

Studiengang Mechatronik

Modul 16:

FEM – Finite Elemente Methode

- 5. Vorlesung -

Prof. Dr. Enno Wagner

28. November 2024

Übersicht

- Beispiele: Kräfte im Stab mit
 - 2 Querschnitten ✓
 - Mit veränderlichem Querschnitt ✓Jeweils Analytische Lösung
Und numerische Lösung
 - 1 Element ✓
 - 2 Elemente ✓
- Energieprinzip
 - Aufstellen der K-Matrix
 - Lösung mittels Ansatzfunktion

Neues Thema:

Energieprinzip

Ansatz

- Wird ein elastisches System unter Einwirkung einer äußeren Kraft F verformt, so wird dabei eine Arbeit W verrichtet.
- Die inneren Kräfte arbeiten unter dem Einfluss der Normalkraft der äußeren Kraft entgegen
- Die Formänderungsenergie wird hierbei als innere Energie gespeichert
- Hierfür wird das Gesamt-Potential Π eingeführt
- Es ist

$$\Pi = U_a + U_i$$

U_a = potentielle (äußere) Energie der äußeren Kräfte

U_i = gespeicherte innere Energie im elastisch verformten System

Allgemeine Form der DGL:

$$\Pi = U_i + U_a = \int_V \varepsilon \sigma dV - \sum_{i=1}^n F_i u_i + \int_V p dV + \int_O q dO$$

F- konzentrierte Einzellasten

p – Volumenkräfte (Eigengewicht, Fliehkräfte)

q – verteilte Oberflächenlasten

O - Oberfläche

Äußere Energie:

$$\begin{aligned} U_a &= - \int F \, ds \\ &= - F u \end{aligned}$$

Annahmen:

- Die Kraft ist Konstant über den gesamten Weg ds
- Der Weg ds ist sehr klein gegenüber der Gesamtlänge l
- Es gehen nur die äußeren Belastungen, nicht die Auflagerreaktionen ein

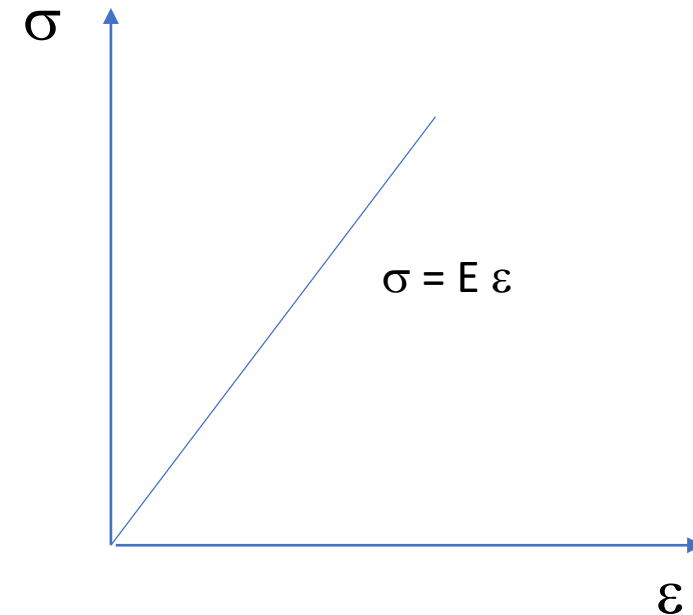
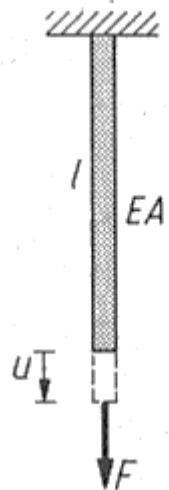
Innere Energie

Die innere Energie U_i gleicht dem Produkt aus Energiedichte $\tilde{U}_i$ und Volumen V

$$U_i = \tilde{U}_i V$$

Mit

$$\tilde{U}_i = \int_0^\varepsilon \sigma_x d\varepsilon$$



Energieprinzip

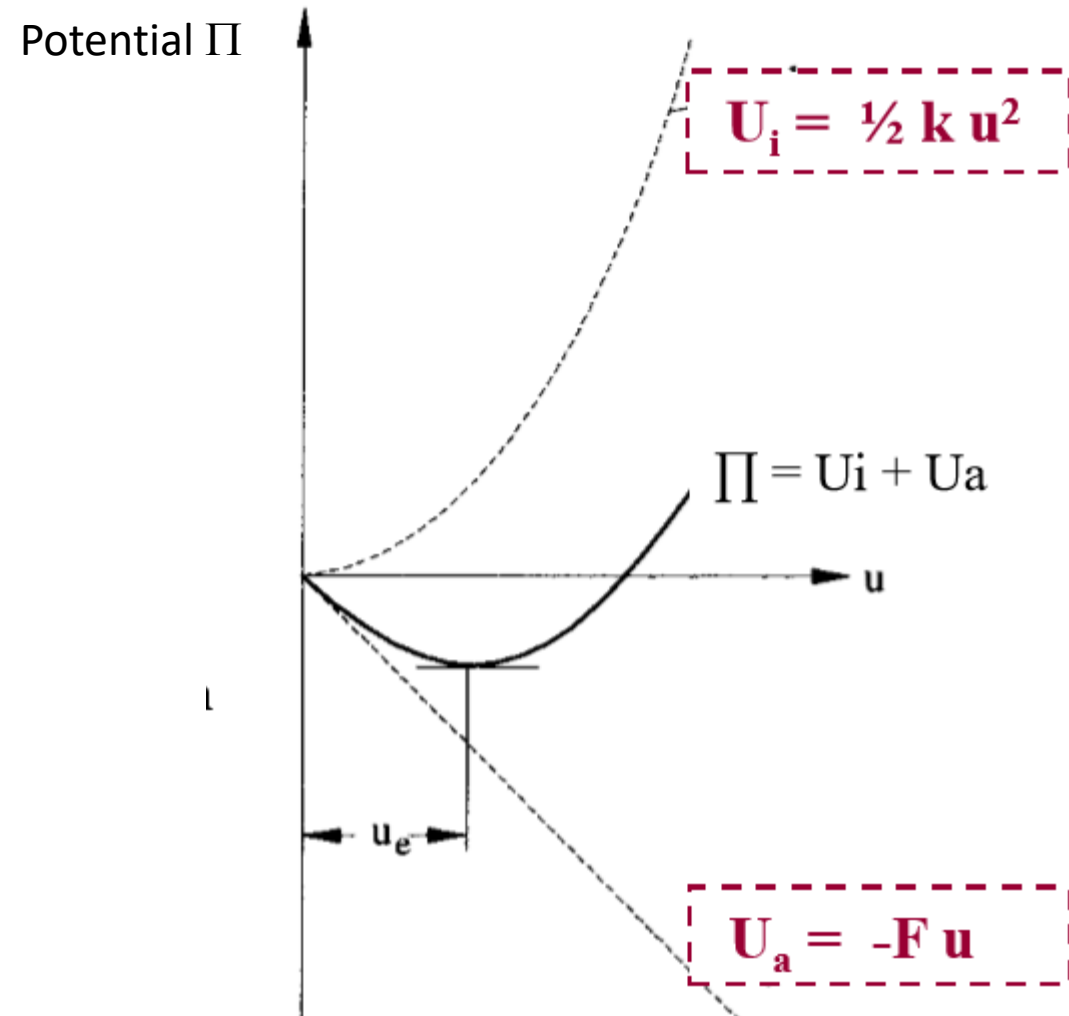
Extrema- / Variationsprinzip

Das System ist im Gleichgewicht, wenn das Gesamtpotential Π stationär ist $\Rightarrow$ es nimmt ein Extremum (Minimum) an

$$U_i = \frac{1}{2} k u^2$$

$$U_a = -F u$$

$$\Pi = U_i + U_a = \frac{1}{2} k u^2 - F u$$



1.) Galerkin-Verfahren

Methode des gewichteten Restes

Näherungsfunktion / Gewichtungsfunktion $\Rightarrow$ gleicher Ansatz

Ergebnis $\Rightarrow$ Lösung + Rest (Rest soll möglichst klein sein)

2.) Rayleigh-Ritz

Prinzip der virtuellen Verrückung

Variationsprinzip $\Rightarrow$ Ersatzgleichgewichtsfunktion

$\Rightarrow$ Gleichheit der inneren und äußeren Arbeit

Gleichung wird nicht direkt gelöst

Lösung über Ansatzfunktion, RB einsetzen und auflösen

Finites Element	Gesamtpotential Π	<i>EULERSche Differentialgleichung</i>
Zugstab unter Belastung $p(x)$	$\frac{1}{2} \int_0^\ell [EAu'^2 - 2p(x)u] dx$	$(EAu')' + p(x) = 0$
Knickstab	$\frac{1}{2} \int_0^\ell (EIv''^2 - Pv'^2) dx$	$(EIv'')'' + Pv'' = 0$
Biegebalken	$\frac{1}{2} \int_0^\ell [EIv''^2 - 2q(x)v] dx$	$(EIv'')'' - q(x) = 0$
Balkenschwingung	$\frac{1}{2} \int_0^\ell (EIv''^2 - \omega^2 \rho A v^2) dx$	$(EIv'')'' - \omega^2 \rho A v = 0$
Zugstab unter Belastung F_N	$\frac{1}{2} \int_0^\ell [EA u'^2] dx - F u _l$	$(EAu')' + F = 0$

Diese Integralgleichungen gilt es zu lösen, um die gesuchten Verschiebungen u zu erhalten. Nach **Rayleigh-Ritz** wird hierzu eine geeignete Ansatzfunktion für u gewählt und diese sowie deren Ableitung hier eingesetzt.

Verformung:
Längenänderung u
Durchbiegung $v + w$
Streckenlast $p(x)$ in normalen Richtung
Kraft $P \rightarrow F$

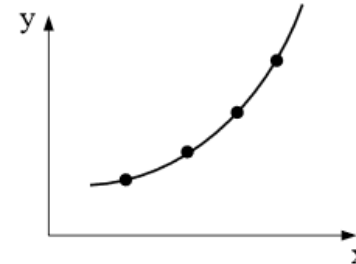
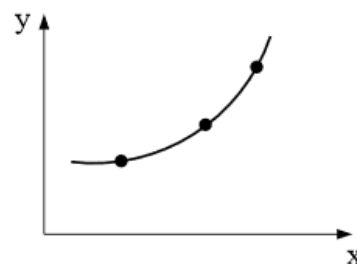
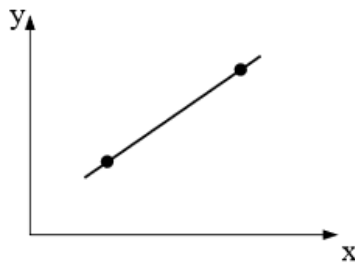
Gesamtpotenzial [5]

Quelle:
Bretten, FEM für Ingenieure, Springer

Die Formfunktion $N(x)$ bzw. $g(x)$ hat die Eigenschaft, dass sie am Knoten i eines Elementes zu 1 wird, an allen anderen Knoten ist sie Null. Sie bestimmt den Anteil einer Komponente am Gesamtergebnis. Sie wird ermittelt über eine Ansatzfunktion z.B.

$$\underline{u}(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x) \quad \text{mit} \quad u_i(x) = x^{i-1}$$

Die Qualität der Näherungslösung hängt davon ab, wie gut die tatsächliche Lösung durch die Ansatzfunktion angenähert werden kann. Je höher die Zahl der Ansatzfunktionsglieder, desto besser. Nicht geeignete Ansatzfunktionen fallen heraus. Sie muss die Randbedingungen erfüllen. Zur Orientierung: Die Ansatzfunktion sollte so viele Glieder haben wie Freiheitsgrade im System sind. Hat ein Element 2 Knoten, so kann die Verschiebung maximal linear sein, bei 3 Knoten – quadratisch, bei 4 Knoten- kubisch.



Polynomgrad der Ansatzfunktion $u(x)$

2 Punkte

$$\underline{u}(x) = a_1 + a_2 x$$

linear

3 Punkte

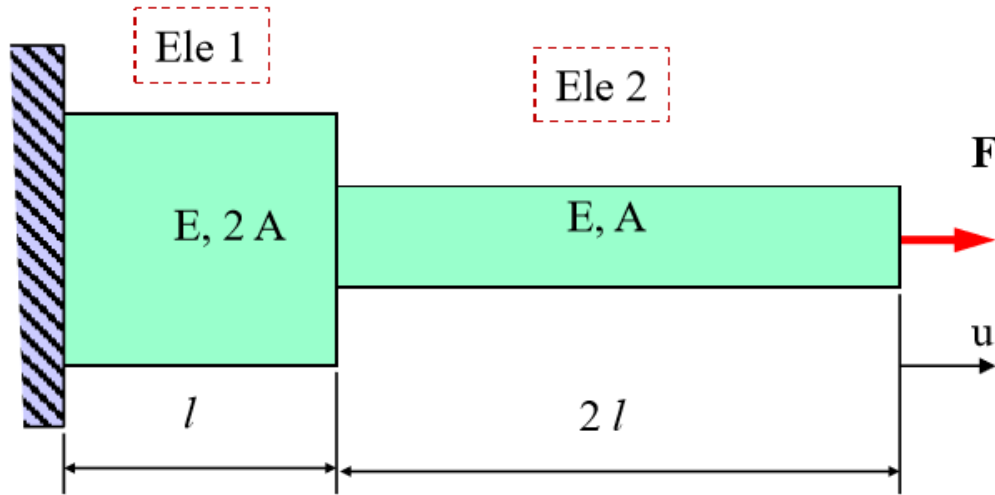
$$\underline{u}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

quadratisch

4 Punkte

$$\underline{u}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

kubisch



Gegeben:

Balken (mit E , A , L), einseitig eingespannt auf Zug belastet mit der Kraft F , $F_{\text{Gewicht}} \ll F$

Gesucht:

Verschiebung u am Kraftangriffspunkt,
Auflagerkraft F_{Auflager}

Aufstellen der DGL

- Hier nur Einzellast F
 - keine Oberflächenlasten
 - keine Volumenkräfte

DGL:

$$\Pi = U_a + U_i = - \int F \, ds + U_1 + U_2$$

Heute

Anwendung der Ansatzfunktion am Beispiel

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !

Hinweis

Diese Folien sind ausschließlich für den internen Gebrauch im Rahmen der Lehrveranstaltung an der Frankfurt University of Applied Sciences bestimmt. Sie sind nur zugänglich mit Hilfe eines Passwortes, dass in der Vorlesung bekannt gegeben wird.