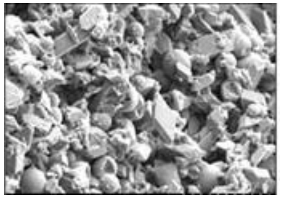
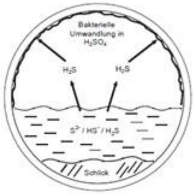
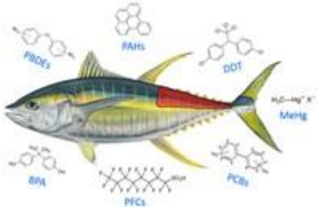
Bachelor Infrastruktur

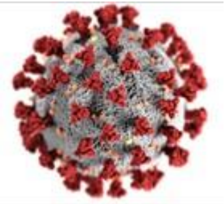
Vorlesung und Übung: Naturwissenschaftliche Grundlagen

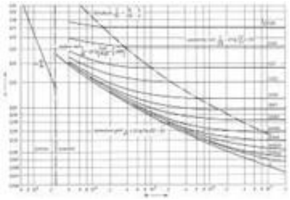
Prof. Dr. Welker, Frankfurt University of Applied Sciences











Naturwissenschaftliche Grundlagen
1. Physikalische Grundlagen (Wasser)

1.1 Hydrostatik/ Hydrodynamik

- Hydrostatik
  - Schweredruck (Fluide und Gase)
  - Auftrieb
- Hydrodynamik
  - Bernoulli
  - GMS

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck

„Maß des **Widerstandes**, den Materie einer **Verkleinerung** ihres Raumes entgegensetzt."

Wirken einer Kraft F senkrecht zur Fläche A

$$p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A}$$

m [kg]; g: 9,81 [m/s²]; F [N]; A [m²]

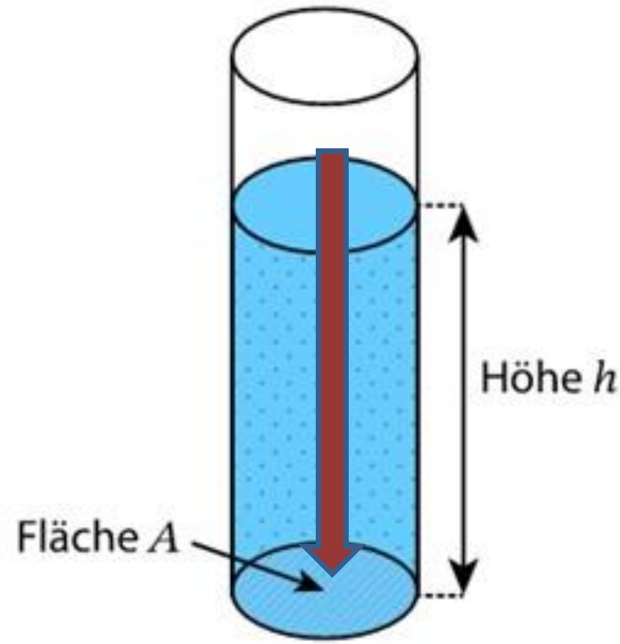


Abb. 1 Schweredruck am Boden einer Wassersäule

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Druck

Umrechnen Einheiten Druck

- Einheit: SI-Einheit Pascal (Pa), aber auch: N/m^2; bar; mWS
- $1\ N/m^2 = 1\ Pa$
- $1\ bar = 10^5\ Pa = 100.000\ Pa$
- 1 mWS = 9.807 Pa = 0,1 bar

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck

	bar	mbar	Pa (N/m^2)	kPa (kN/m^2)	Torr mmHg (0 °C)	mWs (4 °C)	at kp/cm^2	inch Hg (0 °C)	inch H2O (4 °C)	PSI $lb/inch^2$	atm
bar	**1**	1000	100000	100	750,062	10,1972	1,01972	29,53	401,463	14,5038	0,986923
mbar	0,001	**1**	100	0,1	0,750062	0,0101972	0,00101972	0,02953	0,401463	0,014504	0,000986923
Pa (N/m^2)	0,00001	0,01	**1**	0,001	0,007501		$1{,}01972 \times 10^{-5}$	0,0002953	0,004015	0,000145038	$9{,}86923 \times 10^{6}$
kPa (kN/m^2)	0,01	10	1000	**1**	7,501	0,10197	0,010197	0,2953	4,015	0,145038	0,00986923
Torr mmHg	0,00133322	1,33322	133,322	0,133322	**1**	0,0135951	0,00135951	0,03937	0,53524	0,019337	0,00131579
mWs (4 °C)	0,098067	98,0665	9806,65	9,80665	73,5559	**1**	0,1	2,8959	39,3701	1,42233	0,096784
at kp/cm^2	0,980665	980,665	98066,5	98,0665	735,559	10	**1**	28,959	393,701	14,2233	0,967841
inch Hg (0 °C)	0,033864	33,8639	3386	3,386	25,4	0,345316	0,034532	**1**	13,5951	0,491154	0,033421
inch H2O (4 °C)	0,00249089	2,49089	249,089	0,249089	1,86832	0,0254	0,00254	0,073556	**1**	0,03613	0,002458
PSI $lb/inch^2$	0,06895	68,9476	6894,76	6,89476	51,7149	0,70307	0,070307	2,03602	27,68	**1**	0,068046
atm	1,01325	1013,25	101325	101,325	760	10,3323	1,03323	29,921	406,78	14,6959	**1**

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

Herleitung

Der Druck wird definiert als (Gewichts-)Kraft pro Fläche.
Die Gewichtskraft der Flüssigkeit: Masse m * Erdbeschleunigung g

$$p = \frac{F_G}{A} = \frac{m \cdot g}{A}$$

Die Masse m der Säule ergibt sich aus dem Produkt von Volumen V und Dichte ρ der Flüssigkeit: m = V · ρ

$$p = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{A}$$

Das Volumen berechnet man mit V = A · h
→ **Schweredruck**:

$$p = \frac{\rho \cdot g \cdot \cancel{A} \cdot h}{\cancel{A}} = \rho \cdot g \cdot h$$

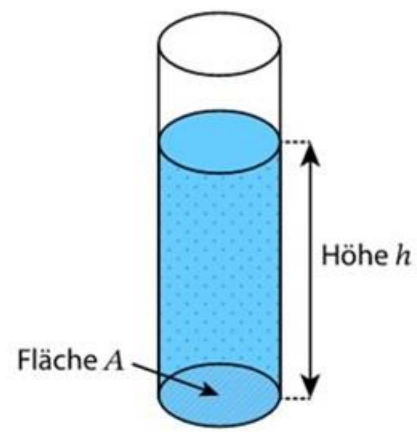


Abb. 1 Schweredruck am Boden einer Wassersäule

https://www.leifiphysik.de/mechanik/druck-und-auftrieb/grundwissen/schweredruck

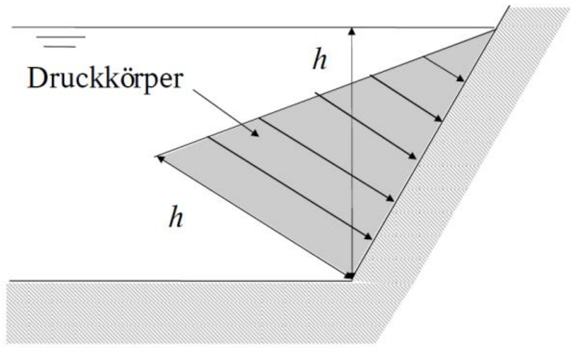
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

Pascalsches Gesetz (Druckausbreitungsgesetz):

- An einem Ort innerhalb einer **ruhenden Flüssigkeit** wirkt der Druck in allen Richtungen mit **gleichem Betrag**.
- Der **Flüssigkeitsdruck** wirkt immer **senkrecht** auf das gedrückte Flächenelement.

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$



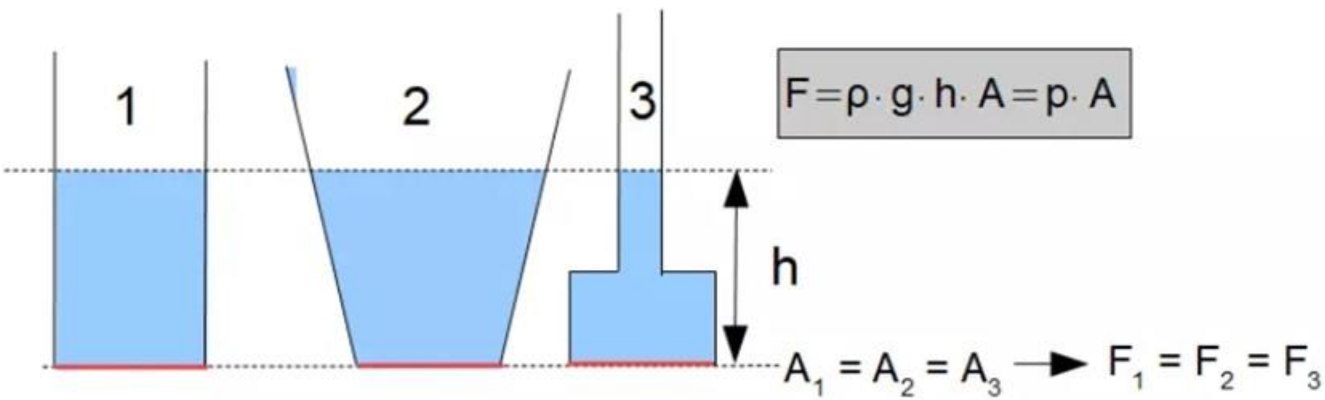
ρ [kg/m³]; g = 9,81 m/s²; h [m];
p [Pa]; p_0: Atmosphärendruck [100.000 Pa]

Der Wasserdruck nimmt **linear** mit der **Wassertiefe h** zu.
Der Wasserdruck bleibt in einer **Horizontalebene konstant**.

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Schweredruck, Flüssigkeiten

Hydrostatisches Paradoxon: Druck p am Boden des Gefäßes ist überall gleich, obwohl Fluidmassen unterschiedlich; Flächen A gleich → **Druckkraft F** gleich

Druck einer Flüssigkeitssäule wirkt **unabhängig von Form oder Querschnitt,** nur von der Füllhöhe h abhängig (Pascal: berstendes Fass)



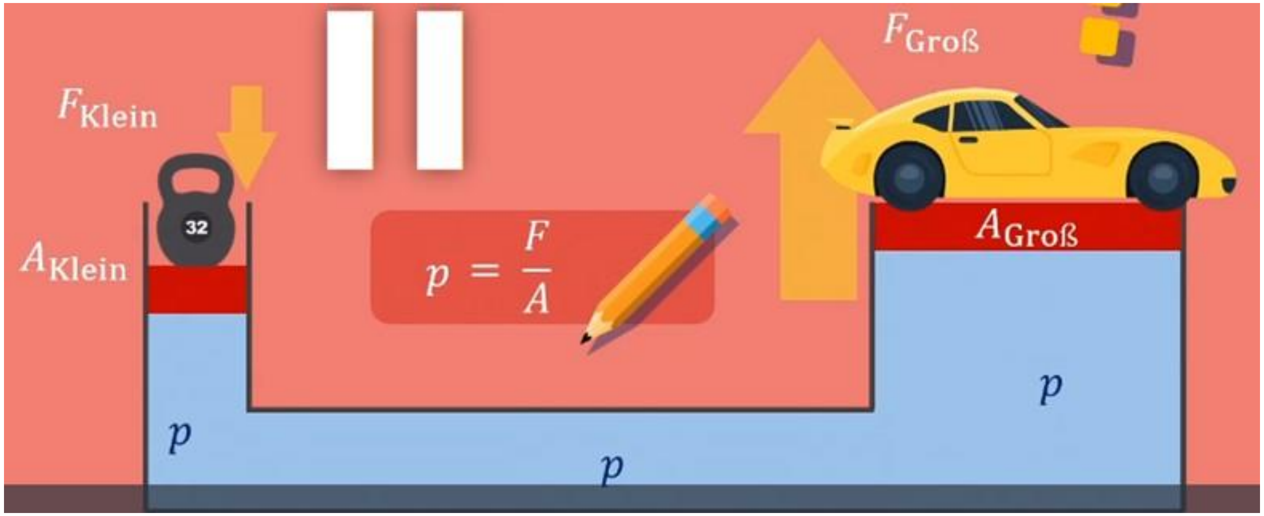
Hydrostatische Druckkraft für alle Gefäße gleich

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

Pascalsches Gesetz: Anwendung hydraulische Hebebühne

$$p = \frac{F}{A} \quad \rightarrow \quad \frac{F_{klein}}{A_{klein}} = \frac{F_{groß}}{A_{groß}}$$

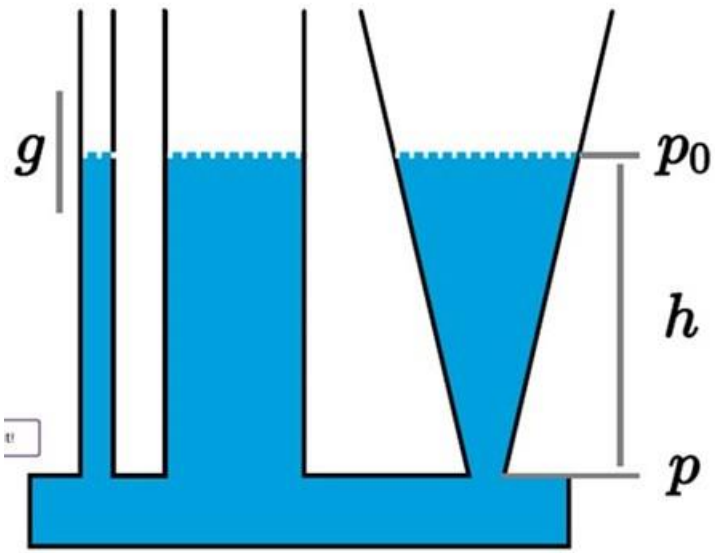


p überall gleich

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

kommunizierende Röhren: unabhängig von Querschnittsfläche und Form



$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

p_0 ist z.B. der Atmosphärendruck

Wasserstand gleich, da ρ, g und p_0 gleich

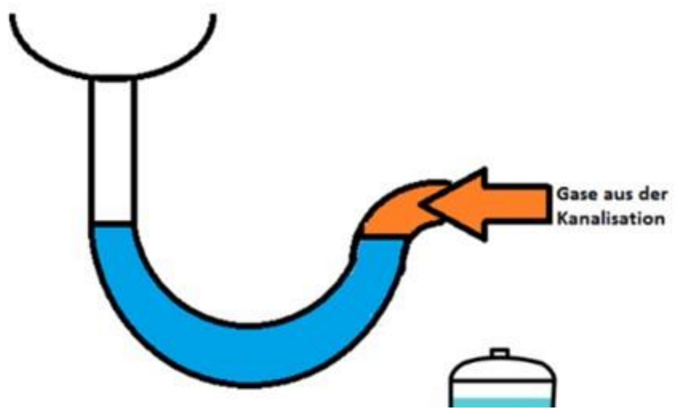
https://www.leifiphysik.de/mechanik/druck-und-auftrieb/grundwissen/schweredruck

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Flüssigkeiten

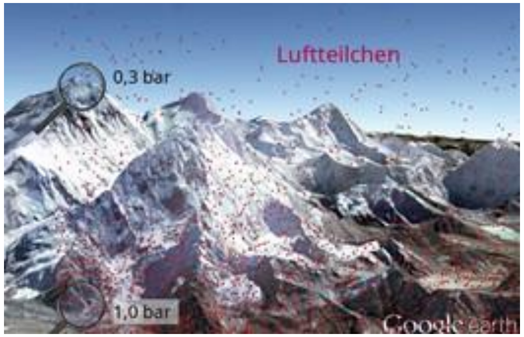
Anwendung kommunizierende Röhren:

- Geruchsverschlüsse Siphons
- Wassertürme (Sicherstellung Wasserdruck in Gebäuden)



Naturwissenschaftliche Grundlagen
Schweredruck, Gase

- **Druck** von Luft nimmt infolge **Schwerkraft (Luftmasse auf Fläche) mit der Tiefe zu**
- aber nicht **linear**
- **(Unterschied zu Flüssigkeiten)**, da sich in Gasen (z.B. Luft) die **Dichte** mit der Tiefe infolge der **Kompressibilität der Gase** erheblich **erhöht**.



[Bannwarth et al., 2019]

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Gase

Druck von Luft nimmt **mit der Höhe ab** (Luftmasse auf Flächenelement wird kleiner) → **Barometrische Höhenformel (bei T= konst.)**

h_o: Bezugshöhe und h: Höhe

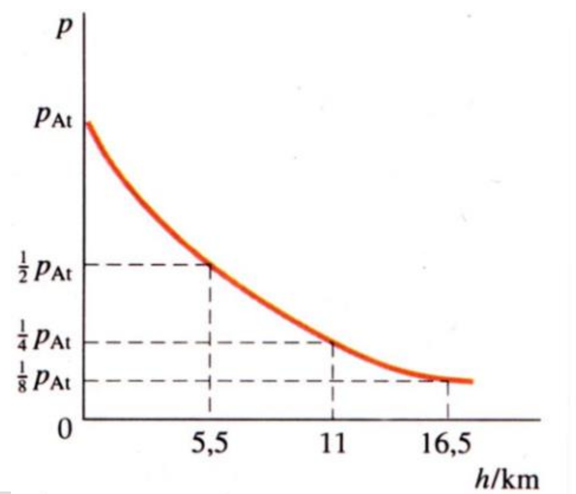
$$p(h) = p_0 \cdot e^{-h/h_0}$$

$$h = h_0 \cdot \ln\left(\frac{p_o}{p}\right)$$

Nutzung Höhenbestimmung

Beispiel:
Meeresniveau h_o: 0 m; p_0 = 101.325 Pa
2.000 m: p= ca. 78.000 Pa
5.500 m: p= ca. 50.662 Pa
11.000 m: p = ca. 25.331 Pa

Luft- oder Atmosphärendruck:
veränderlich (**Höhe**/ **Wetterlage**)



[Bannwarth et al., 2019]

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Schweredruck, Gase

- **Flüssigkeitsbarometer** (Torricelli) Messung **Luftdruck**

- **Vakuum** (kein Gas, das Druckkräfte erzeugt → p_0 = 0)) über Quecksilber
  → Druck in Höhe A gleich wie Luftdruck bei B
  → Luftdruck an Höhe h der Quecksilbersäule
  über der Linie A-B ablesbar

- **Normaldruck Luft bei Quecksilber:**
  h = 760 mm Hg = 760 Torr = 1 atm = 1 bar
  = 1.000 mbar (Torricelli, 1608–1647, Blutdruckmessung)
- **Normaldruck Luft bei Wasser:**
  h = 10.000 mm H_2O (10 m), Ursache: Dichte

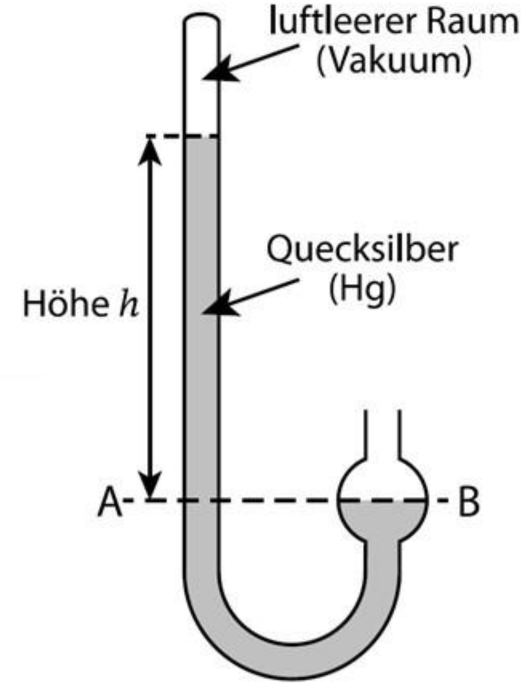


Abb. Flüssigkeitsbarometer nach Torricelli

pixabay license / Ernesto Orihuela via pixabay

https://www.leifiphysik.de/mechanik/druck-und-auftrieb/grundwissen/schweredruck

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck Gase

offenes U-Rohr-Manometer: Messung von Druckänderungen oder Druckunterschieden

Hinweis: Die Dichte von Quecksilber (Hg) beträgt

$$\rho = 13{,}6 \cdot 10^3 \, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

a) Berechne, wie groß der Unterschied zwischen **Gas**druck und **Luft**druck ist, wenn h = 37 mm ist.

Luftdruck p_L

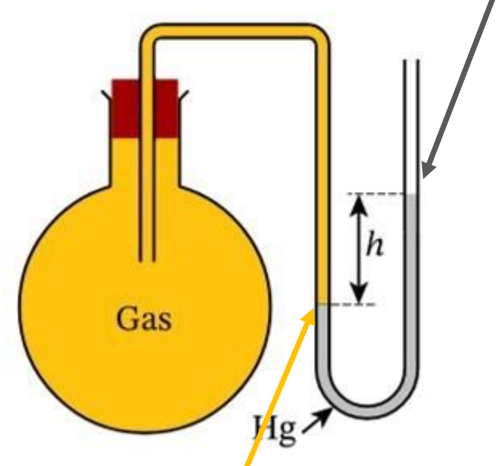


Abb. 3 U-Rohr Manometer

Gasdruck p_{gas}

pixabay license / Ernesto Orihuela via pixabay

https://www.leifiphysik.de/mechanik/druck-und-auftrieb/grundwissen/schweredruck

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Druck, Schweredruck Gase

Der Druck p_{Hg} am Boden (Bezugspunkt) einer Quecksilbersäule der Höhe h beträgt

$$p_{Hg} = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow p_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3 \, \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \, \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}037 \, m = 4{,}9 \cdot 10^3 \, Pa$$

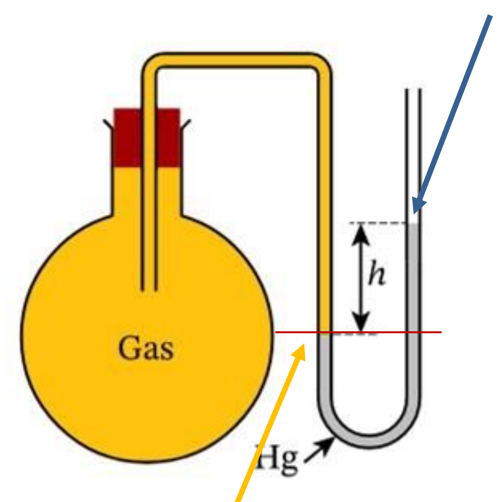


Abb. 3 U-Rohr Manometer

Der **Unterschied** zwischen dem **Gasdruck** und dem **Luftdruck** ist

ρ_{Hg} = 4,9 · 10³ Pa = 4.900 Pa = 49 hPa

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck Gase

b) Berechne, wie groß der **Gasdruck** ist, wenn der Luftdruck p_L = 925 hPa (oft ca. 1.000 hPa) ist.

Hinweis: 1 hPa = 100 Pa
p_{Hg} = 4,9 · 10³ Pa = 4.900 Pa = 49 hPa

<u>Lösung:</u>
Es gilt $p_{Gas} = p_L + p_{Hg}$
da Gasdruck > Luftdruck

Damit folgt

$$p_{\text{Gas}} = 925\,\text{hPa} + 49\,\text{hPa} = 974\,\text{hPa}$$

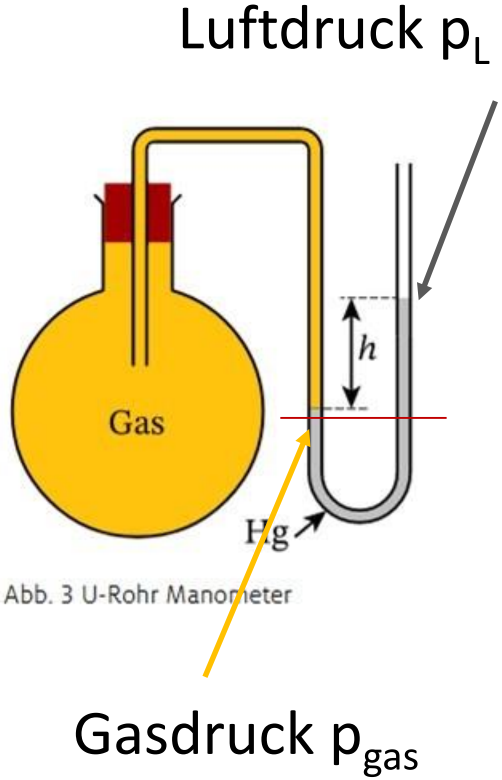


Abb. 3 U-Rohr Manometer

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Auftriebskraft

- Auftriebskräfte wirken auf Körper, die ganz oder teilweise in eine Flüssigkeit eingetaucht sind.
- Ein eingetauchter Körper erfährt einen senkrecht nach oben gerichteten **Auftrieb**.
- Die **Auftriebskraft F_A** entspricht der **Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit**, somit abh. vom **Volumen (nicht von der Masse) des Körpers.**
- Auftrieb ist unabhängig von der Eintauchtiefe.

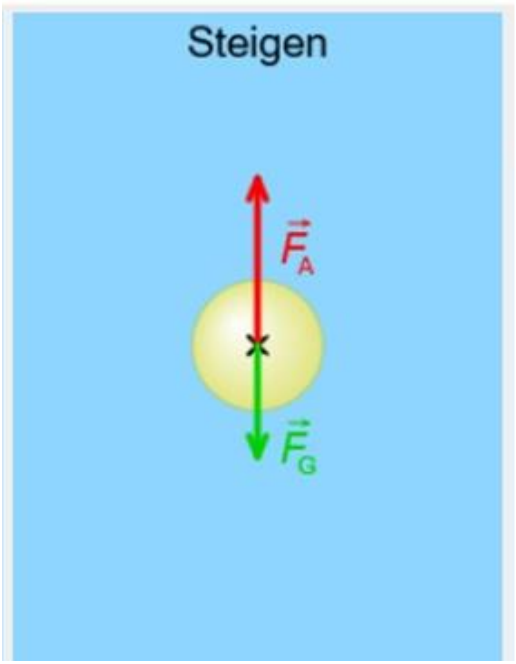
Gesetz des Archimedes

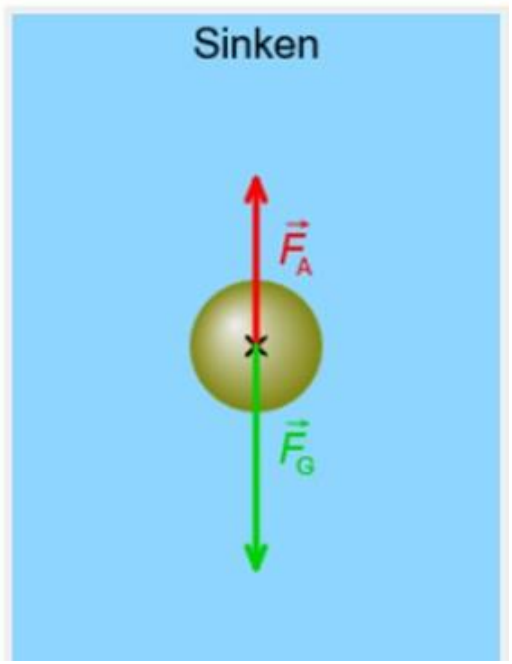
$$F_A = F_{G\ von\ Fluid}$$

$$F_A = m_{von\ Fluid} \cdot g$$

$$F_A = \rho_{Fluid} \cdot V_K \cdot g$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Druck, Schweredruck, Auftriebskraft





$F_A > F_G$

$F_A < F_G$

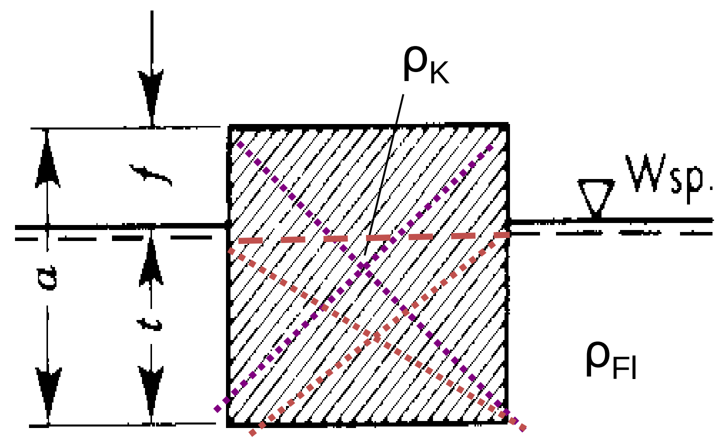
https://www.leifiphysik.de/mechanik/druck-und-auftrieb/aufgabe/schwimmdock

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Druck, Schweredruck, Auftriebskraft

- Bei einem **schwimmenden Körper** ist die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft („$F_A=F_G$“).

- **Begriffe**:
  - Eintauchtiefe t
  - Freibord f (Höhe über Wasserspiegel)



$$t = a \cdot \frac{\rho_K g}{\rho_{Fl} g}$$

$$f = a - t$$

23

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Auftriebskraft

Beispiel:

Eis hat bei 0° die Dichte ρ = 0,9168 kg/l.
Ein **würfelförmiger Eisblock** von der Kantenlänge 10 m schwimmt in Wasser der Dichte ρ = 1 kg/l.

a) Wie viel % schaut heraus?

b) Sinkt der Eisblock in Spiritus (geringere Dichte) oder Zuckerwasser (größere Dichte) tiefer ein?

c) Wenn man den Eisblock komplett unter Wasser taucht und loslässt, mit welcher Kraft wird er nach oben gedrückt? Eine Skizze der Kräfte (Auftrieb und Gewichtskraft) und Überlegungen zu deren Ursache sind hilfreich.

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Auftriebskraft

Lösung:

a) Ansatz Schwimmen: $F_G = F_A$

$m \cdot \cancel{g} = \rho_w \cdot V_{einget} \cdot \cancel{g}$

$\rho_{Eis} \cdot V_{ges} = \rho_w \cdot V_{einget}$

$\rho_{Eis} / \rho_w = V_{einget} / V_{ges}$

0,9168 kg/l / 1 kg/l = 0,91

→ d.h. **91 % des Eisbergs sind unter Wasser**, 9 % über Wasser

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Auftriebskraft

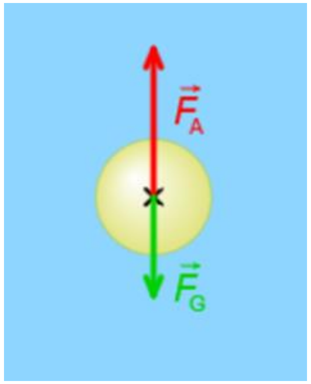
b) Bei **Spiritus (geringere Dichte, Süßwasser)** muss mehr verdrängt werden um die gleiche Masse zu erhalten, also sinkt der Eisblock **tiefer**. Im **Zuckerwasser (höhere Dichte, Salzwasser)** umgekehrt.

c) Wenn der **Eisblock komplett unter Wasser** ist, verdrängt er 1.000.000 l Wasser V_{einget}, die ca. 1.000.000 kg wiegen, er erfährt also eine Auftriebskraft von

$F_A = \rho_w \cdot V_{einget} \cdot g = m \cdot g = 1.000.000 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 9.810.000 \text{ N}.$

$F_{G,Eisblock} = m \cdot g = 916.800 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 8.999.381 \text{ N}$

$F_{ges} = 9.810.000 \text{ N} - 8.999.381 \text{ N} =$ **810.619 N** $= 811 \text{ kN}$



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Die Hydrodynamik ist Teil der Strömungslehre, die sich mit der **Bewegung von Flüssigkeiten** (Hydrodynamik) und **Gasen** (Aerodynamik) beschäftigt.

Zentrale Größen zur **Beschreibung von Strömungen** sind

- die Geschwindigkeit v
- der Druck p
- die Dichte ρ
- die Temperatur T und
- die Viskosität ν

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Kontinuitätsgesetz/ Massenerhaltung

$$\frac{s}{t} = v \qquad m = \rho \cdot s \cdot A$$

Die Größe $\frac{m}{t} = \rho \cdot v \cdot A$ bezeichnet man als Massenstrom.

Bei einer **stationären Strömung** ist wegen der **Massenerhaltung** der Massenstrom an allen Querschnittsflächen konstant.

$$\frac{m}{t} = \rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho \cdot v_2 \cdot A_2$$

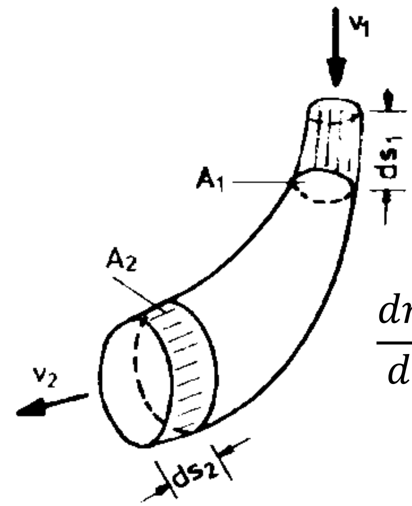
inkompressible Flüssigkeiten: Massenstrom proport. **Volumenstrom Dichte ρ= m/V des Massenstroms jeweils gleich**, gilt:

$$\frac{V}{t} = Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Kontinuitätsgesetz/ Massenerhaltung

$$\frac{V}{t} = Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$



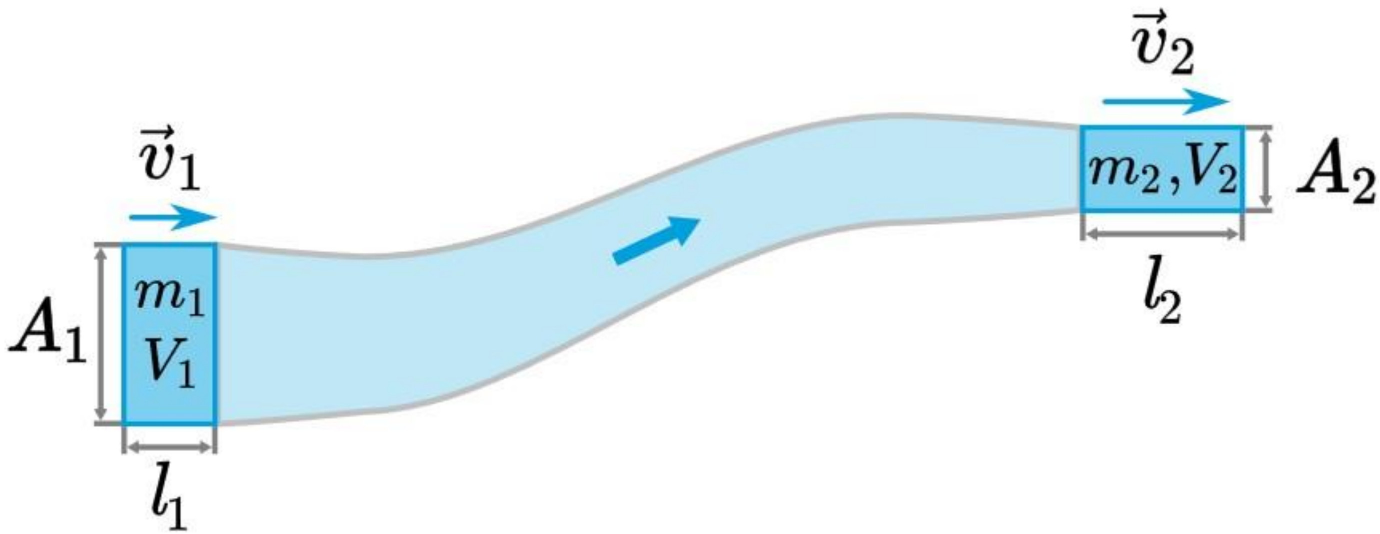
$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot \frac{ds}{dt} \cdot A$$

Abb. 4.2: Stromröhre

- $\mathbf{Q_{zu} = Q_{ab}}$
- Q: Änderung des Volumens über die Zeit = **Volumenstrom**:
  Q = dV/dt = A * v → **Q = v * A**
- Q steht für den **Durchfluss**, je nach „Richtung“ auch für Zu- bzw. Abfluss
- Einheit: z.B. [m^3/s], [l/s], [m^3/h] (Längeneinheit³/Zeiteinheit)

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Massenerhaltung: was rein geht muss auch raus!



$$\frac{m}{t} = \rho \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho \cdot v_2 \cdot A_2$$

$$\frac{V}{t} = Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Energieerhaltung

- Die **Summe** der **Lageenergie (E_L), der kinetischen Energie (E_K)** und der **Druckenergie (also der verrichteten Arbeit E_D)** entlang der Stromröhre bleibt erhalten.

- Die **BERNOULLI-Gleichung** liefert einen Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit v und Druck p. (gilt nur für **stationäre**, **verlustfreie Strömung** eines **inkompressiblen** Fluides)

$$E = \underbrace{E_L}_{\text{Lage-energie}} + \underbrace{E_D}_{\text{Druck-energie}} + \underbrace{E_K}_{\text{Kinetische Energie}}$$

$$= m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot p}{\rho} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Energiegleichung

$$E = E_L + E_D + E_K$$

Lage-energie | Druck-energie | Kinetische Energie

$$konst. = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot p}{\rho} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$konst. = F_G \cdot h + V \cdot p + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

1. Division durch Masse m

$$konst. = g \cdot h + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

2. Multiplikation mit Dichte ρ

$$\boxed{konst. = \rho \cdot g \cdot h + p + \frac{\rho \cdot v^2}{2}}$$

Einheit: Pascal bzw. N/m²

geodätischer Druck | statischer Druck | dynamischer Druck (Staudruck)

→ **Druckgleichung**

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Energiegleichung

$$E = E_L + E_D + E_K$$

Lage-energie — Druck-energie — Kinetische Energie

$$konst. = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot p}{\rho} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$konst. = F_G \cdot h + V \cdot p + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Division durch Masse m · g = F_G

→ **Höhengleichung**

$$\boxed{konst. = \underbrace{h + \frac{p}{\rho \cdot g}}_{\text{Piezometerhöhe (potenzielle Energie)}} + \frac{v^2}{2 \cdot g}}$$

Einheit: Höhe in m

geodätische Höhe — **Druck-höhe** — **Geschwindigkeits-Höhe (kinetische Energie)**

Piezometerhöhe (potenzielle Energie)

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

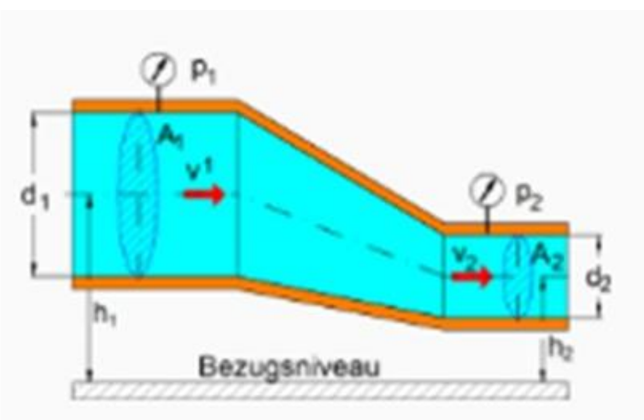
Höhengleichung

$$konst. = h + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

geodätische Höhe | Druck-höhe | Geschwindigkeits-höhe

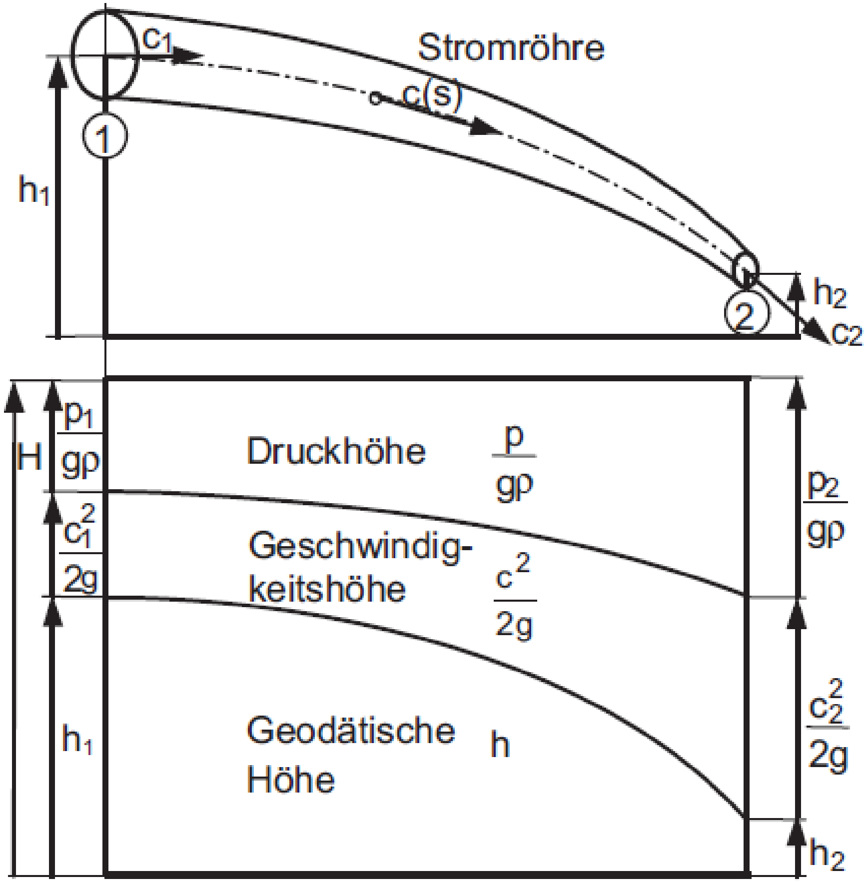
$$h_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{v_1}^2}{2 \cdot g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{v_2}^2}{2 \cdot g}$$

Einheit:
Höhe in m



v = Strömungsgeschwindigkeit (m/s)
g = Fallbeschleunigung (m/s²)
h = geodätische Höhe (m)
p = statischer Druck (Pa)
ρ = Dichte (kg/m³)
Index ₁ bzw. ₂ bezieht sich auf den jeweiligen Ort im System

https://www.schweizer-fn.de/stroemung/bernoulli/bernoulli.php



hier v =c!

Bild 6. Graphische Darstellung der Höhenanteile der Bernoulligleichung

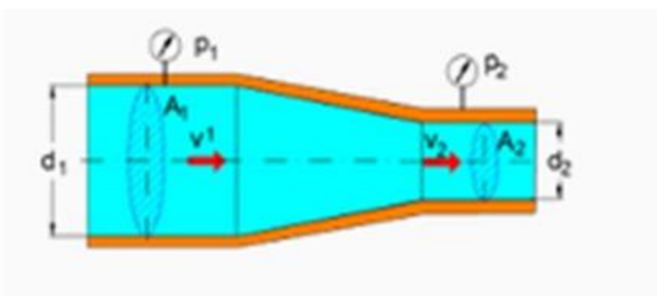
$$\frac{c_1{}^2}{2\,g} + \frac{p_1}{g\,\rho} + h_1 = \frac{c_2{}^2}{2\,g} + \frac{p_2}{g\,\rho} + h_2 \qquad (8)$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

BERNOULLI-Gleichung bei **horizontaler** Rohrströmung

Hier entfällt h, da h sich nicht ändert

$$\cancel{h}_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{v_1}^2}{2 \cdot g} = \cancel{h}_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{v_2}^2}{2 \cdot g}$$



v = Strömungsgeschwindigkeit (m/s)
g = Fallbeschleunigung (m/s²)
p = statischer Druck (Pa)
ρ = Dichte (kg/m³)
Index $_1$ bzw. $_2$ bezieht sich auf den jeweiligen Ort im System

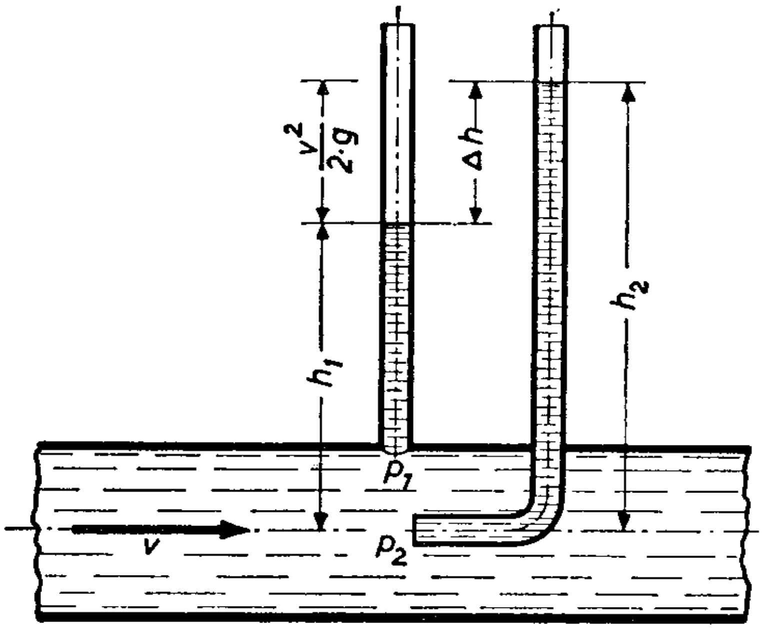
https://www.schweizer-fn.de/stroemung/bernoulli/bernoulli.php

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Durchflussmessung Q [l/s] mit einem Pitotrohr
BERNOULLI-Gleichung (Höhenbezug)

$$\cancel{z}_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{v_1}^2}{2 \cdot g} = \cancel{z}_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{v_2}^2}{2 \cdot g}$$

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{{v_1}^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{{v_2}^2}{2 \cdot g}$$



Durchmesser d

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Durchflussmessung Q in einem Pitotrohr

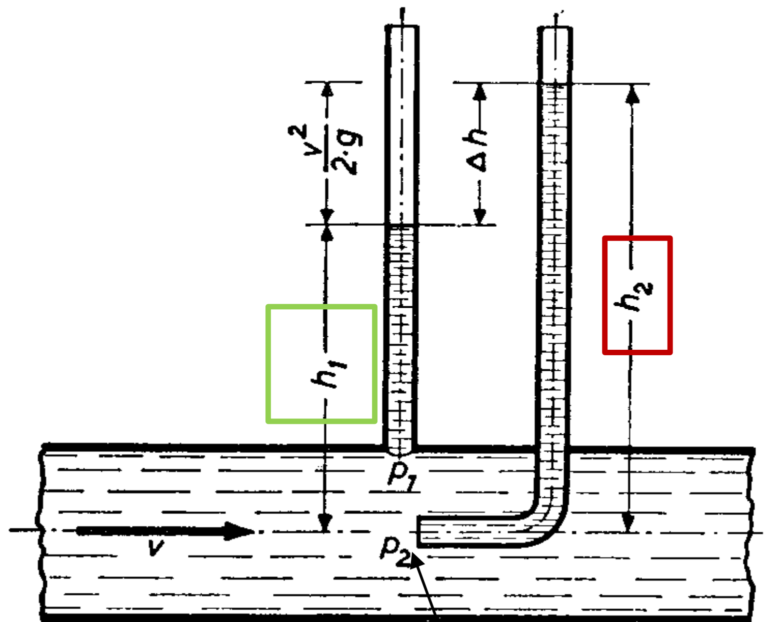
$$\boxed{\frac{p_1}{\rho \cdot g} +} \frac{v_1^{\,2}}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \cancel{\frac{v_2^{\,2}}{2 \cdot g}}$$

$$mit \; \boxed{h_1 = \frac{p_1}{\rho \cdot g}} \; und \; \boxed{h_2 = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^{\,2}}{2 \cdot g}}$$

$$\boxed{h_1} + \frac{v_1^{\,2}}{2 \cdot g} = \boxed{h_2}$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \, (h_2 - h_1)} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

$$Q = v_1 \cdot A = v_1 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$



Durchmesser d

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{v_2^{\,2}}{2 \cdot g}$$

v_2=0, Geschwindigkeitsenergie → Druckenergie (sog. Staudruck) Δh

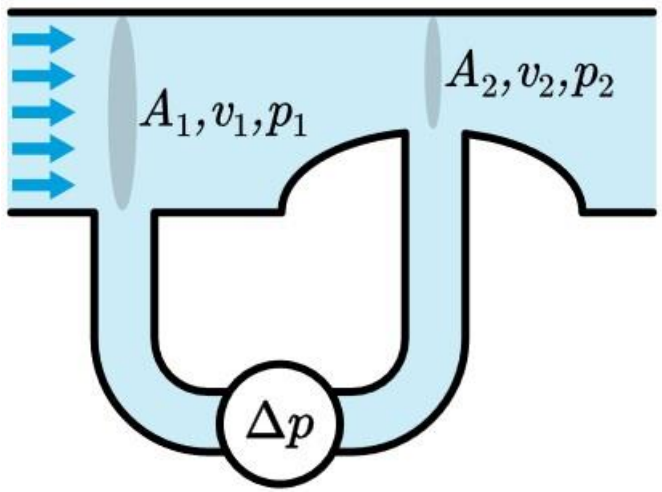
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Anwendung Kontinuitätsgleichung Masseerhaltung und Bernoulli:

VENTURI-Rohr: Gerät zur **Geschwindigkeitsmessung** (italienischer Physiker VENTURI (1746 - 1822)

Auch **Durchflussmesser** basieren auf dem Prinzip des VENTURI-Rohrs, es gibt aber noch zahlreiche andere technische Anwendung, die auf diesem Prinzip basieren.



Quelle: Benedikt Flurl https://www.leifiphysik.de/mechanik/stroemungslehre/ausblick/venturi-rohr

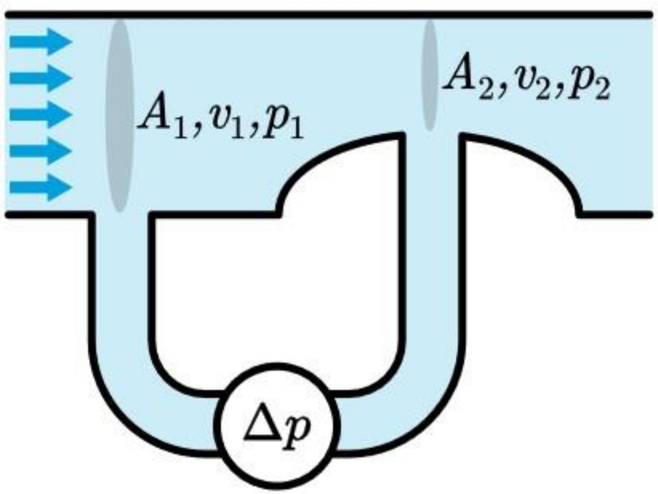
Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Prinzip: Rohr mit einer Engstelle; Druckmesser misst die **Druckdifferenz Δp** zwischen dem Druck p_1 im weiteren Bereich und dem Druck p_2 im engeren Bereich.

Bei bekannter Dichte des Fluids und den Querschnittsflächen A_1 und A_2 kann man die Strömungsgeschwindigkeit v_1 berechnen.

Kontinuitätsgleichung (Masseerhaltung) für inkompressible Fluide

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \Leftrightarrow \boxed{v_2} = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 \quad (1)$$



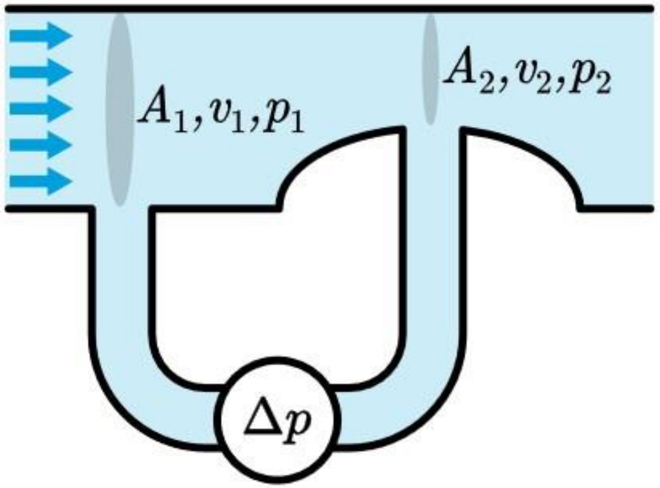
Quelle: Benedikt Flurl
https://www.leifiphysik.de/mechanik/stroemung

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Die **BERNOULLI-Gleichung (Druckbezug)** für das VENTURI-Rohr lautet:

$$konst. = \cancel{\rho \cdot g \cdot h} + p + \frac{\rho \cdot v^2}{2}$$



Druck aus **Lageenergie** (geodätischer Druck) ($\rho \cdot g \cdot h$) gleich auf beiden Seiten (gleiche Bezugsebene) → Wegstreichen

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \boxed{v_2^2} + p_2 \qquad (2)$$

Term für $\boxed{v_2}$ von Gleichung (1) in Gleichung (2) einsetzen und auflösen nach v_1.

Quelle: Benedikt Flurl
https://www.leifiphysik.de/mechanik/stroemungslehre/ausblick/venturi-rohr

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

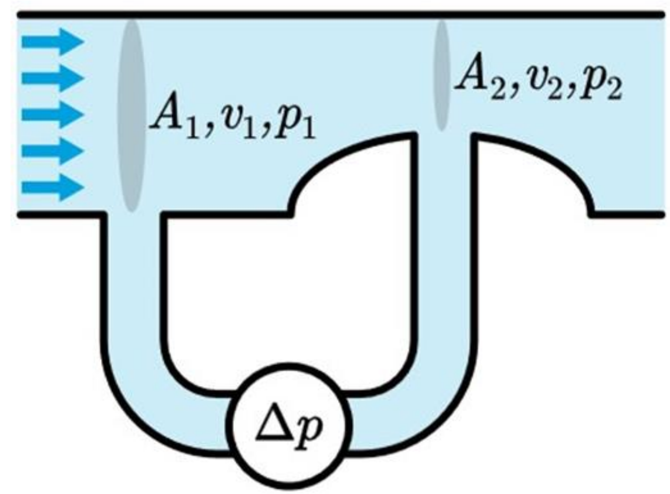
$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 \right)^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \cdot v_1^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_1 - p_2 := \Delta p$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) \cdot v_1^2 = \Delta p$$

$$v_1^2 = \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}$$



Geschwindigkeit

aus Messung Druckdifferenz und Flächenverhältnisse

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}}$$

Durchfluss

$$Q = v_1 \cdot A$$

Quelle: Benedikt Flurl
https://www.leifiphysik.de/mechanik/stroemung

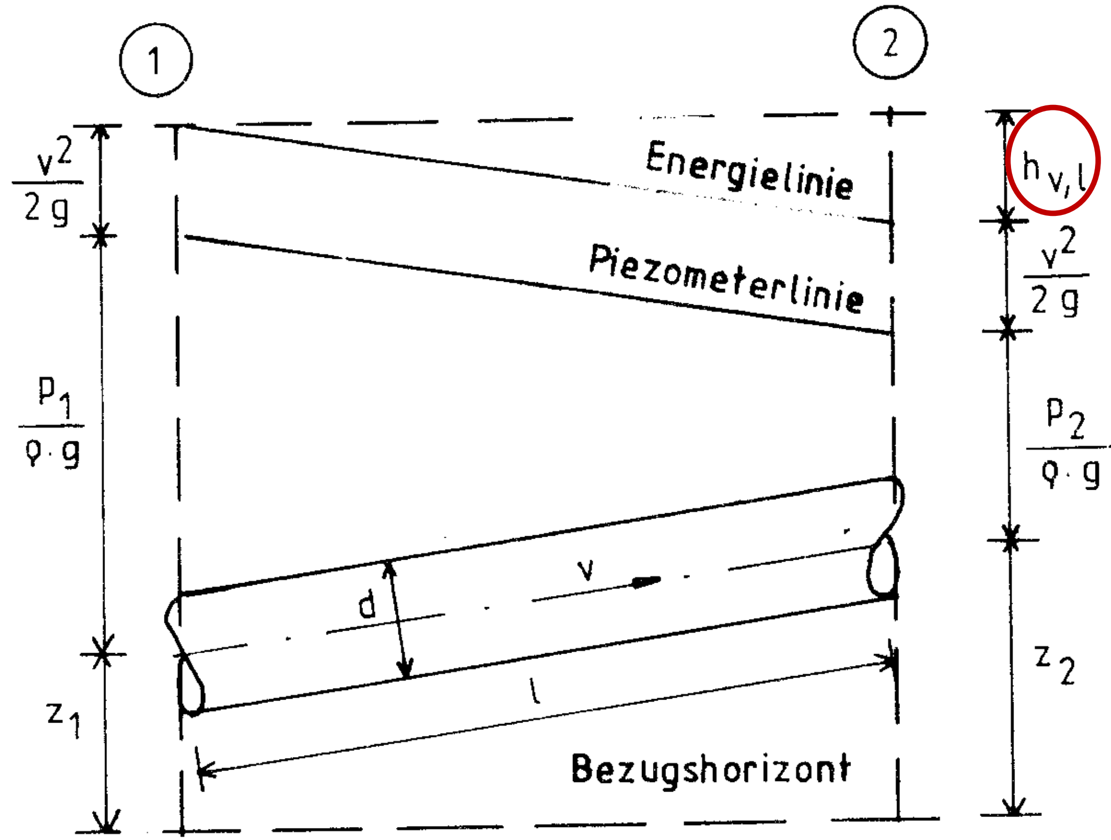
Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Durch **Reibung** und Widerstände im Rohrsystem wird Energie in Wärme umgewandelt (geht dem System verloren).

→ **hydraulische kontinuierliche Verluste.**

Diese Anteile werden mit $\mathbf{h_v}$ beschrieben.



$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^{\;2}}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^{\;2}}{2g} + h_V$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Kontinuierliche Verluste in Rohrleitungen sind:

- proportional zur **Leitungslänge L** (längere Leitung, höhere Verluste)
- umgek. prop. zum **Rohrdurchmesser d** (höherer Rohrdurchmesser, weniger Reibung/Verluste)
- proportional zum Quadrat der **Fließgeschwindigkeit v²** (höhere Geschwindigkeit, mehr Bewegung, mehr Wärme)

- abhängig von der **Viskosität ν**
- abhängig vom **Fließzustand** (Turbulenz, Reynoldszahl Re= v * d/ ν)
- abhängig von der **Beschaffenheit der Rohrinnenwandung** (k/d)

Reibungsbei-wert: **λ [-] (lambda)**

$$h_{V,r} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$ **Darcy-Weißbach**

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Örtliche Verluste

Verluste proportional zum **Geschwindigkeitsquadrat** ($\Delta H \sim v^2$)

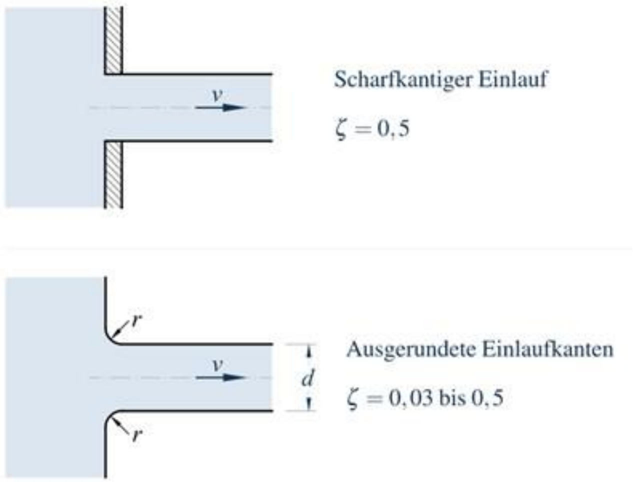
→ analog zu Energie**höhen** und kontinuierlichen Verlusten Angabe als Verlust**höhen** ΔH ($=h_{v,ö}$)

→ Verlustbeiwerte (ζ-Werte) **empirisch ermittelt,** Messreihen im Labor

→ Örtliche Verluste bei Querschnittserweiterung/-verengung, Krümmern, Armaturen, Absperrorganen, Drosseln, Rohrverzweigungen und –vereinigungen ….

$$h_{v,ö} = \Delta H = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$$

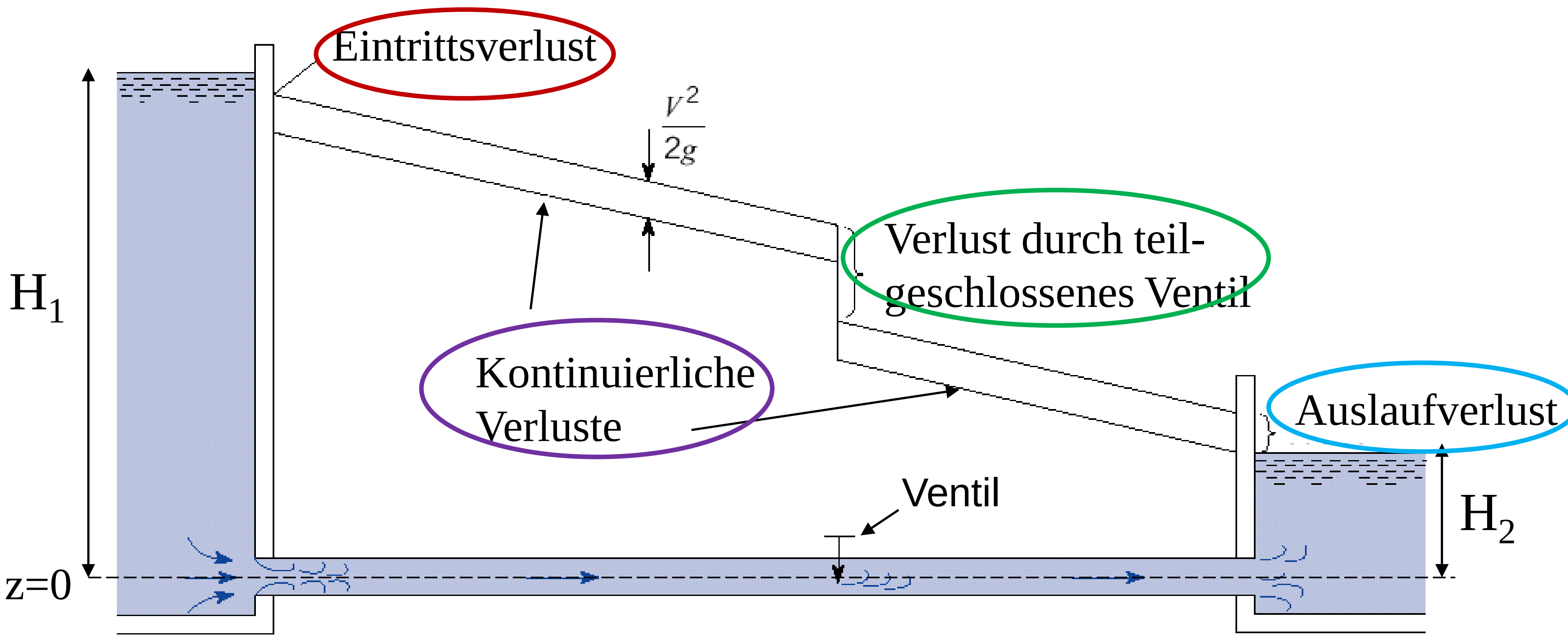
Verlustbeiwert zeta



[DWA A110]

Naturwissenschaftliche Grundlagen

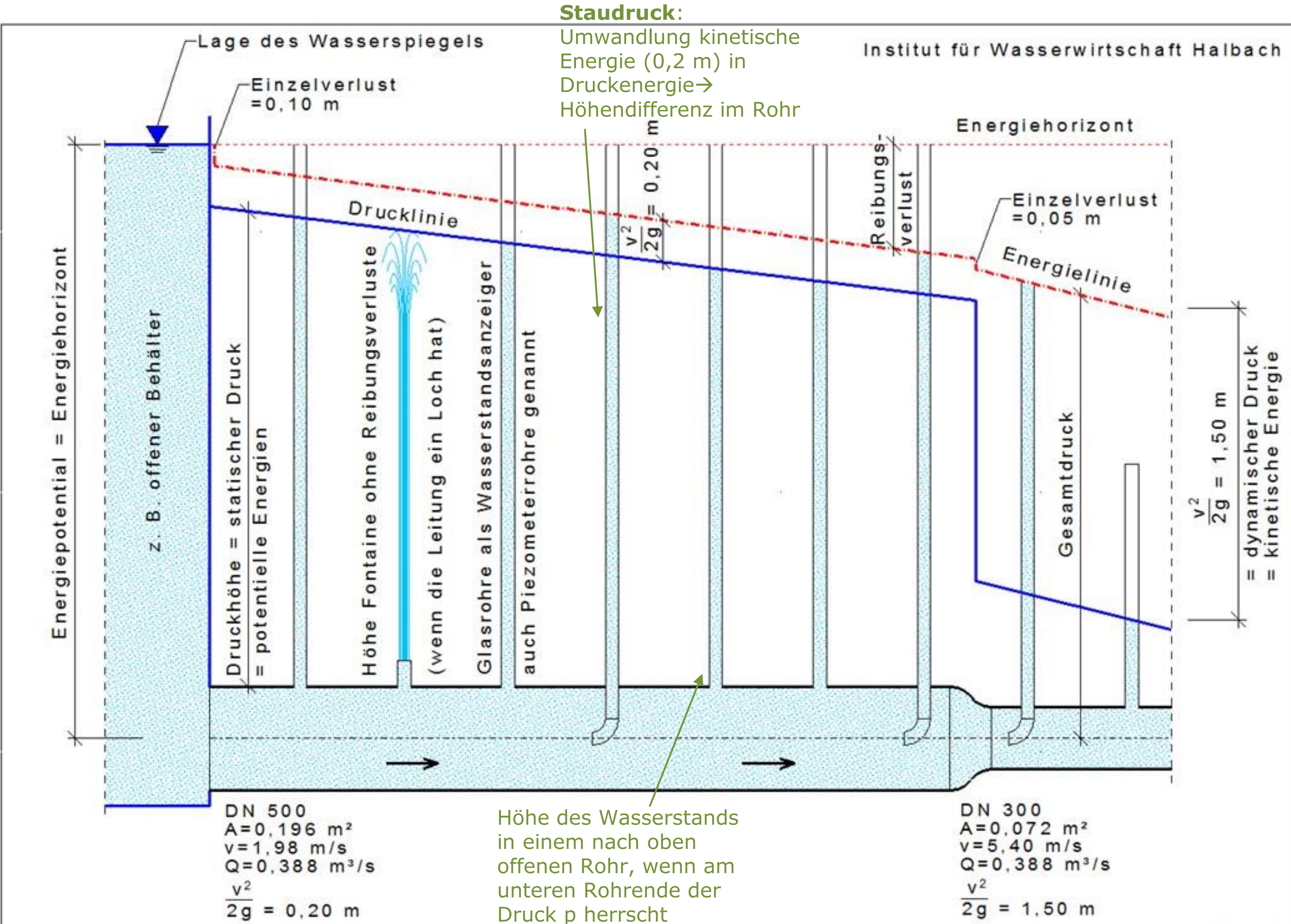
Hydrodynamik



(„Bernoulli“:) $$H_1 - \Delta H_{ver} - \Delta H_{Ventil} - \Delta H_{erw} - \Delta H_{kontinuierlich} = H_2$$

51

Druckverhältnisse durchströmtes Rohr mit Querschnittsreduzierung



https://www.institut-halbach.de/2019/03/ueberflutungsnachweis-und

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Verständnis der Druck- und Energielinie in einem hydraulischen Längsschnitt:

- Die Energieformen bei hydraulischen Betrachtungen werden in **[m Wassersäule; m WS]** berechnet, da diese Ergebnisse dann keiner weiteren Umrechnung bedürfen und weil die Wasserstände sofort ablesbar sind.

- Die **potentielle Energie**, auch Lageenergie genannt, entspricht der Lage des Wasserspiegels, den dieser z.B. in Glasrohren einnehmen würde, wenn die Rohrleitung Löcher hätte und in diesen Glasröhren (ohne Bogen) stecken würden.

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

- Die Verbindung der Wasserspiegel in den Glasrohren wird auch **Drucklinie** genannt. Bis zu dieser Drucklinie hoch würde auch das Wasser aus einer senkrechten Undichtigkeit wie eine Fontäne spritzen.
- Werden nun die Piezometerrohre etwas in die Rohrleitung hineingeführt und so abgewinkelt, dass ihre Öffnung von dem Wasser gerade angeströmt wird (**Pitotrohr**), so steigt der Wasserspiegel – sofern das Wasser fließt – über den Wasserspiegel der Drucklinie um die sogenannte **Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$.**
- Über der Drucklinie liegt also im Abstand der **Geschwindigkeitshöhe** die Energielinie.

https://www.institut-halbach.de/2019/03/ueberflutungsnachweis-und-rohrhydraulik/

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

- Die **Höhe der Energielinie** an einem bestimmten Leitungsabschnitt entspricht der an diesem Punkt noch vorhandenen **Gesamtenergie**.

- Nimmt die **Geschwindigkeit** z.B. wegen einer Reduzierung oder einer **Einengung** zu, dann steigt die **Geschwindigkeitshöhe** und die **Drucklinie** senkt sich um dieses Maß.

- **Reibungsverluste** verringern die Druck- und Energielinie **kontinuierlich**

- **örtliche Verluste** entstehen z.B. bei Querschnittsveränderungen oder Einbauten (Ventile, Klappen usw.) Je höher die Geschwindigkeit, desto höher die Reibungsverluste.

https://www.institut-halbach.de/2019/03/ueberflutungsnachweis-und-rohrhydraulik/

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Gauckler-Manning-Strickler (GMS) Formel:

- **offene Gerinne** mit Freispiegelabfluss (Kanalisation und Fließgewässer) im Unterschied zu Druckabfluss (TW-Leitungen)
- Die Formeln hängen vom **hydraulischen Radius R** und dem **Fließgefälle I** des Wasserspiegels ab und berücksichtigen sämtliche **Fließwiderstände** in Form empirischer **Beiwerte** $\mathbf{k_{st}}$.
- Der meist zu berechnende **Abfluss Q** ergibt sich dann durch Multiplikation der gefundenen mittleren **Fließgeschwindigkeit** $\mathbf{v_m}$ mit der **Querschnittsfläche A**

$$Q\ [m^3/s] = v_m\ [m/s] \cdot A\ [m^2]$$

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Fließformel nach Gauckler-Manning-Strickler (GMS)
gilt für die üblichen Verhältnisse in **offenen Fließgewässern** und **offenen Kanalgerinnen** mit guter Genauigkeit

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{m}} &= k_{\mathrm{st}} \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \\ &= k_{\mathrm{st}} \cdot \sqrt[3]{R^2} \cdot \sqrt{I} \end{aligned}$$

mit dem Rauheitsbeiwert nach Strickler k_{st} in $\mathrm{m}^{1/3}/\mathrm{s}$ für die Gerinnerauheit

v: Fließgeschwindigkeit in [m/s]
I: Gefälle in [m/m]
R: hydraulischer Radius in [m]

https://www.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Flie%C3%9Fformel

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Rauheitsbeiwert nach Strickler

- Strickler-Beiwert k_{St} [$m^{1/3}/s$]: in Abhängigkeit von der **Oberflächenbeschaffenheit, Bewuchs und Querschnittsform** zu wählen.

- Der Strickler-Beiwert wurde von Strickler sowohl im Labor als auch in der Natur **experimentell** bestimmt.

- **ungewöhnliche Einheit** hat keine physikalische Bedeutung, sondern wurde so festgelegt, dass die Gleichung dimensionsecht ist.

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Rauheitsbeiwerte nach Strickler

Typische Flussbett-Werte:

Oberfläche	k_{st} in $m^{1/3}/s$
Glatter Beton	100
Gerades Fließgewässer	30–40
Mäandrierendes Flussbett mit Bodenbewuchs	20–30
Wildbach mit Geröll	10–20
Wildbach mit Unterholz	<10

https://www.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Flie%C3%9Fformel

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Rauheitsbeiwerte nach Strickler

Tabelle : Empfohlene Rauhigkeitsbeiwerte k_{ST}

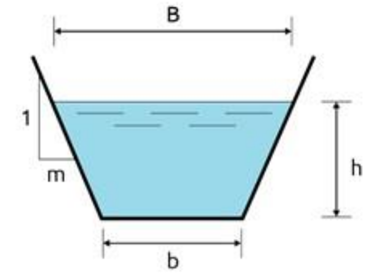
Gerinnetyp	Wandbeschaffenheit	k_{ST}
Gemauerter Kanal	Haussteinquader	70 - 80
	normales Bruchsteinmauerwerk	60
	grob behauene Steine	50
	gepflasterte Böschung, natürliche Sohle	45 - 50
Betonkanal	Zementglattstrich	100
	alter Beton, saubere Flächen	60
	unregelmäßige Betonflächen	50
Erdkanal	festes Material, glatt	60
	Rasen	25
	Sand, Lehm oder Kies; stark bewachsen	20 - 25

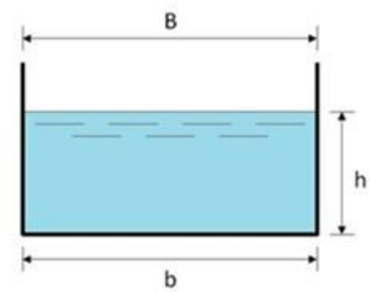
Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

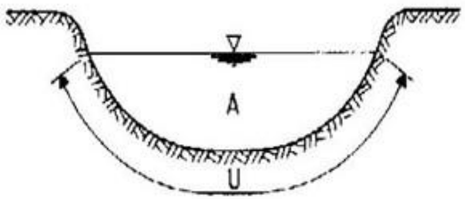
hydraulischer Radius in [m]

$$R\ [m] = \frac{A\ [m^2]}{U\ [m]}$$

Quotient aus **Durchflussquerschnitt A** und **benetztem Umfang U** einer Flüssigkeitsleitung.







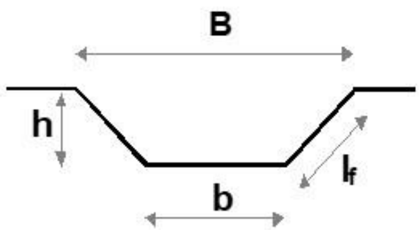
R-Rechner im Internet:
https://www.peacesoftware.de/einigewerte/gerinnehydraulik.html

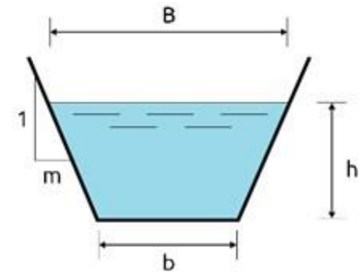
Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Technische Gerinne:

- **Trapez**

Breite B	$b + 2 \cdot mh$
Mittlere Wassertiefe	$\frac{(b+mh)h}{b + 2 \cdot mh}$
Querschnittsfläche A	$(b+mh) \cdot h$
benetzter Umfang P	$b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1+m^2}$
Hydraulischer Radius r_h	$\frac{(b+mh) \cdot h}{b + 2h \cdot \sqrt{1+m^2}}$



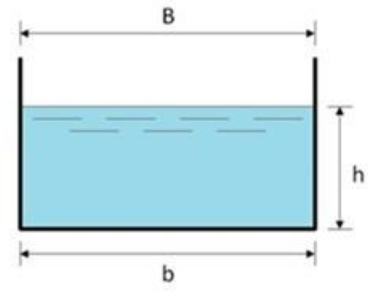


[Beton Tille, NIVUS]

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Technische Gerinne

- **Rechteck**



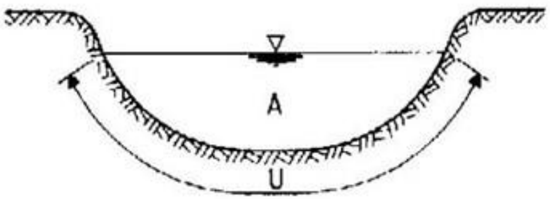
Breite B	b
Mittlere Wassertiefe	h
Querschnittsfläche A	$b \cdot h$
benetzter Umfang P	$b + 2h$
Hydraulischer Radius r_h	$\dfrac{bh}{b+2h}$

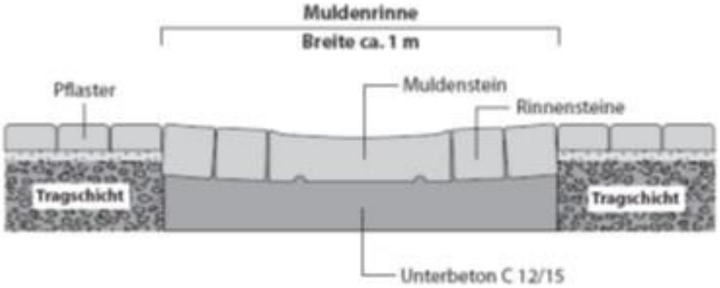
[Beton Tille]

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Technische Gerinne

- **Halbschale**



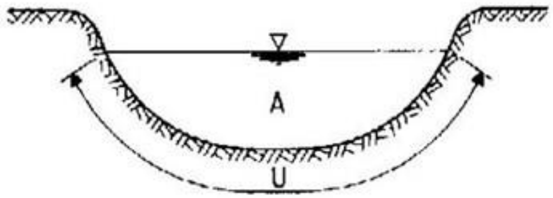


[Jirka und Lang, 2004; Fa. ACO; Fa. Kahn]

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Natürliche Gerinne

- Halbschale
- Verbundprofile



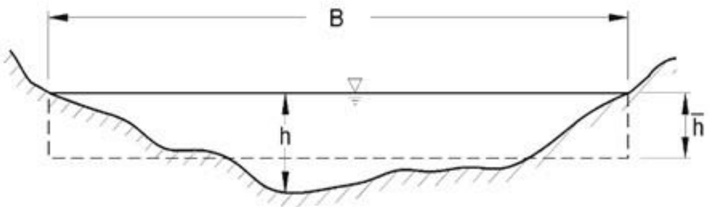


Abb. 1.5.: Natürliches Flussprofil

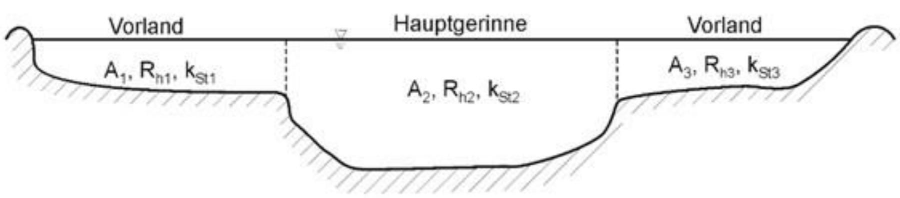


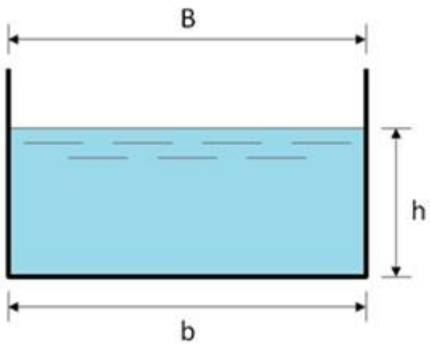
Abb. 2.11.: Berechnung von Gerinneabfluss bei Verbundprofilen

[Jirka und Lang, 2004; ACO]

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Schätzen Sie die **Fließgeschwindigkeit** des Rheins in Stundenkilometer [km/h] ab, der 300 km von Köln (50 m üNN) bis zur Mündung (0 m üNN) fließt. Die Breite b beträgt im Mittel 350 m, die Wassertiefe h = 8 m.

I = 50 m/300.000 m = 0,000167



A = 350 m * 8 m = 2.800 m²
U = 2 * 8 m + 350 m = 366 m
R = 2.800 m²/388 m = 7,65 m

k_{St} = ca. 30 $m^{1/3}/s$

$$v_m = k_{st} \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$ = 30 · 7,65 $^{2/3}$ · 0,000167 ^{½} = 1,5 m/s = **5,4 km/h**

https://www.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Flie%C3%9Fformel

Naturwissenschaftliche Grundlagen
Hydrodynamik

Berechnung Kanalgerinne

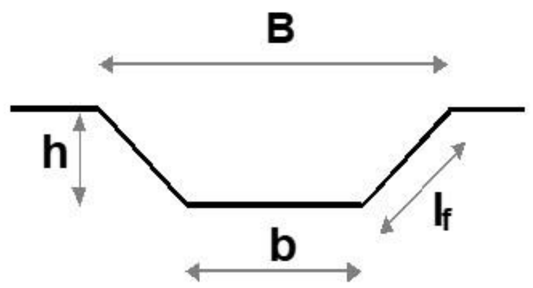
A_u = 0,8 [ha]

$r_{0,2(10)}$ = 178,4 [l/s ha] aus KOSTRA

k_{St} = 50 [$m^{1/3}/s$]

Gefälle J = 4 %

Zu wählen: Gerinneform (Trapez)



Iterativer Berechnungsgang

$Q = v * A$

$Q_{Rinne} = k_{ST} \cdot J^{1/2} * R^{2/3} * A > Q_r = r_{n(D)} * A_u$

1. maßgebender Regenwasserabfluss Q_r
2. Profil & Abmessungen wählen
3. Abflusskapazität Gerinne Q_{Rinne} bestimmen

[Beton Tille, NIVUS]

Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik

Bemessung offenes Trapezprofil

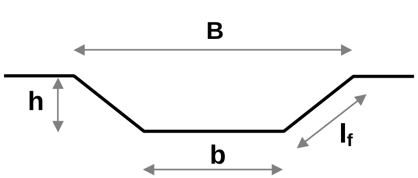
(1) Bemessungsabfluss

abflusswirksame Fläche	A_u	=	**0,8**	ha
Regendauer	D	=	**10**	min
Regenhäufigkeit	n	=	**0,2**	a^{-1}
Regenspende	$r_{D(n)}$	=	**178,4**	l/(s·ha)
Bemessungsabfluss	$\mathbf{Q_R}$	**=**	**143**	**l/s**

(2) Festlegung des Profils

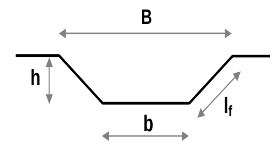
Trapezquerschnitt

- Breite	b	=	**0,4**	m
- Seitenlänge	l_f	=	**0,2**	m
- Höhe	h	=	**0,15**	m
- Rauhigkeit	k_{ST}	=	**50**	$m^{1/3}/s$
- Gefälle	J	=	**4**	%



Naturwissenschaftliche Grundlagen

Hydrodynamik



(3) Kennwerte Absflussquerschnitt

obere Breite	B	=	$b + 2 \cdot (l_f^2 - h^2)^{1/2}$	=	**0,66**	m
Querschnittsfläche	A	=	$0{,}5 \cdot (B + b) \cdot h$	=	**0,080**	m²
benetzter Umfang	U	=	$b + 2 \cdot l_f$	=	**0,80**	m
hydraulischer Radius	R	=	A/U	=	**0,1**	m

(4) Abflusskapazität Rinne

Fließgeschwindigkeit	v	=	$k_{ST} \cdot J^{1/2} \cdot R^{2/3}$	=	**2,15**	m/s
Ableitungskapazität	Q_{ab}	=	$v \cdot A$	=	**0,172**	m³/s
				=	**172**	l/s

Bemessungsabfluss Q_R = 143 l/s **172 l/s**

→ Abflusskapazität ausreichend