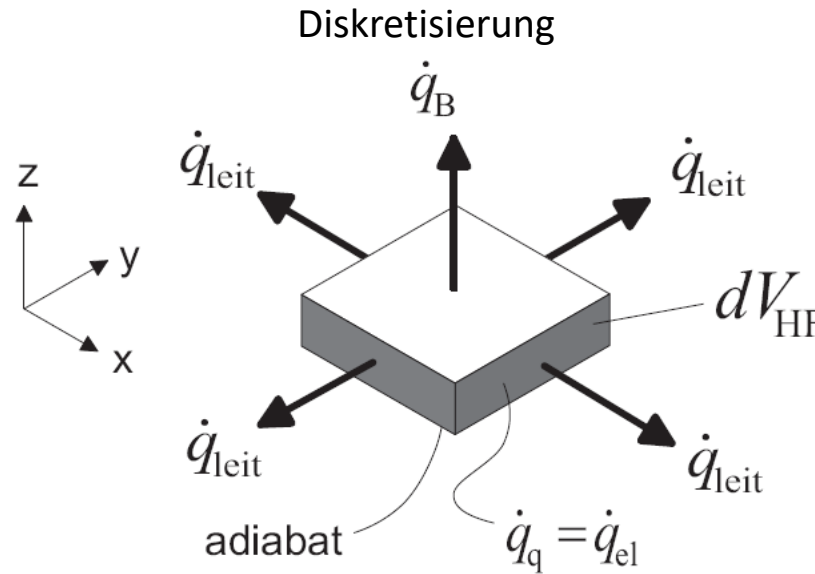
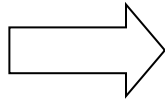
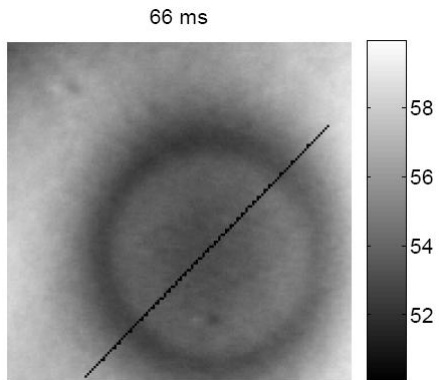
- Auf einer 20  $\mu\text{m}$  dicken Edelstahlfolie ist der „Temperaturabdruck“ des Blasenfußes gut erkennbar
- Im Bereich der 3-Phasen-Kontaktlinie tritt eine ringförmige Abkühlung auf
- Der innere Bereich der Dampfblase heizt sich während des Blasenwachstums auf
- Die Annahme einer adiabaten Zone kann folglich bestärkt werden



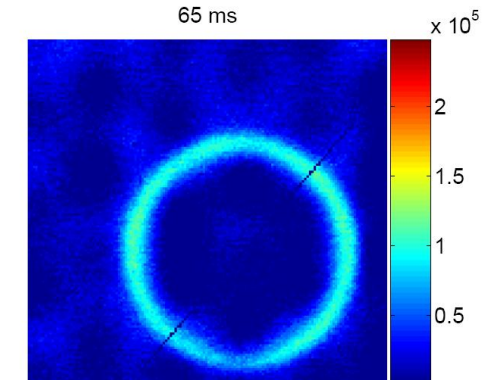
# Berechnung der lokalen Wärmestromdichte

## IR Analyse der Heizwand

### Temperaturbilder



### Wärmestromdichtebilder

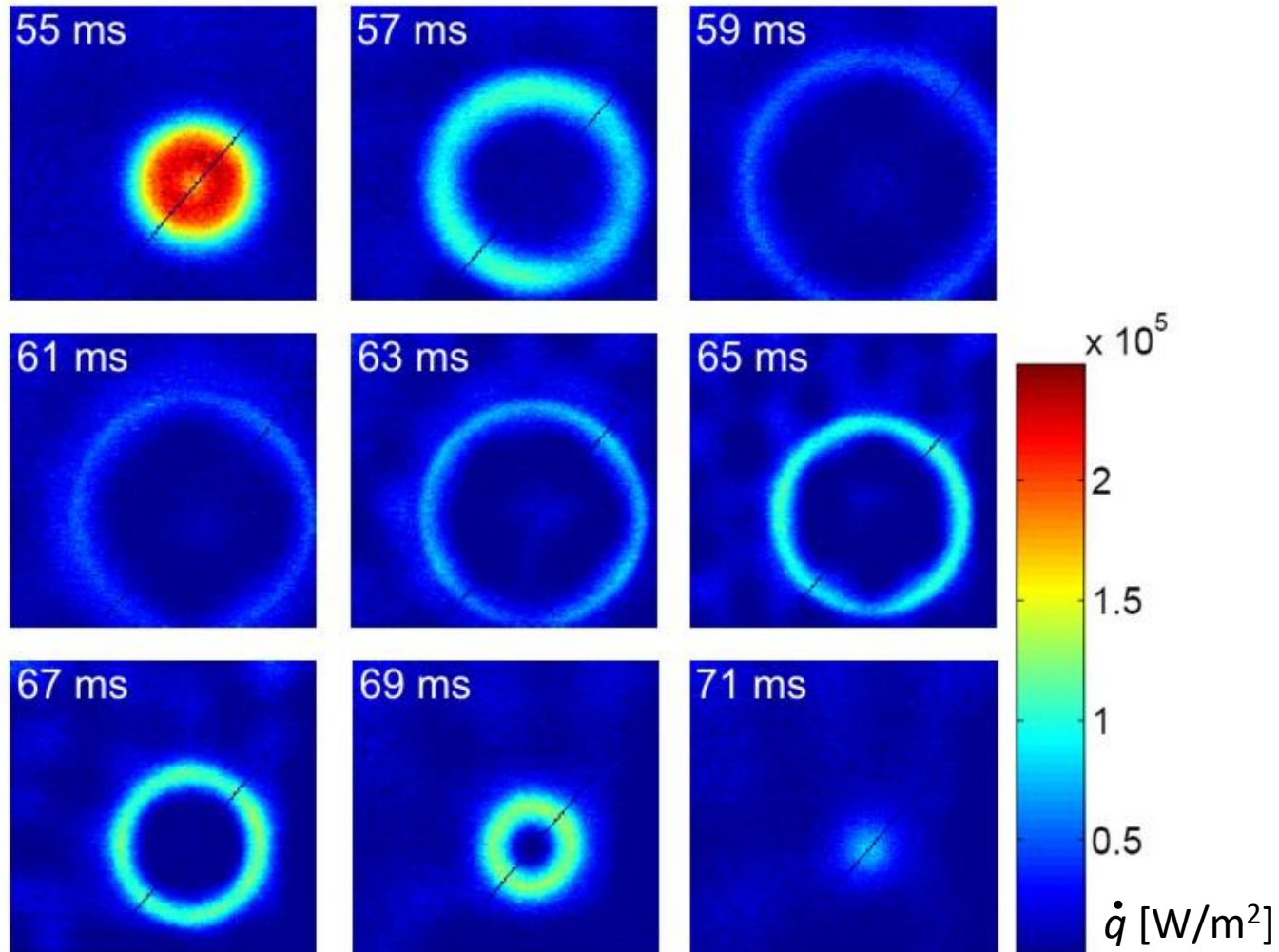


$$\underbrace{\delta_{\text{HF}} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau}}_{\dot{q}_{\text{sp}}} = \underbrace{\lambda \delta_{\text{HF}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)}_{-\dot{q}_{\text{leit}}} + \dot{q}_{\text{el}} - \dot{q}_{\text{B}}.$$

## Zerlegung der Heizwand in Finite Elemente

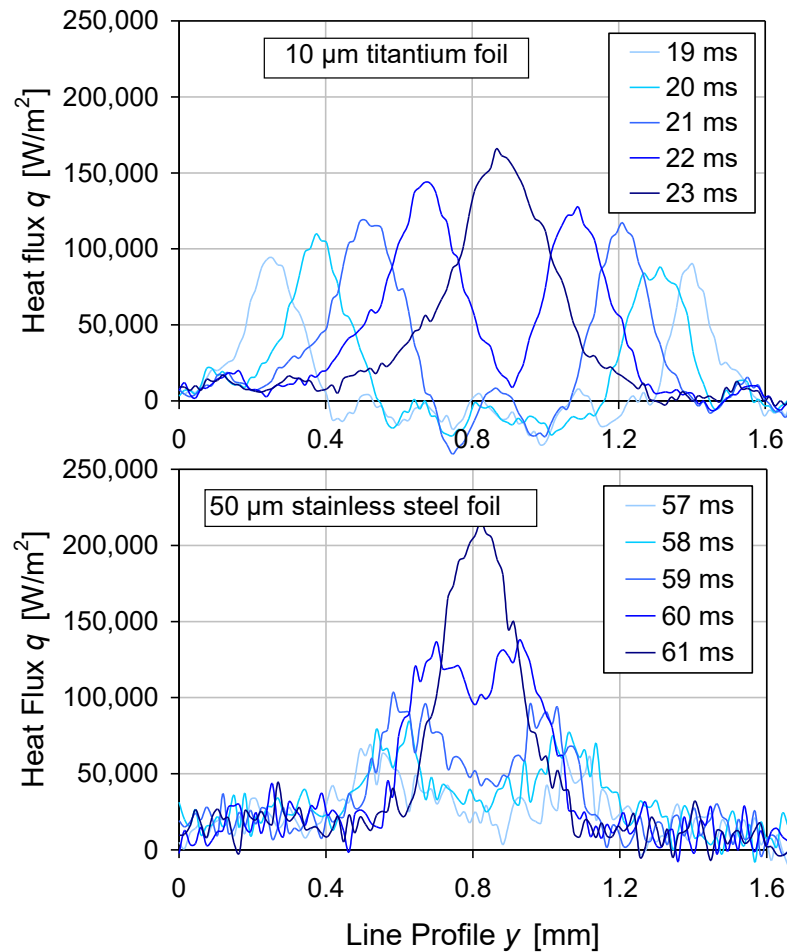
$$\underbrace{\delta_{\text{HF}} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau}}_{\dot{q}_{\text{sp}}} = \underbrace{\lambda \delta_{\text{HF}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)}_{-\dot{q}_{\text{leit}}} + \dot{q}_{\text{el}} - \dot{q}_{\text{B}}.$$

# Darstellung der lokalen Wärmestromdichte

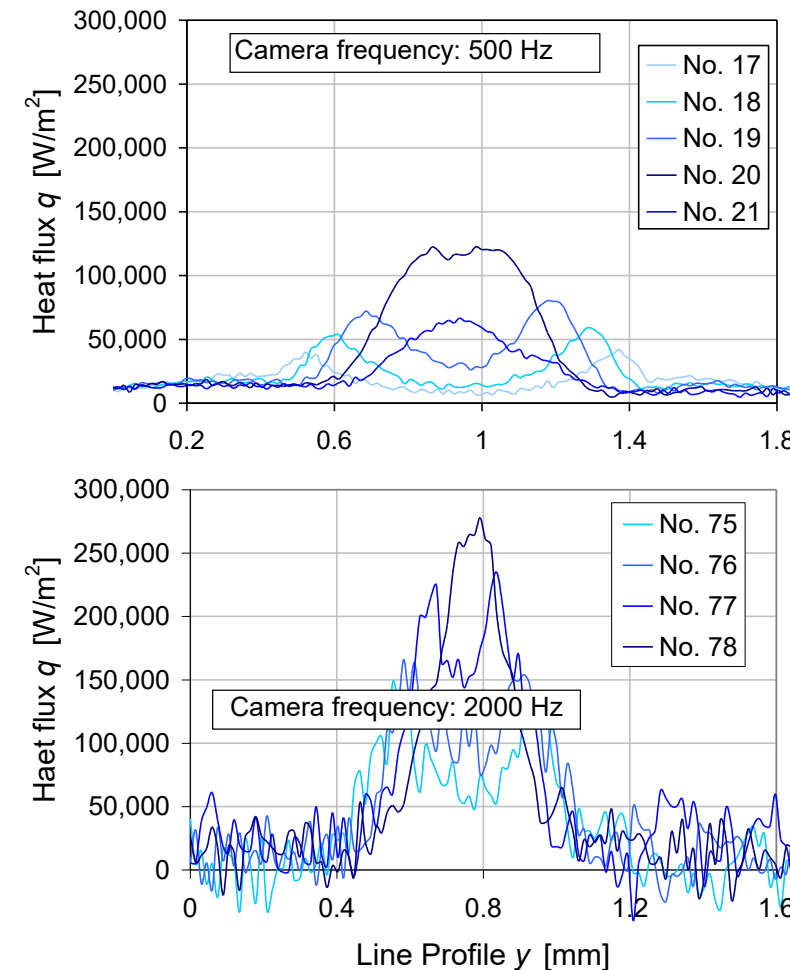


- Ringförmiger Bereich hoher Wärmestromdichte im Bereich der 3-Phasen-Kontaktlinie
- Höchste Wärmestromdichte bei Beginn des Blasenwachstums
- Geringe Wärmestromdichte am Umschlagpunkt
- Innerer Bereich der Dampfblase praktisch adiabat
- **Wie hoch ist der maximale Mikrozonen-Wärmestrom?**

## Variation der Foliendicke



## Variation der Aufnahmefrequenz



- **Unschärferelation der Peak-Wärmeströme**

- Verringerung der Heizfolien-Dicke (50, 20, 10  $\mu\text{m}$ )  
=> Wärmestrom vs. Unschärfe
- Erhöhung der Aufnahmefrequenz (500, 1000, 2000 Hz)  
=> Wärmestrom vs. Rauschen
- Verlangsamung der Blasenfrequenz (Parabelflug)  
=> Wärmestrom vs. Geschwindigkeit



Ergebnis:

**Numerische Berechnung**

$$\dot{q}_{mic,m} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$$



**Messung / Experiment**

$$\dot{q}_{mic,max} = 2,7 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

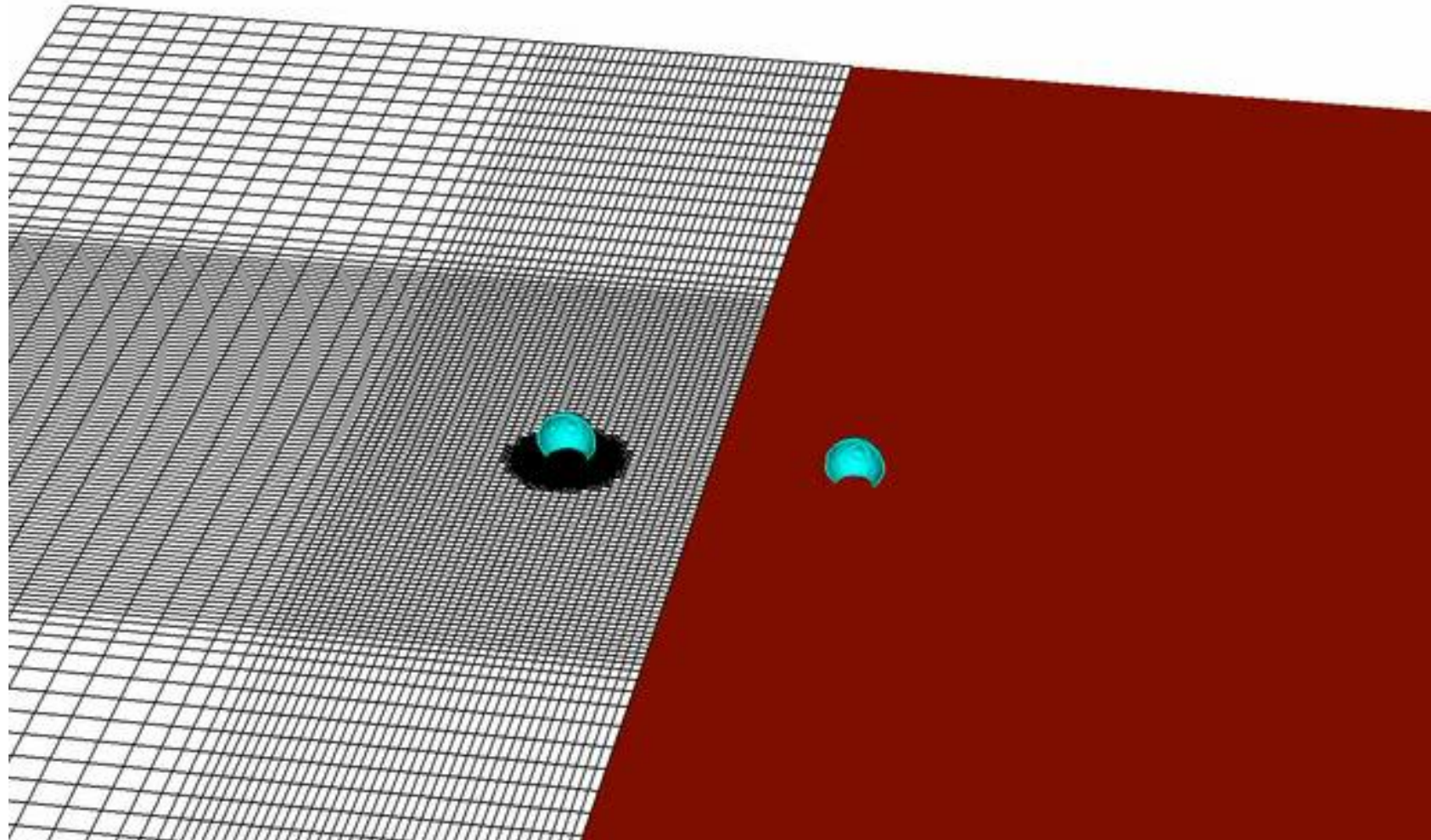
## Zusammenfassung

- Numerische Modelle zeigen sehr hohe Wärmestromdichten in einem schmalen Bereich an der 3-Phasen-Kontaktlinie („Mikrozone“)
- Mit einer komplexen Siedeapparatur und mittels örtlich und zeitlich hochauflösender Messtechniken konnte der Effekt auch experimentell sichtbar gemacht werden
- Numerische und experimentelle Ergebnisse konnten erfolgreich validiert werden – die Wärmestromdichten sind in einer vergleichbaren Größenordnung

## Frage

- Wie kann dieses Erkenntnis auf ein technisches Verfahren wie Kühlung von Leistungselektronik angewandt werden ?





Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !

## **Hinweis**

Diese Folien sind ausschließlich für den internen Gebrauch im Rahmen der Lehrveranstaltung an der Frankfurt University of Applied Sciences bestimmt. Sie sind nur zugänglich mit Hilfe eines Passwortes, dass in der Vorlesung bekannt gegeben wird.