Studiengang Mechatronik

Modul 16:

FEM – Finite Elemente Methode

- 2. Vorlesung -

Prof. Dr. Enno Wagner

31. Oktober 2024

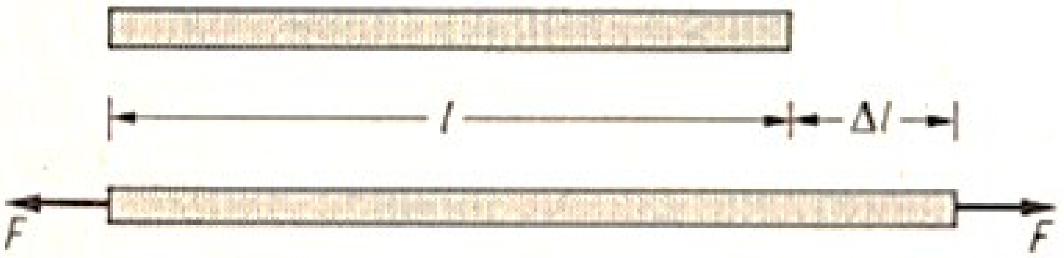
Agenda heute

Übersicht

- Grundlagen TM2 / Elastostatik
  - Dehnung
  - Stoffgesetz
- Beispiel: Kräfte im Stab mit 2 Querschnitten
  - Vorgehen in 11 Schritten

Dehnung

Verformung eines elastischen Stabes der Länge *l*



Gilt nur für konstante Querschnittsfläche !

Verlängerung Δl als Maß für die Größe der Verformung führt man in der Technik außerdem das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge ein:

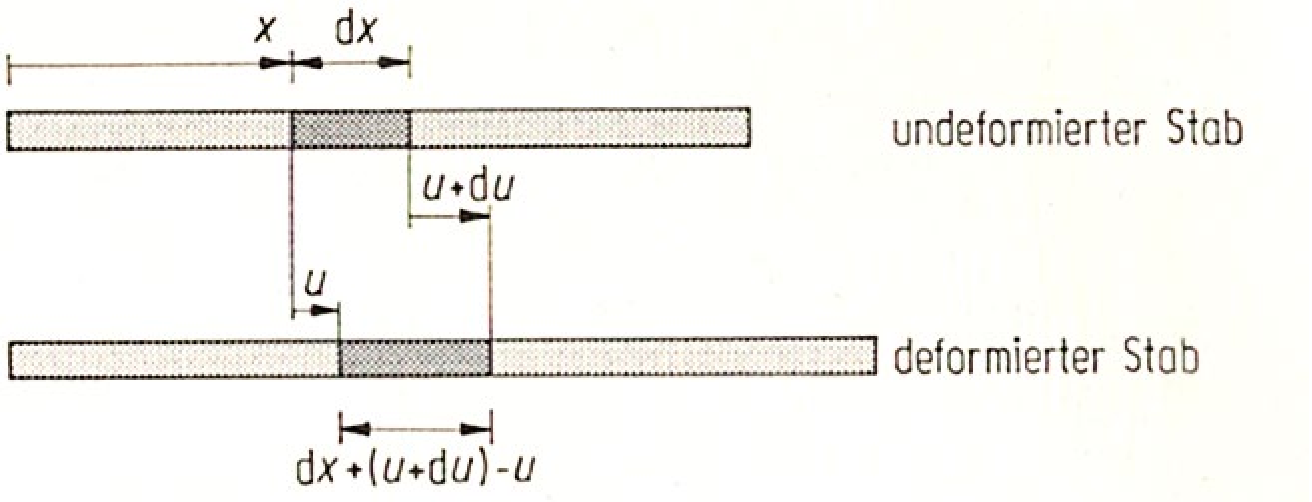
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}\,.}$$

Dehnung ε (dimensionslos)

Quelle:
Schnell, Gross, Hauger: TM2 - Elastostatik

Örtliche Dehnung

Örtliche Dehnung mit Stabelement *dx*



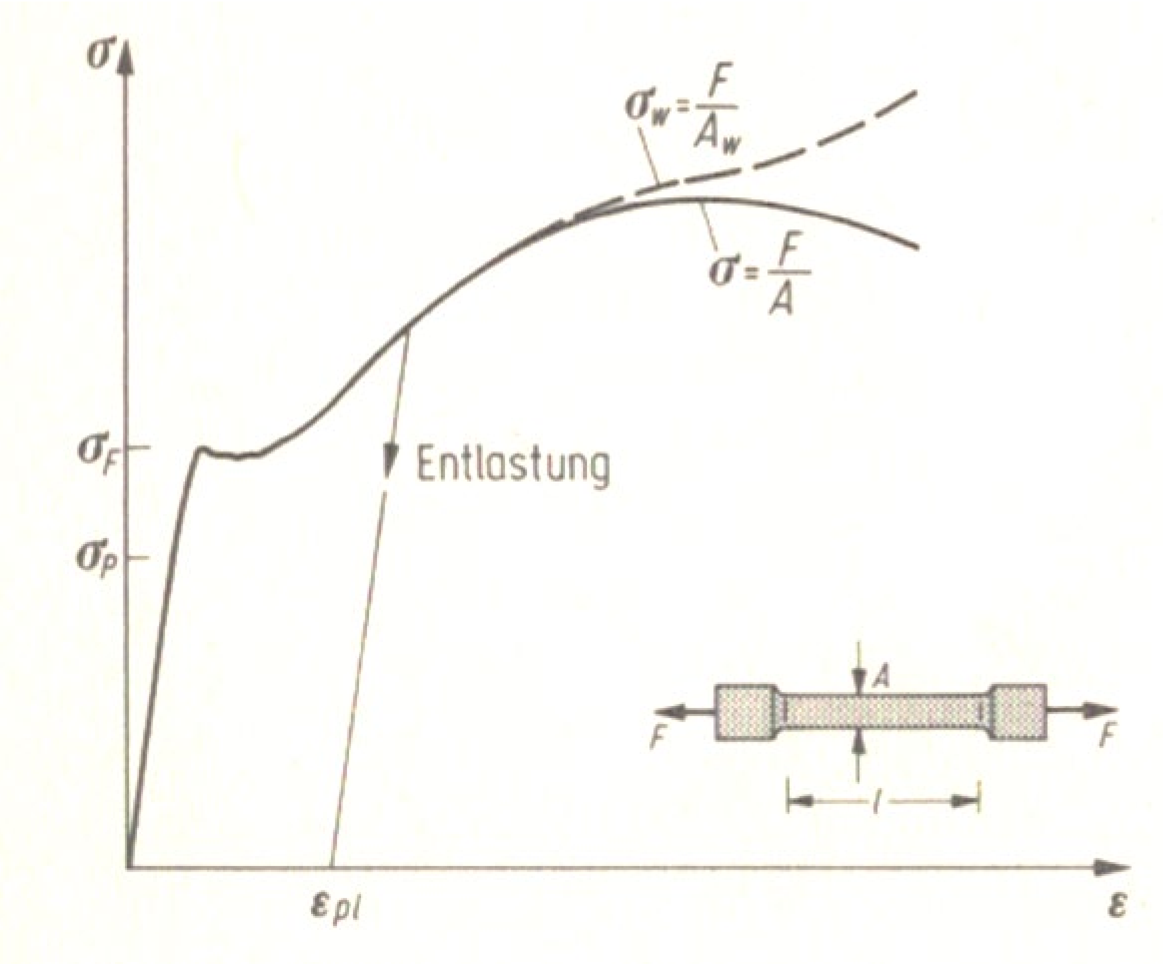
Dehnung ε als Funktion des Ortes x
=> Auf gültig für veränderliche Querschnitte

$$\boxed{\epsilon(x) = \frac{du}{dx}}$$

Verschiebung u und Dehnung ε sind kinematische Größen.
Sie lassen sich durch differenzieren oder integrieren ermitteln

<u>Quelle:</u>
Schnell, Gross, Hauger: TM2 - Elastostatik

Spannung-Dehnungs-Diagramm



- Genormter Zugversuch zur Ermittlung von Werkstoffkennwerten
  - R_m (Zugfestigkeit)
  - R_e, R_p, $R_{p0,2}$ (Streckgrenze)
- Linearelastischer Bereich bis zur Fließspannung σ_F (Streckgrenze)
- Danach bleibende Verformung
- σ_W auf wirkliche Querschnittsfläche *Aw* bezogene Spannnung σ ist normiert auf *A*

<u>Quelle:</u>
Schnell, Gross, Hauger: TM2 - Elastostatik

Elastizitätsmodul

Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang

- Linear-elastischer Bereich
- Proportionalitätsfaktor E => Elastizitätsmodul
- Hookesche Gesetz (Hooke, 1635 – 1703),
- Spannungsbegriff erst 1822 durch Cauchy (1789 – 1857)

$$\boxed{\sigma = E\,\varepsilon}$$

Tabelle 1.1. Werkstoffkennwerte

Material	E in N/mm²	α_T in 1/°C
Stahl	$2{,}1 \cdot 10^5$	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	$0{,}7 \cdot 10^5$	$2{,}3 \cdot 10^{-5}$
Beton	$0{,}3 \cdot 10^5$	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$
Holz (in Faserrichtung)	$0{,}7 \ldots 1{,}6 \cdot 10^5$	$2{,}2 \ldots 3{,}1 \cdot 10^{-5}$
Gußeisen	$1{,}0 \cdot 10^5$	$0{,}9 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	$1{,}2 \cdot 10^5$	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$
Messing	$1{,}0 \cdot 10^5$	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$

Quelle:
Schnell, Gross, Hauger:
TM2 - Elastostatik

Grundgleichungen

Spannung: $\sigma(x) = \dfrac{F(x)}{A(x)}$

Werkstoff (Dehnung): $\varepsilon(x) = \dfrac{\sigma(x)}{E(x)} \Rightarrow \sigma(x) = \varepsilon(x) * E(x)$

Geometrie (Verschiebungsbeziehung): $\varepsilon(x) = \dfrac{du}{dx} \Rightarrow du = \varepsilon(x) * dx$

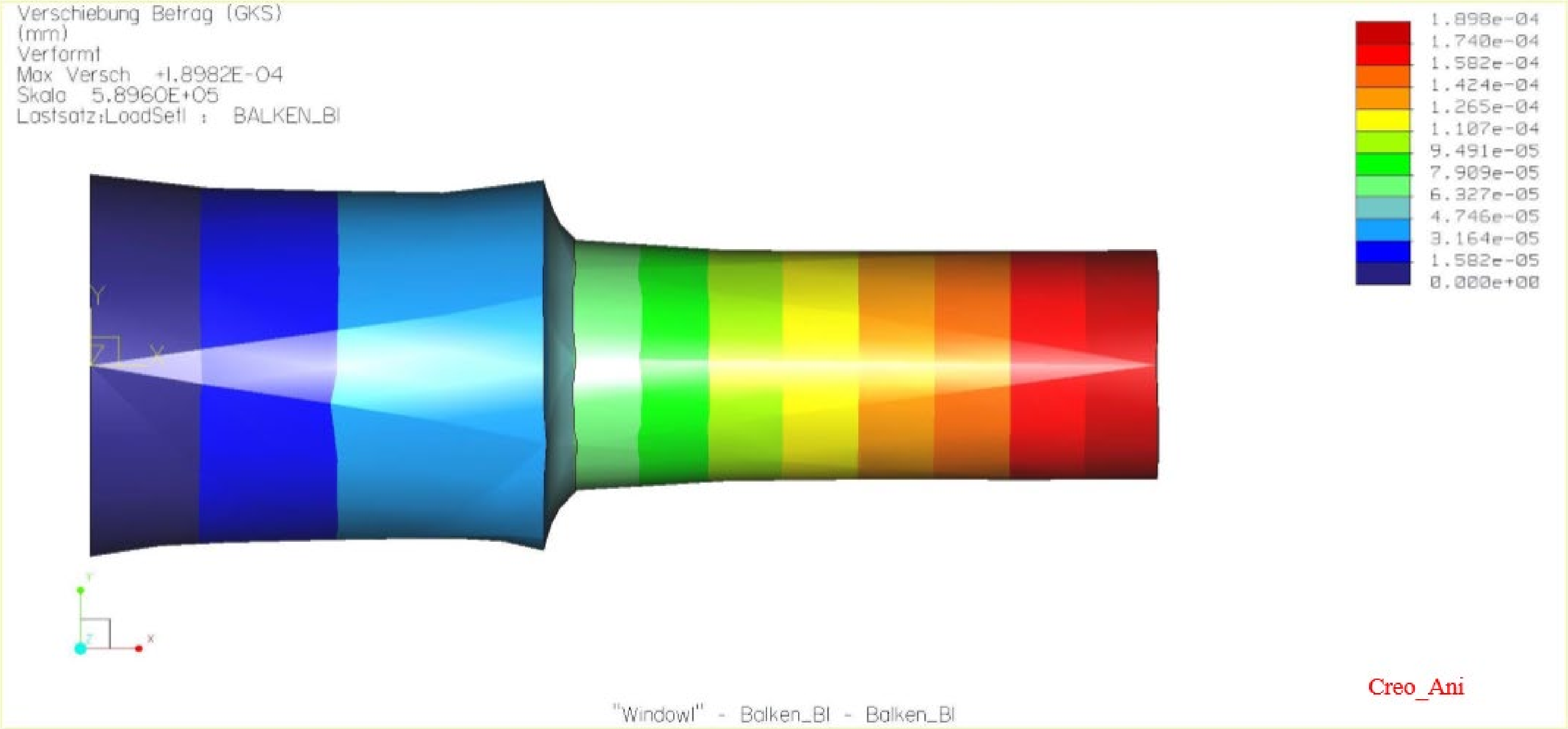
Differentialgleichung (DGL) $u'(x) = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{\sigma(x)}{E(x)} = \dfrac{F(x)}{A(x) * E(x)}$

Bestimmung der Verformung $u(x) = \displaystyle\int_0^l \frac{F(x)}{A(x) * E(x)}\, dx$

Für F, A, E konstant → $u = \dfrac{F\,l}{AE}$

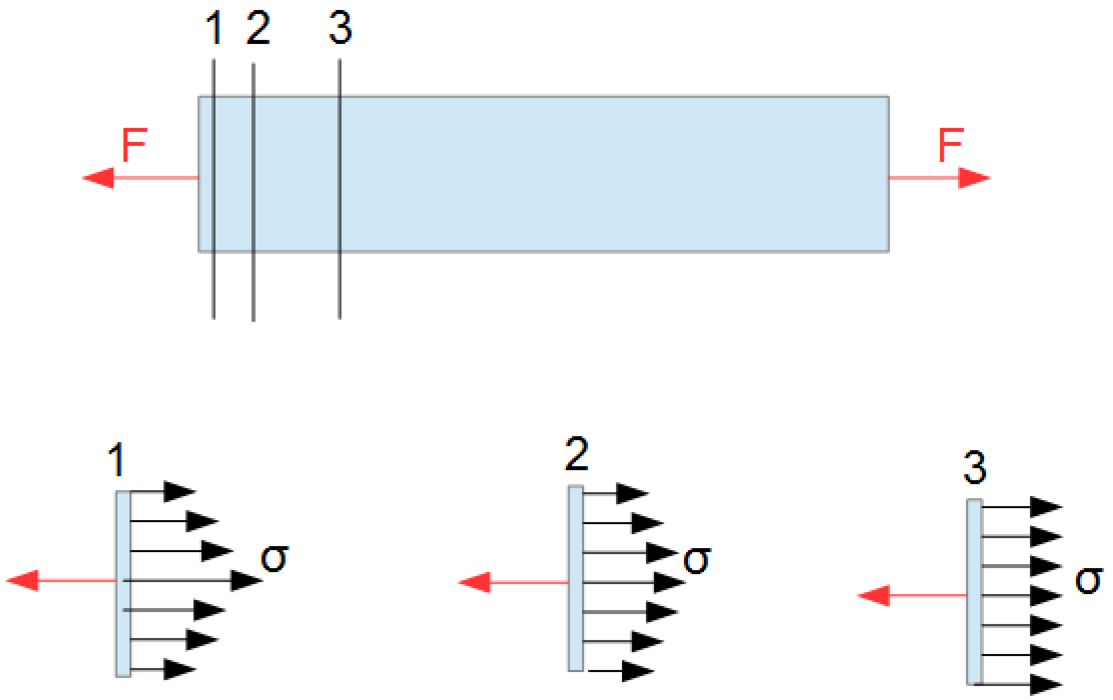
Berechnungsweg in FEM

FEM Simulation



Prinzip von Vernant

- Lasteinleitungsstelle
  => komplizierte Spannungszustände
- Bei hinreichender Entfernung
  => Störungen abgeklungen

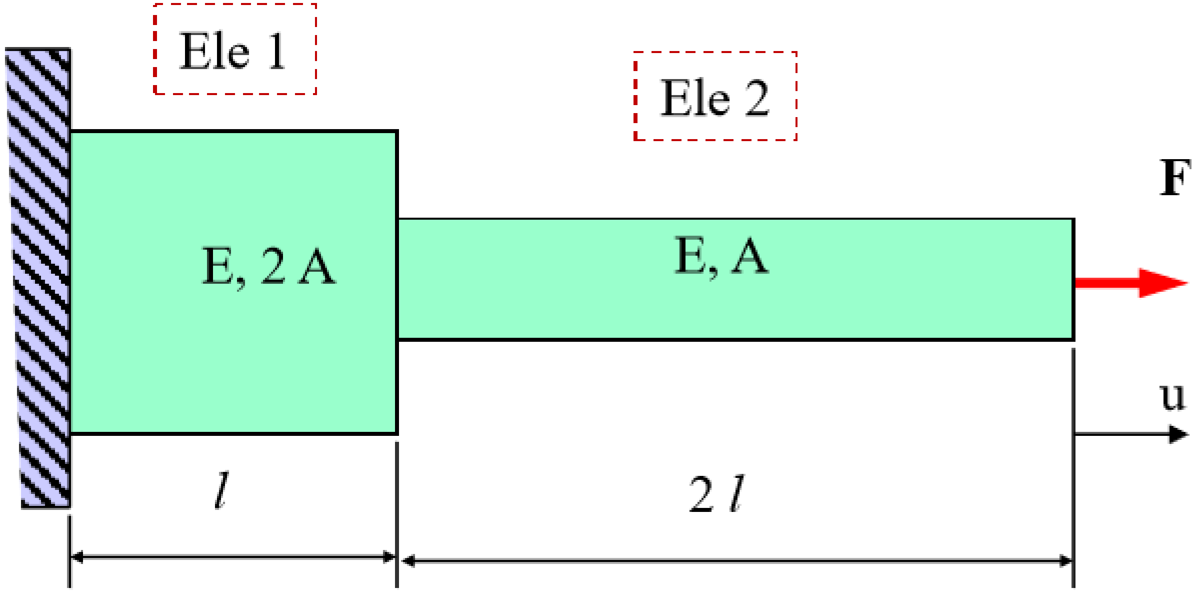


<u>Quelle</u>: www.ingenieurkurse.de

1. Beispiel:

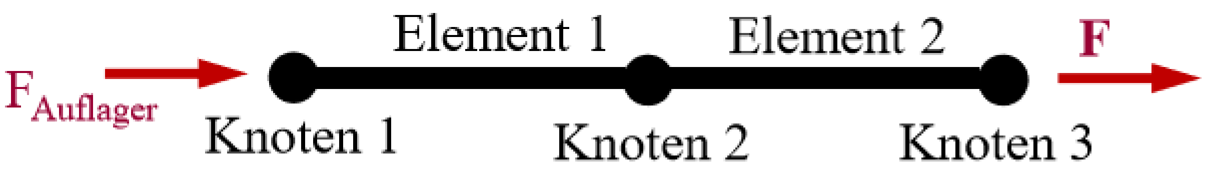
Stab mit 2 unterschiedlichen Querschnitte wird auf Zug belastet.

Geg.: Balken (mit E, A, L), einseitig eingespannt auf Zug belastet mit der Kraft F, $F_{Gewicht} << F$
Ges.: Verschiebung u am Kraftangriffspunkt, Auflagerkraft $F_{Auflager}$



1. Schritt: Aufteilen des Bauteils in Finite Elemente (FE)

Verbindungsstellen sind Knoten (K)



Knoten:

- Sprunghafte Änderung von
  - Geometrie
  - Material
  - Äußere Kräfte
- Äußere Kräfte
- Innere Kräfte der Elemente $F_{n,m}$

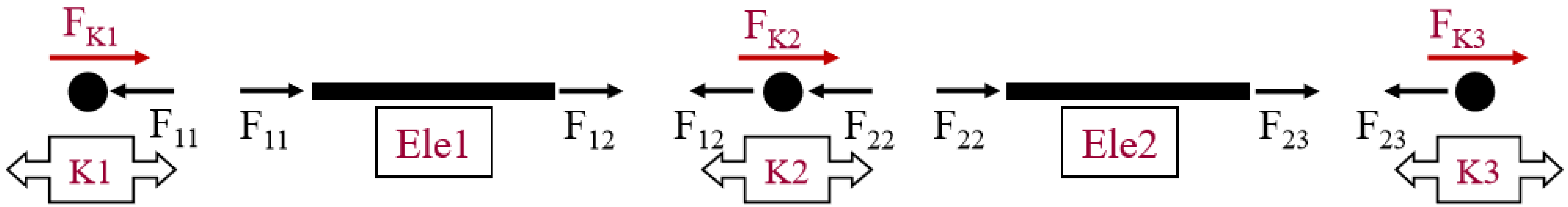
Finite Elemente:

Innere Kräfte $F_{n,m}$

n = Nummer Element

m = Nummer Knoten

Freischneiden

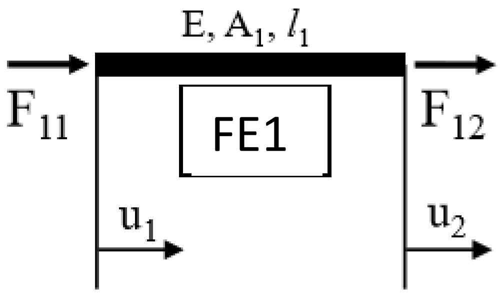


<u>TIPP:</u>

Gedanklich die Knoten in Kraftrichtung verrücken und Orientierung der resultierende Kräfte einzeichnen

Vorgehen

2. Schritt: Betrachtung am Element



<u>Annahme:</u>
Die Kraft $F_{n,m}$ erzeugt am Finiten Element n die Verschiebung u_m

Es herrscht Kräftegleichgewicht am Element:

$$\mathbf{F_{11} + F_{12} = 0}$$

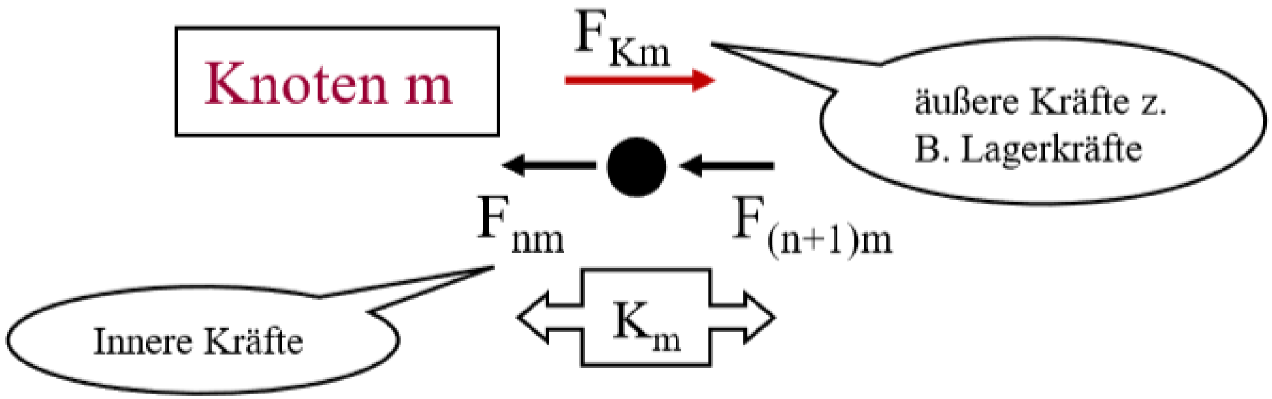
Vorgehen

3. Schritt: Bestimmung der Elementen-Steifigkeit k_i

Allgemeine Form der Elementen-Steifigkeit:

$$\boxed{k_i = \frac{A_i, E_i}{l_i}}$$

4. Schritt: Betrachtung am Knoten:



Vorgehen

5. Schritt: Aufstellen der Gleichungen => Matrizenform

6. Schritt: Randbedingungen

7. Schritt: Einsetzen der Randbedingungen und lösen der Gleichungen

8. Schritt: Streichen der Zeilen und Spalten (für u=0)

Vorgehen

9. Schritt: Berechnung der Verschiebungen

10. Schritt: Berechnung der Lager-Reaktion

11. Schritt: Ermittlung der Spannungen

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !

Impressum

Hinweis

Diese Folien sind ausschließlich für den internen Gebrauch im Rahmen der Lehrveranstaltung an der Frankfurt University of Applied Sciences bestimmt. Sie sind nur zugänglich mit Hilfe eines Passwortes, dass in der Vorlesung bekannt gegeben wird.