

Studiengang Mechatronik

Modul 16:

# FEM – Finite Elemente Methode

- 7. Vorlesung -

Prof. Dr. Enno Wagner

12. Dezember 2024

## Übersicht

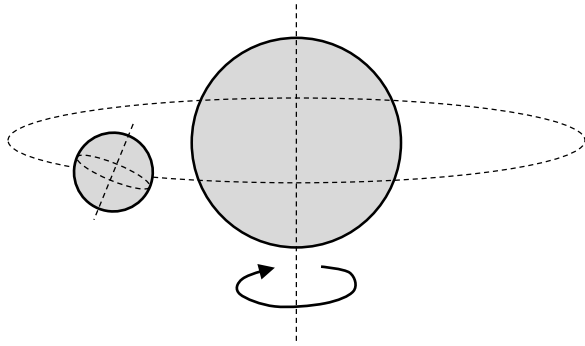
- Einführung Thermodynamik
- Wärmeleitung und Wärmeübertragung
- Forschungsthemen

## Motivation

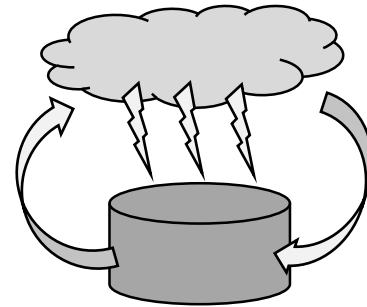
- Die Mechatronik verfolgt einen fachübergreifenden Ansatz:  
Physikalische Vorgänge mit Elektronik und Informationstechnik verarbeiten
- Mechanik, Elektrotechnik und Optik sind etabliert
- Thermodynamik bisher außen vor => „Mechatronik“
- Jedoch: Wärmeleitung ist ein klassisches Beispiel für FEM  
=> Künftig Erweiterung zur „Thermotronik“

## Eine Einführung in die Thermodynamik

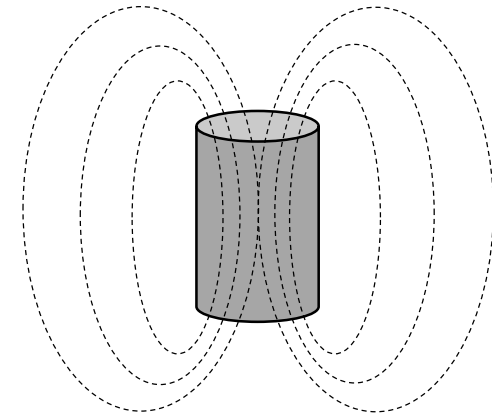
## Gebiete der Physik 1



Mechanik



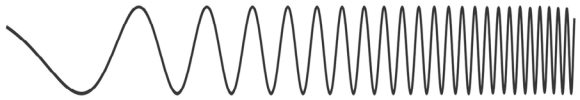
Thermodynamik



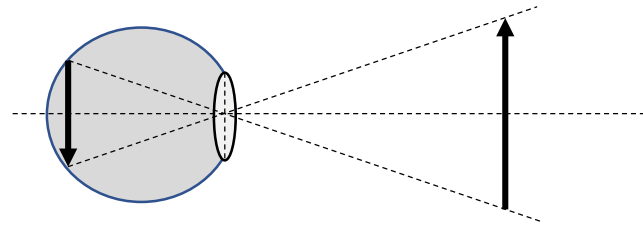
Elektrodynamik

Entstehung der Lebensgrundlage

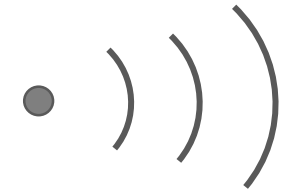
## Gebiete der Physik 2



Wellen



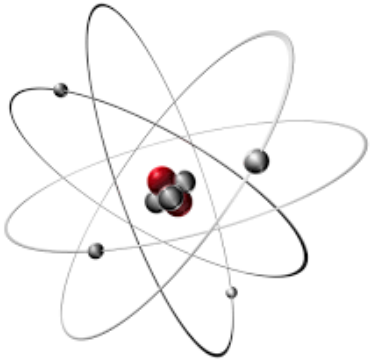
Optik



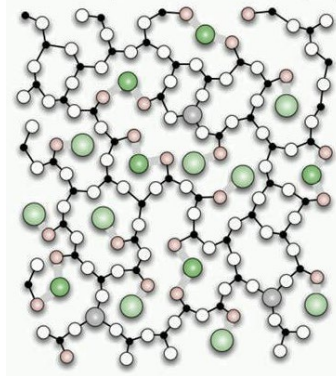
Akustik

Entwicklung von Sinneswahrnehmung und Information

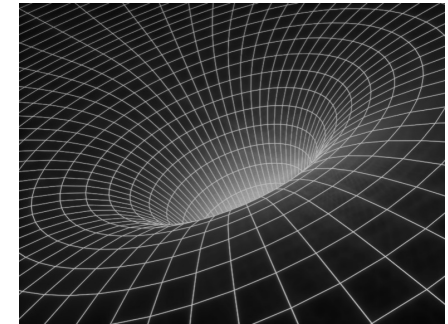
## Gebiete der Physik 3



Atome



Festkörper



Relativität

Erkenntnisgewinn und höhere Intelligenz

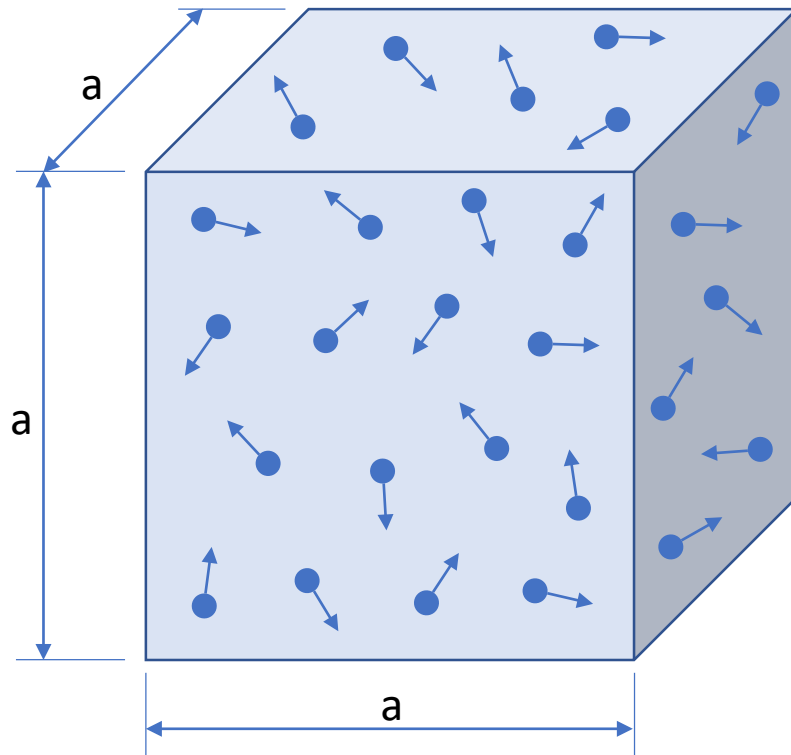
## Von der **Mechanik** zur **Thermodynamik**:

Was ist die innere Energie eines Gases?

=> Die kinetische Gastheorie



## Inneren Energie eines Gases



### Annahme:

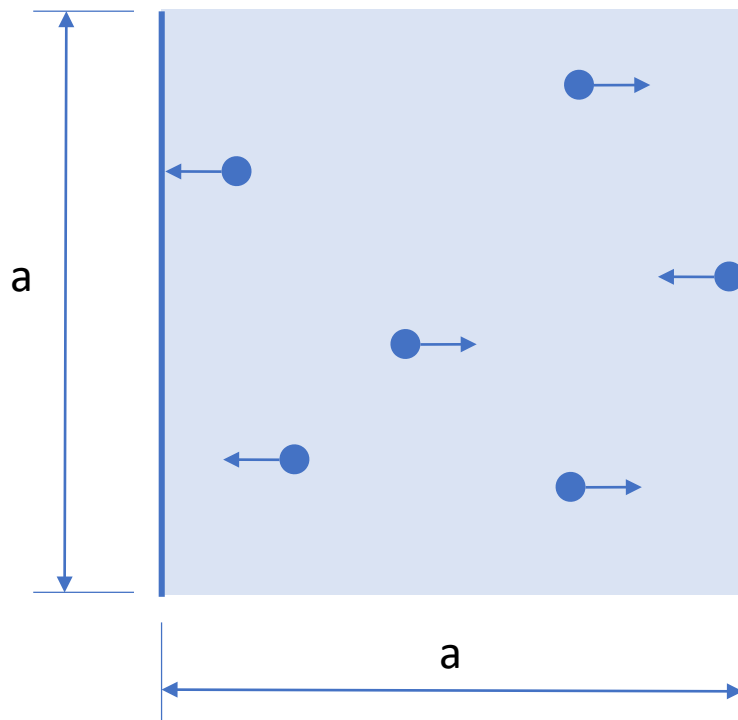
Druck entspricht Stöße der Moleküle auf eine Wand

### Gedankenexperiment **Würfel**

- Kantenlänge  $a$
- Anzahl Moleküle  $Z$
- Masse  $m$
- Mittlere Geschwindigkeit  $w$
- Komplexe ungeordnete Bewegung

Quelle: P. Stephan, Thermodynamik

## Vereinfachung und Berechnung



- $1/3$  der Moleküle bewegen sich senkrecht zwischen 2 parallelen Wänden
- Moleküle werden wie vollkommen elastische Kugeln an den Wänden reflektiert
- Impuls je Stoß ist  $2mw$ , wirkt auf die Wand
- Geschwindigkeit ändert sich von  $+w$  auf  $-w$
- Zeit für Hin- und Rückbewegung
- Sekündliche Zahl der Stöße je Fläche
- Berechnung des Druckes (Kraft pro Fläche)
- Berechnung der mittleren Geschwindigkeit

Quelle: P. Stephan, Thermodynamik

## Berechnung (an der Tafel)

- Druck: 
$$p = \frac{z \cdot m}{3} \frac{1}{a^3} w^2 = \frac{1}{3} \rho w^2$$

- Geschwindigkeit: 
$$w = \sqrt{3 \frac{p}{\rho}}$$

### Beispiele

- Luft (0°C und 1 bar)

$$\rho_L = 1.275 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Rightarrow w_L = 854 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Wasserstoff (0°C und 1 bar)

$$\rho_{\text{H}_2} = 0.0898 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Rightarrow w_{\text{H}_2} = 1827 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Mit der allgemeinen Gasgleichung

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T$$

$$p \cdot v = \bar{R} \cdot T \quad (\text{je Mol})$$

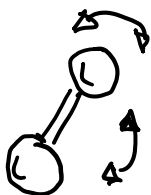
=> Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \bar{R} \cdot T$$

(je Freiheitsgrad)

Bei 1-atomigen Gasen: 3 Freiheitsgrade (3x Translation) =>  $E_{kin} = \frac{3}{2} \bar{R} \cdot T$

Bei 2-atomigen Gasen: 3 Freiheitsgrade Translation



+ 2 Freiheitsgrade Rotation

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{5}{2} \bar{R} \cdot T$$

# Grundlagen der Thermodynamik

## Thermodynamik

- Thermós = warm, Dýnamis = Kraft => Wärmelehre (Wärmekraftmaschinen)
- Ursprung: Studium der Dampfmaschine: Wie kann man Wärme in mechanische Arbeit umwandeln?
- Bedeutende Arbeit Carnot 1824

## Hauptsätze der Thermodynamik

Vergleichbar mit Newtonschen Axiomen und Maxwell-Gleichungen

### 1. Energieerhaltung (Energiewandlung)

Die Energie bleibt in einem geschlossenem System stets konstant.

### 2. Energiewertigkeit (Exergie / Entropie)

Wärme wird niemals spontan von einem kalten in einen warmen Körper übergehen.

## 1. Hauptsatz der Thermodynamik

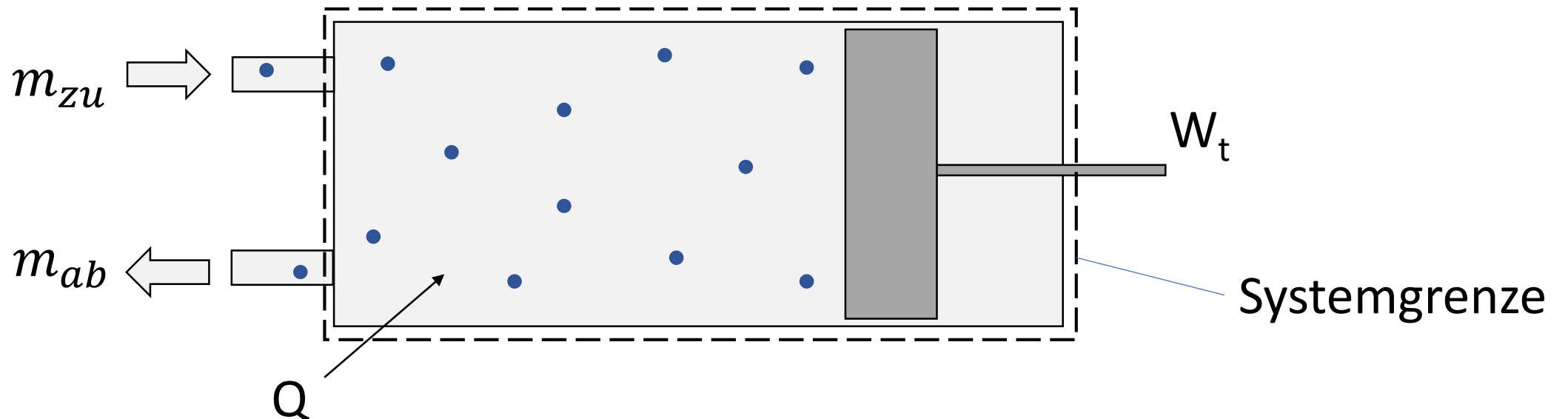
Wärme ist als thermische Energie in der ungeordneten Bewegung von Atomen und Molekülen gespeichert. Führt man einem abgeschlossenen System Wärme und Arbeit von außen zu, so ist deren Summe gleich der Zunahme der inneren Energie.

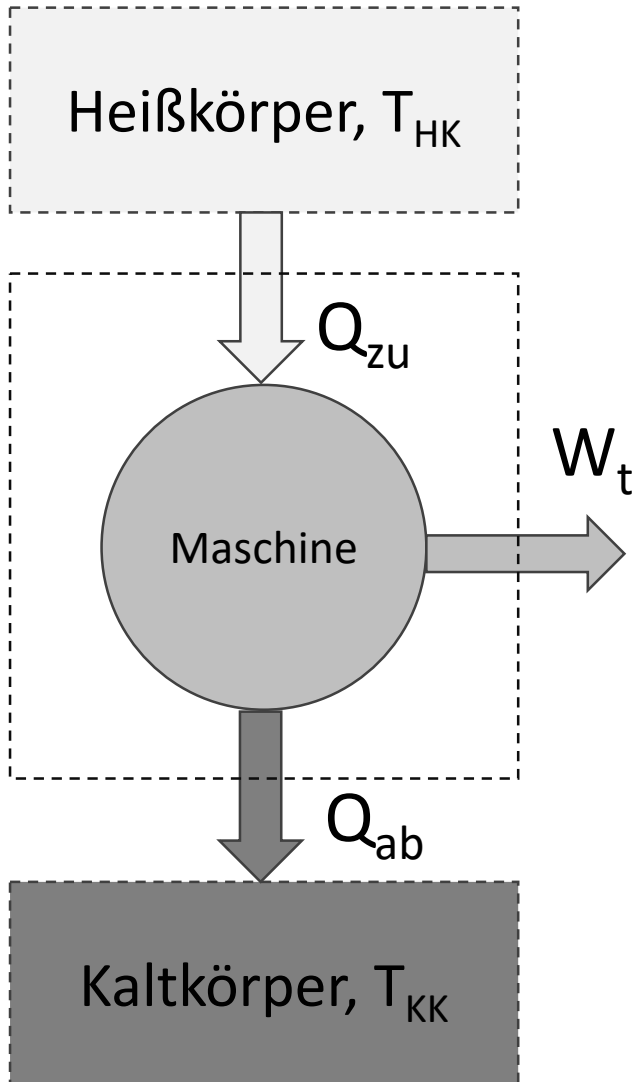
- Der erste Hauptsatz ist ein Energieerhaltungssatz (Es gibt kein Perpetuum mobile erster Art).
- Diese Aussage ist nicht beweisbar, sondern eine reine Erfahrungstatsache.



Mathematische Formulierung des ersten Hauptsatzes:

$$dE = dQ + dW_t + \sum_{k=1}^n d m_k \left( h_k + \frac{w_k^2}{2} + g z_k \right)$$





## Thermodynamische Kreisprozesse

1. HS der Thermodynamik:  $0 = Q_{zu} - Q_{ab} - W_t$

## CARNOT-Prozess

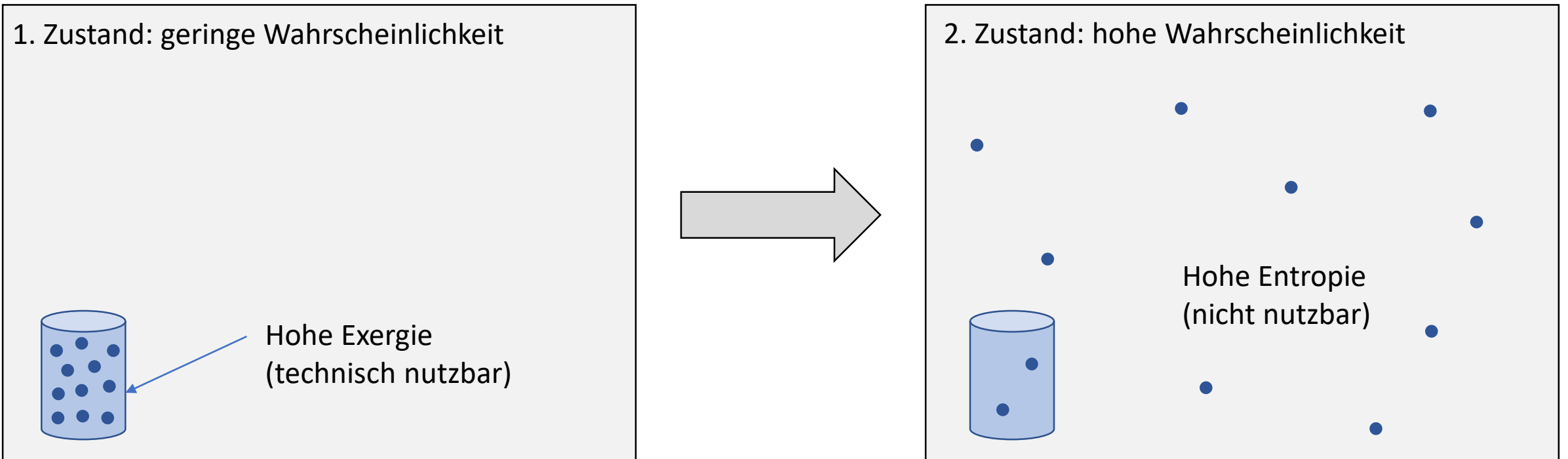
- Reversibel / reibungsfrei
- Adiabate Expansion/Kompression
- Isotherme Wärme Zu-/Abfuhr

## Thermische Wirkungsgrad:

$$\eta_c = \frac{W_t}{Q_{zu}} = \frac{Q_{zu} - Q_{ab}}{Q_{zu}} = 1 - \frac{Q_{ab}}{Q_{zu}}$$

# Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

## Entropiezunahme gibt die Richtung von chemischen Reaktionen an



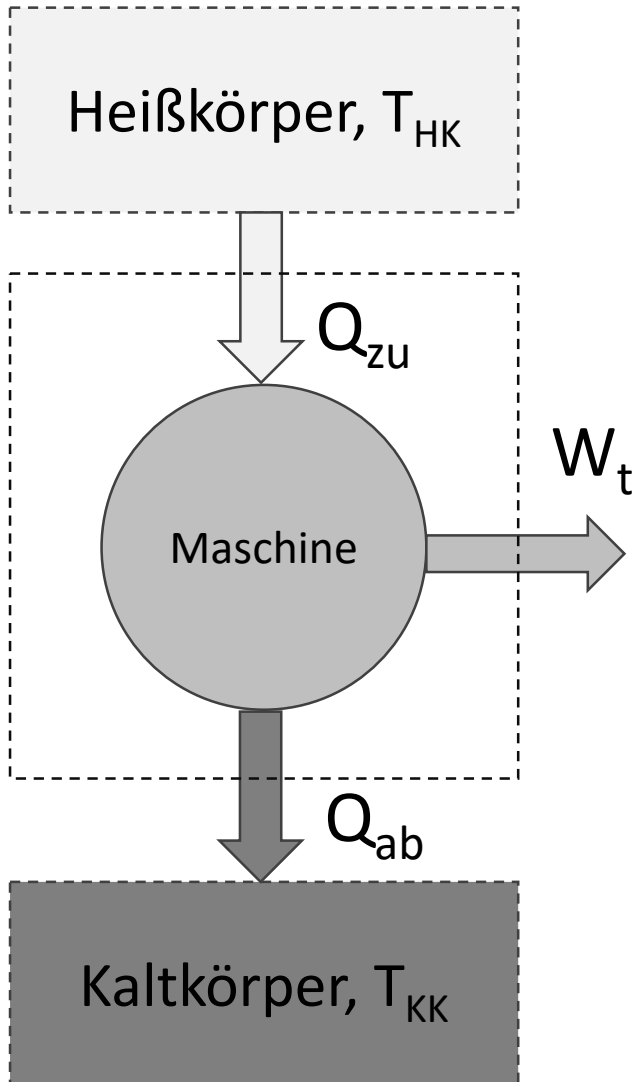
Zeitpfeil => Entropie nimmt zu

### 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Wärme geht von selbst immer nur von einem Körper höherer Temperatur auf einen Körper niedriger Temperatur über. Dies bedeutet, dass die Entropiezunahme in einem abgeschlossenen System immer größer oder gleich Null ist.

Eine weitere Formulierung:

Es gibt keine periodisch wirkende Maschine, die ohne äußere Energiezufuhr ein Wärmereservoir abkühlt und die dabei gewonnene Wärmeenergie vollständig in mechanische Energie umwandelt. So eine Maschine wäre ein Perpetuum mobile zweiter Art.



## Thermodynamische Kreisprozesse

2. HS der Thermodynamik:  $0 = \frac{Q_{zu}}{T_{HK}} - \frac{Q_{ab}}{T_{KK}}$

## CARNOT-Prozess

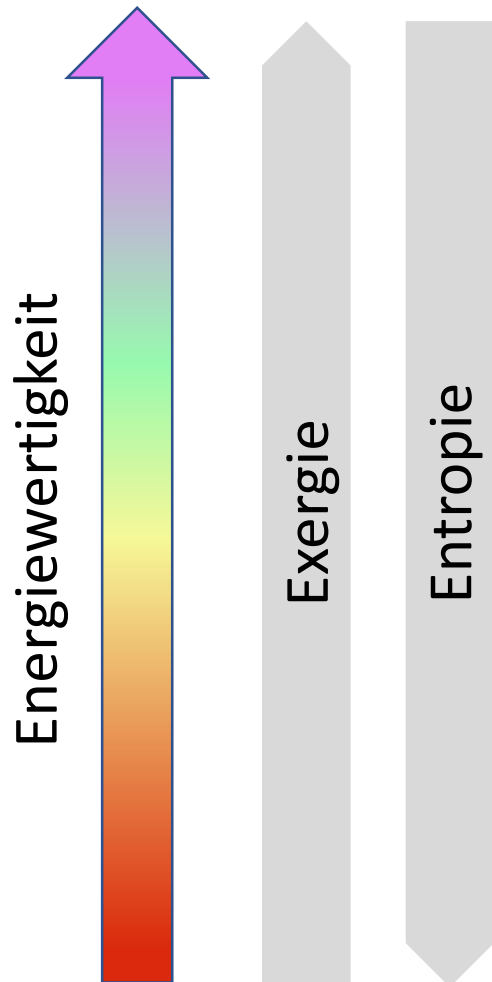
- Reversibel / reibungsfrei
- Adiabate Expansion/Kompression
- Isotherme Wärme Zu-/Abfuhr

## CARNOT-Wirkungsgrad:

Mit 2. HS

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{KK}}{T_{HK}}$$

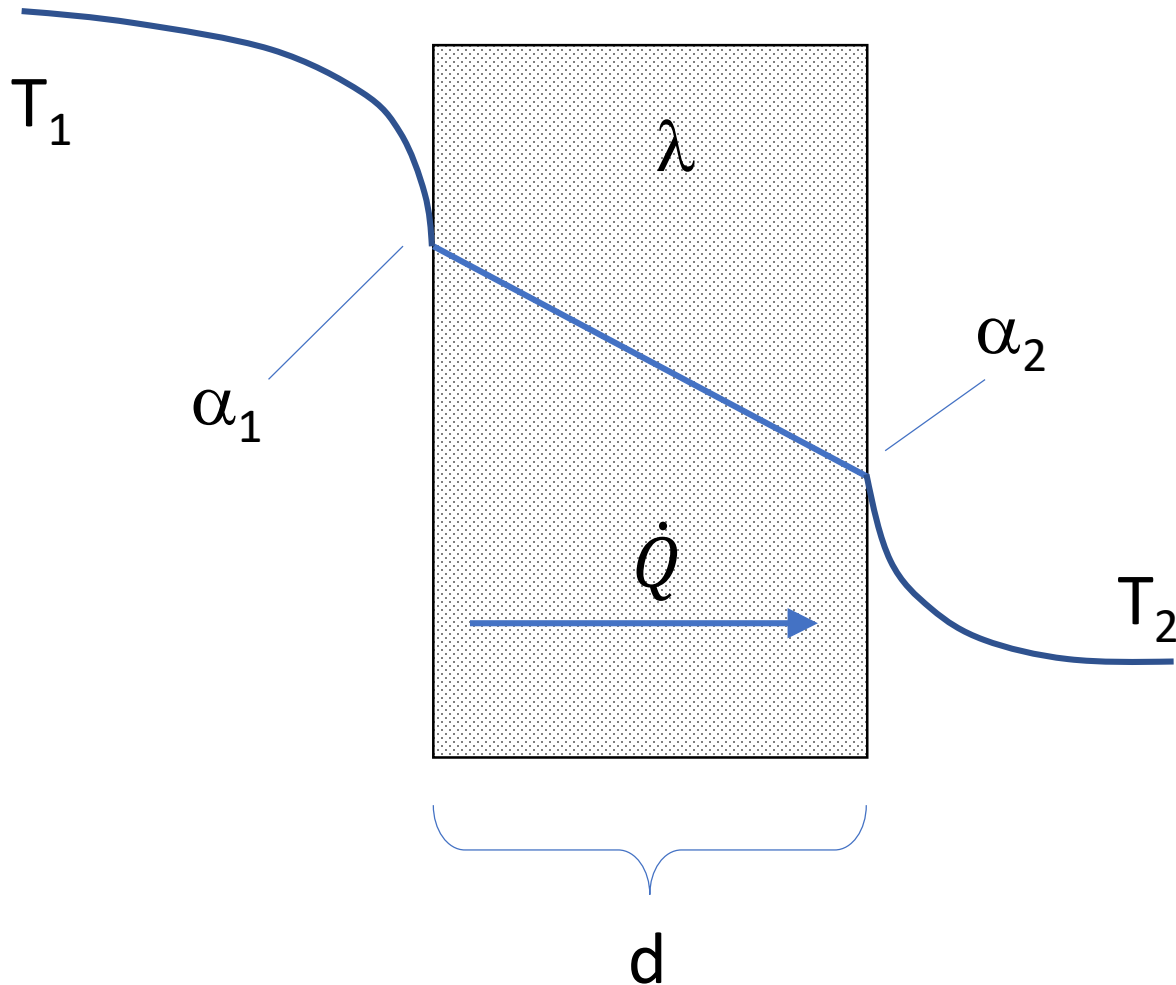
Bsp.:  $25^\circ\text{C} / 1000^\circ\text{C}$   
 $\Rightarrow \eta_c = 0,77$



Energieform	Natürliche Vorkommen	Technische Anwendung
<b>Elektrische Energie</b>	Blitze, Gewitter	Solarzellen, Generatoren, Elektrotechnik, Elektronik
<b>Mechanische Energie</b>	Tiefdruckgebiete, Wind, Wellen, Wasserkraft	Wind-, Wasserkraftanlagen, Turbinen, Motoren, Antriebe, Industrie Produktion, Verkehr
<b>Chemische Energie</b>	Biomasse, fossile Brennstoffe	Chemisch-Pharmazeutische Industrie, Kunststoffe, Nahrungsmittel
<b>Strahlungsenergie</b>	Solarstrahlung	Laser, Optik, Fotografie
<b>Wärmeenergie</b>	Feuer, Vulkanismus	Heizungen, Wärmebehandlung

# Wärmeleitung und Wärmeübertragung





## Wärmeleitung durch ebene Wand

- Konvektion innen
- Wärmeleitung Wand
- Konvektion außen

$$\dot{q} = \frac{1}{R} (T_1 - T_2)$$

$\dot{Q}$  = Wärmestrom [W]

$R$  = Wärmewiderstand [K/W]

$\alpha$  = Wärmeübergangskoeffizient [W/mK]

Die Wärmeleitung erfolgt analog der elektrischen Leitung

$$\Delta U = R_{\text{el}} * I \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = R_{\text{therm}} * \dot{Q}$$

Die einzelnen Widerstände können (bei Reihenschaltung) einfach addiert werden:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \frac{d}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\alpha 1} + R_{\lambda} + R_{\alpha 2}} = \frac{T_1 - T_2}{R_k}$$

Stoff	t	$\rho$	c	$\lambda$	$10^6 a$
Aluminium 99 75 Al.....	20	2700	0,896	229	94,6
Duraluminium.....	20	2700	0,912	165	67,0
Beryllium.....	20	1850	1,80	159	47,8
Blei (rein).....	0	11340	0,128	35,1	24,2
Bronze (6 Sn, 9 Zn, 84 Cu, 1 Pb)	20	8700-8900	0,377	61,7	18,6
Cadmium.....	0-100	8650	0,230	92,2	46,4
Eisen.....					
Schmiedeeisen rein.....	0	7850	0,465	59	16,2
Gußeisen 3% C.....	20	7000-7700	0,540	58	14,7
Bessemerstahl.....	20	7830		40	
Chromnickelstahl.....	20	7900	0,477	14,5	3,85
V2A Stahl vergütet.....	20	8000	0,477	15	3,93
Cr-Stahl (X8 Cr17) rost- und säurebeständig.....	20	7700	0,46	25,1	7,09
Cr-Al-Stahl (X10 CrAl24) hitzebeständig.....	20	7600	0,50	16,7	4,41
Manganstahl.....	20		0,502	41	
Kobaltstahl 35 Co.....	20	8000		41	
Wolframstahl.....	20	8200		39	
Kesselblech H III.....	20	7900	0,47	52	14,1
Gold (rein).....	20	19290	0,129	310	124
Gold-Platin (40 Au, 60 Pt)....	25			26	
(10 Au, 90 Pt)....	25			76,3	
Iridium.....	20	22500	0,130	58,6	20
Kalium.....	20	860	0,741	196,3	
Kobalt.....	20	8900	0,414	69,1	18,7
Konstantan (60 Cu, 40 Ni).....	20	8800	0,410	22,6	5,69
Kupfer, sehr rein.....	20	8930	0,383	395	115
Handelsware.....	20	8300	0,419	372	107

t Temperatur in °C

$\rho$  Dichte in kg/m<sup>3</sup>

c, c<sub>p</sub> spezifische Wärmekapazität in kJ/kg K

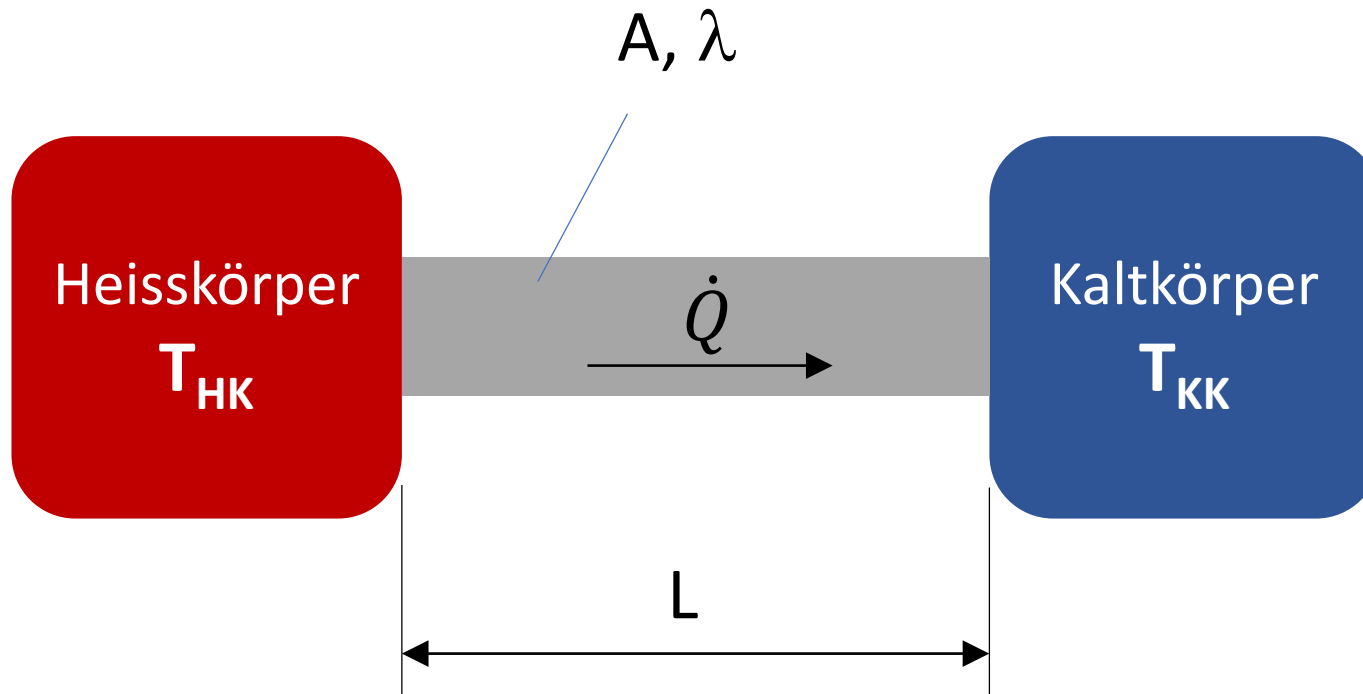
$\lambda$  Wärmeleitfähigkeit in W/m K

$10^6 a$  Temperaturleitfähigkeit in m<sup>2</sup>/sek [ $a = \lambda / (c_p \rho)$ ]

Quelle:

H. Beer, Thermodynamik III,  
TH Darmstadt

## Beispiel: Rundstab



Berechnen Sie den  
Wärmestrom  $\dot{Q}$

$$L = 0,5 \text{ m}$$

$$A = 0,01 \text{ m}^2$$

$$T_{HK} = 50^\circ\text{C}$$

$$T_{KK} = 0^\circ\text{C}$$

Für die Materialien:

- Stahl
- Aluminium
- Kupfer

## Arten des Wärmeübergangs:

1.) Wärmeleitung:  $R_\lambda = \frac{d}{\lambda \cdot A}$  (mit  $\lambda$  = Wärmeleitfähigkeit [W/mK])

2.) Konvektion:  $R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot A}$  (mit  $\alpha$  = Wärmeübergangskoeffizient [W/m<sup>2</sup>K])

3.) Strahlung (hier nicht betrachtet)

## Freie (natürliche) Konvektion

Wärmeübertragung entsteht aufgrund von Dichteunterschieden als Folge von Temperaturunterschieden.

$$\text{Nu} = f(\text{Gr} \cdot \text{Pr}),$$

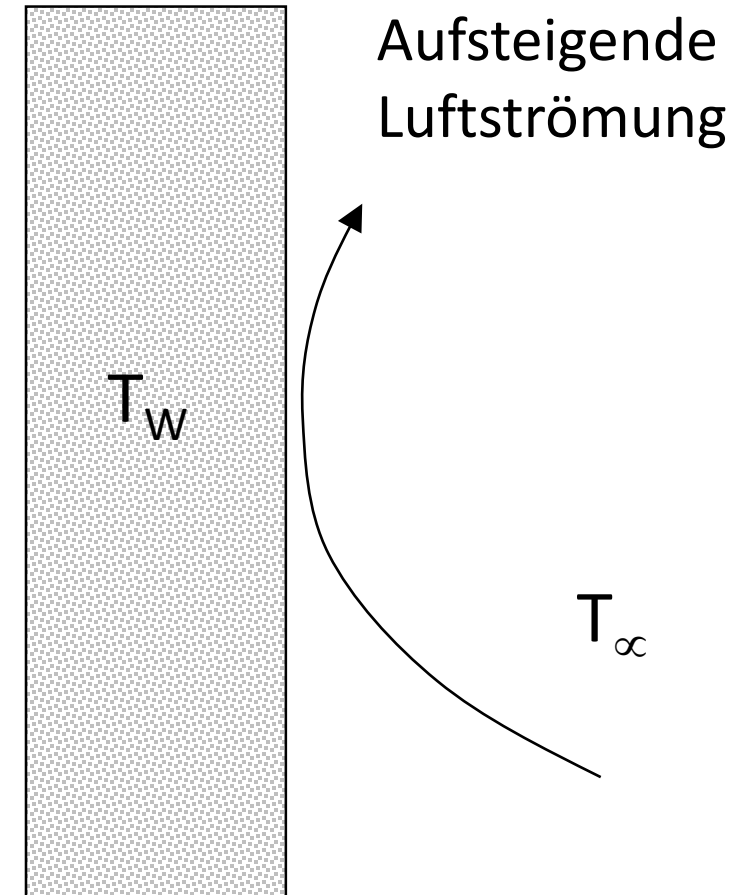
mit der Nußelt-Zahl

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

und der Grashof-Zahl

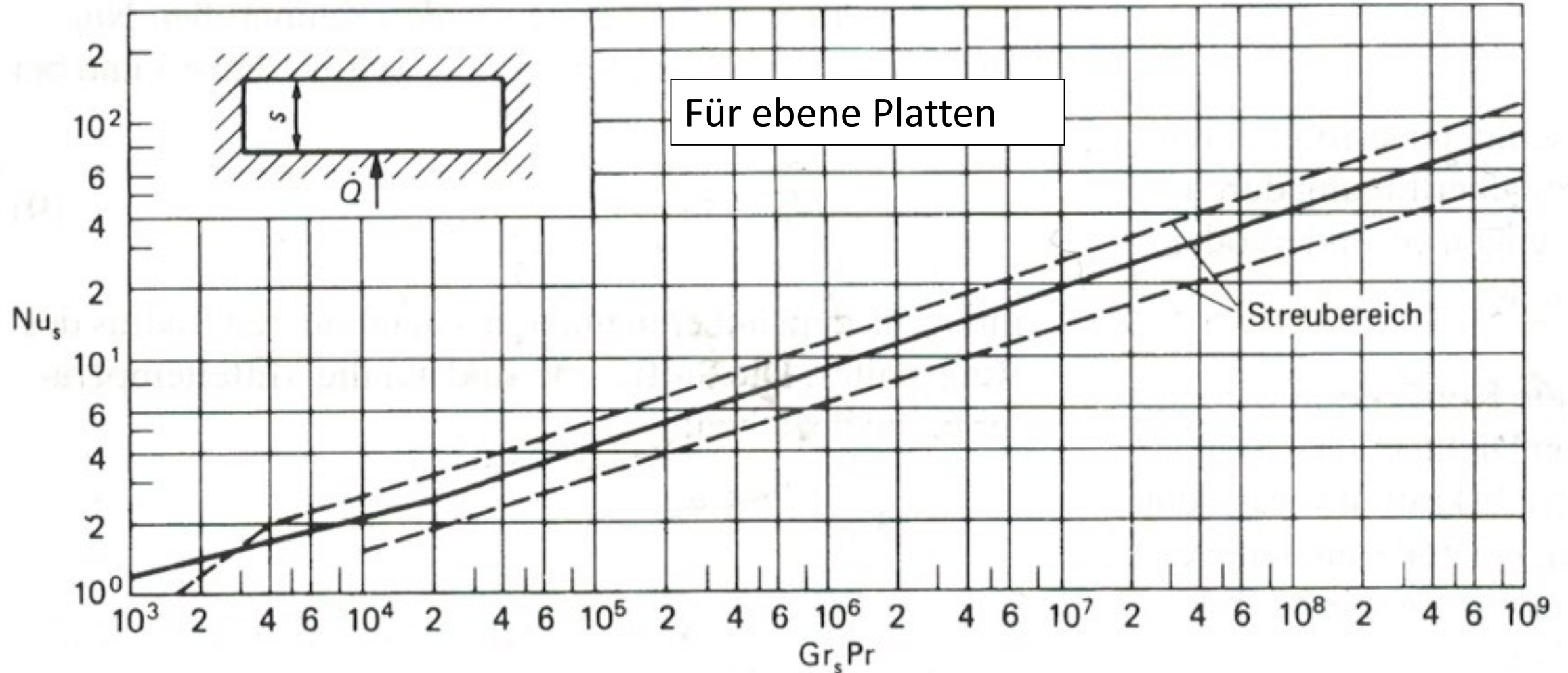
$$\text{Gr} = \frac{g l^3}{\nu^2} \beta \Delta \vartheta$$

Pr	Prandtl-Zahl,
$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient,
$l$	Anströmlänge,
$g$	Fallbeschleunigung,
$\nu$	kinematische Viskosität,
$\Delta \vartheta$	Temperaturdifferenz zwischen Oberfläche $\vartheta_0$ und Fluid $\vartheta_\infty$ ,
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit des Fluids,
$\beta$	räumlicher Wärmeausdehnungskoeffizient des Fluids, s. Gl. (5).

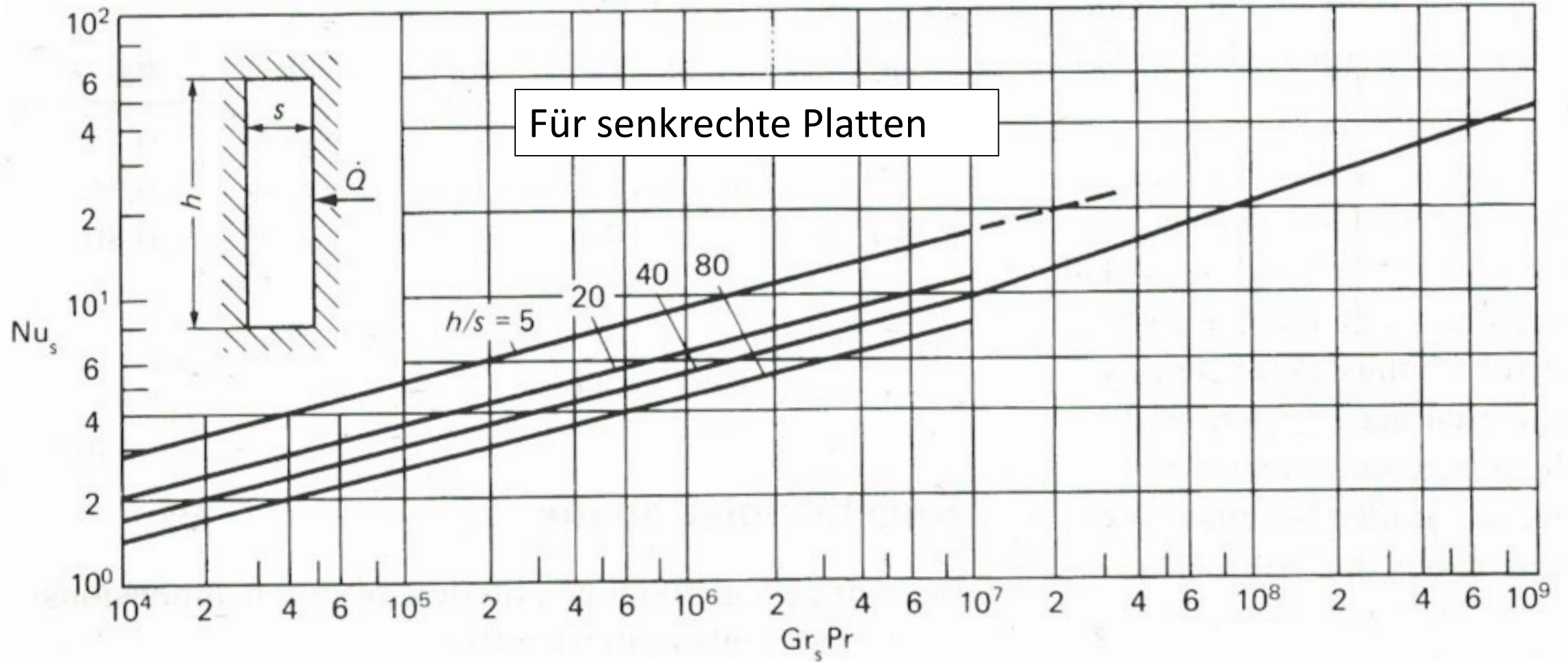




# Dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient



# Dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient





t	$\rho$	$c_p$	$c'_p$	$\lambda$	$\lambda'$	$10^3\beta$	$10^5\eta$	$10^6\nu$	$10^6a$	Pr
-150	2,793	1,028	0,245	0,0120	0,0103	8,21	0,870	3,11	4,19	0,74
-100	1,980	1,011	0,241	0,0165	0,0142	5,82	1,18	5,96	8,28	0,72
- 50	1,534	1,007	0,240	0,0206	0,0177	4,51	1,47	9,55	13,4	0,715
0	1,2930	1,006	0,240	0,0243	0,0209	3,67	1,72	13,30	18,7	0,711
20	1,2045	1,007	0,240	0,0257	0,0221	3,43	1,82	15,11	21,4	0,713
40	1,1267	1,008	0,241	0,0271	0,0233	3,20	1,91	16,97	23,9	0,711
60	1,0595	1,009	0,241	0,0285	0,0245	3,00	2,00	18,90	26,7	0,709
80	0,9998	1,010	0,241	0,0299	0,0257	2,83	2,10	20,94	29,6	0,708
100	0,9458	1,012	0,242	0,0314	0,0270	2,68	2,18	23,06	32,8	0,704
120	0,8980	1,014	0,242	0,0328	0,0282	2,55	2,27	25,23	36,1	0,70
140	0,8535	1,017	0,242	0,0343	0,0295	2,43	2,35	27,55	39,7	0,694
160	0,8150	1,020	0,243	0,0358	0,0308	2,32	2,43	29,85	43,0	0,693
180	0,7785	1,023	0,244	0,0372	0,0320	2,21	2,51	32,29	46,7	0,69
200	0,7457	1,026	0,245	0,0386	0,0332	2,11	2,58	34,63	50,5	0,685
250	0,6745	1,035	0,247	0,0421	0,0362	1,91	2,78	41,17	60,3	0,68
300	0,6157	1,046	0,250	0,0454	0,0390	1,75	2,95	47,85	70,3	0,68
350	0,5662	1,057	0,252	0,0485	0,0417	1,61	3,12	55,05	81,1	0,68
400	0,5242	1,069	0,255	0,0516	0,0443	1,49	3,28	62,53	91,9	0,68
450	0,4875	1,081	0,258	0,0543	0,0467		3,44	70,54	103,1	0,685

t Temperatur in °C

$\rho$  Dichte in kg/m<sup>3</sup>

$c_p$  spezifische Wärme bei konstantem Druck in kJ/kg K

$c'_p$  spezifische Wärme bei konstantem Druck in kcal/kg K

$\lambda$  Wärmeleitfähigkeit in W/m K

$\lambda'$  Wärmeleitfähigkeit in kcal/m h K

$\beta$  thermische Ausdehnungszahl in 1/ K

$\eta$  dynamische Viskosität in kg/m sek

$\nu$  kinematische Viskosität in m<sup>2</sup>/sek

a Temperaturleitfähigkeit in m<sup>2</sup>/sek

Pr =  $\nu/a$  Prandtl-Zahl

Quelle:

H. Beer, Thermodynamik III,  
TH Darmstadt

## Transiente Wärmeübertragung

- Dynamisches (zeitabhängiges) Verhalten, anstelle von statischem
- Basis: Erste Hauptsatz der Thermodynamik => **Differentialgleichung (DGL)**

$$\frac{dE}{d\tau} = \dot{Q} + P_{el} + \sum_{k=1}^n d\dot{m}_k \left( h_k + \frac{w_k^2}{2} + g z_k \right)$$

Geschlossenes System

Festkörper



$$m \cdot c \frac{dT}{d\tau} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab}$$

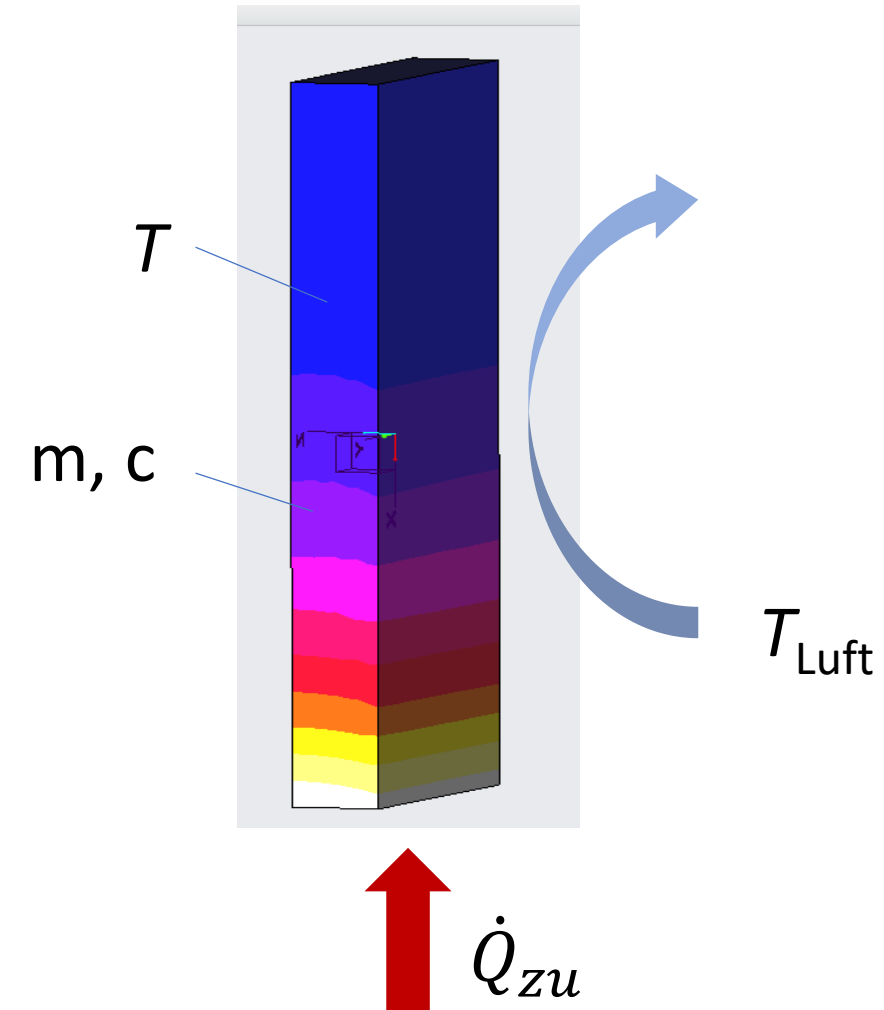
Beispiel: Einfache, senkrechte Platte:

$$m \cdot c \frac{dT}{d\tau} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab}$$

$$m \cdot c \frac{dT}{d\tau} = \dot{Q}_{zu} - \alpha \cdot A(T - T_{Luft})$$

**DGL**

=> Es stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein



## Zeitverlauf

DGL (erste Ordnung, PT1-Glied)



=> Anwendung und Vertiefung in der Übung

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !

## **Hinweis**

Diese Folien sind ausschließlich für den internen Gebrauch im Rahmen der Lehrveranstaltung an der Frankfurt University of Applied Sciences bestimmt. Sie sind nur zugänglich mit Hilfe eines Passwortes, das in der Vorlesung bekannt gegeben wird.