

Mechanik und Tragkonstruktion

Festigkeitslehre

Verformungen



Inhalt Mechanik und Tragkonstruktion

1. Grundbegriffe/Herangehensweise an eine Planungsaufgabe/Beanspruchungen
2. Zentrales Kraftsystem
3. Allgemeines Kraftsystem
4. Tragwerke/Lasten
5. Biegeträger – Schnittkräfte
6. **Festigkeitslehre** – Querschnittskennwerte, Berechnung von Spannungen, **Verformungen**

- Verformung infolge Längsdehnung
- Verformung infolge Krümmung
- Dimensionierung anhand von Beispielen

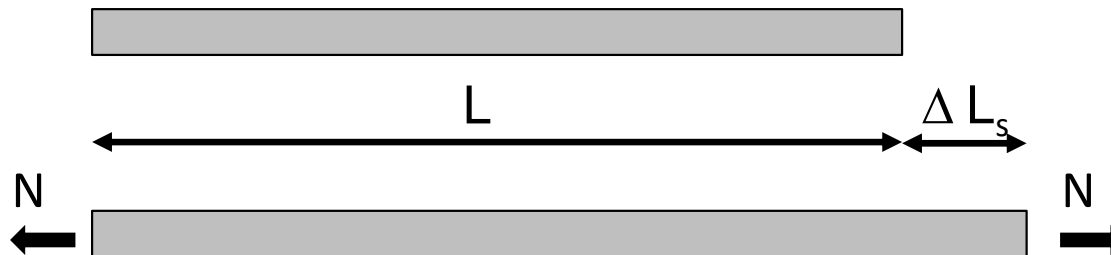
Festigkeitslehre | Dehnung

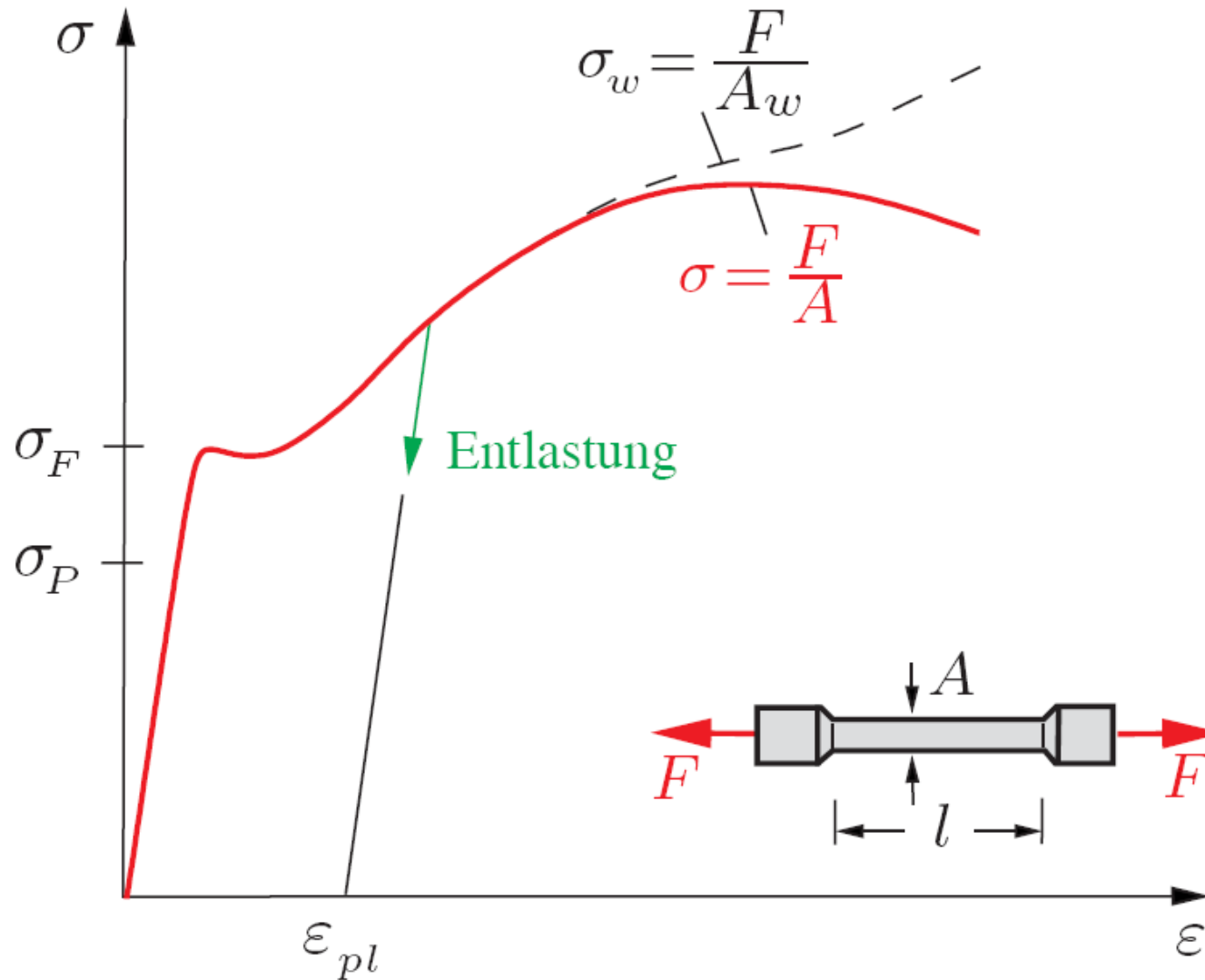
Dehnung ist das Verhältnis der
Längenänderung zur Ausgangslänge.

Die Dehnung $\varepsilon = \Delta L/L$ ist dimensionslos.

Verlängerung: positiv

Verkürzung: negativ

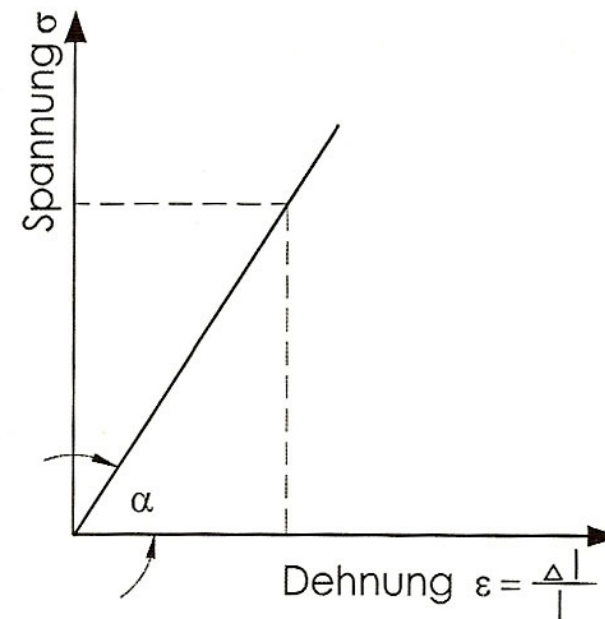




Spannungen und Dehnungen sind im elastischen Bereich proportional zueinander.

Hook'sches Gesetz:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$



Die Längenänderung ΔL_s eines Stabes infolge einer Normalkraft:

$$\varepsilon_s = \Delta L_s / L \rightarrow \Delta L_s = L \cdot \varepsilon_s$$

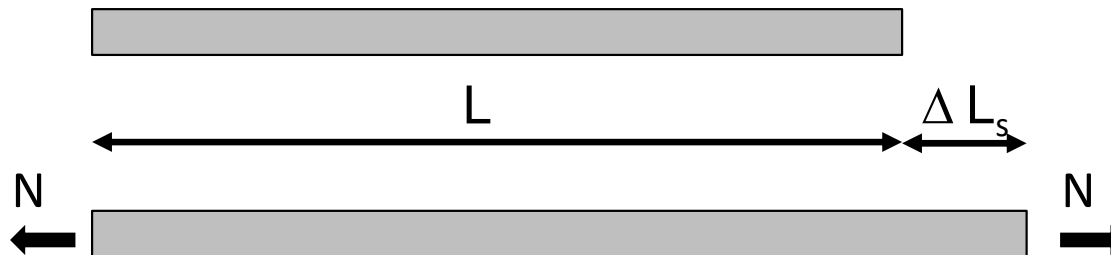
Mit $\sigma = N/A$ und $\varepsilon_s = \sigma / E$

$$\rightarrow \Delta L_s = L \cdot N / (E \cdot A)$$

A: Querschnittsfläche [cm²]

E: E-Modul [kN/cm²]

EA: Dehnsteifigkeit [kN]



Längenänderung ΔL_T eines Stabes infolge einer Temperaturänderung ΔT :

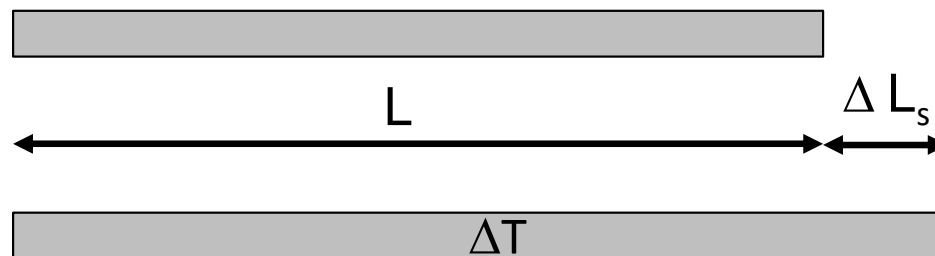
Temperaturdehnung $\varepsilon_T = \alpha_T \cdot \Delta T$

Längenänderung infolge Temperaturänderung:

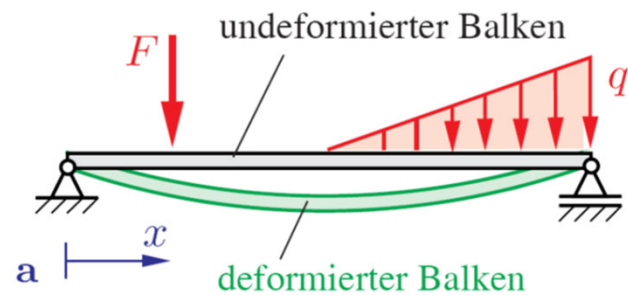
$$\Delta L_T = L \cdot \varepsilon_T = L \cdot \alpha_T \cdot \Delta T$$

ΔT : Temperaturänderung [K]

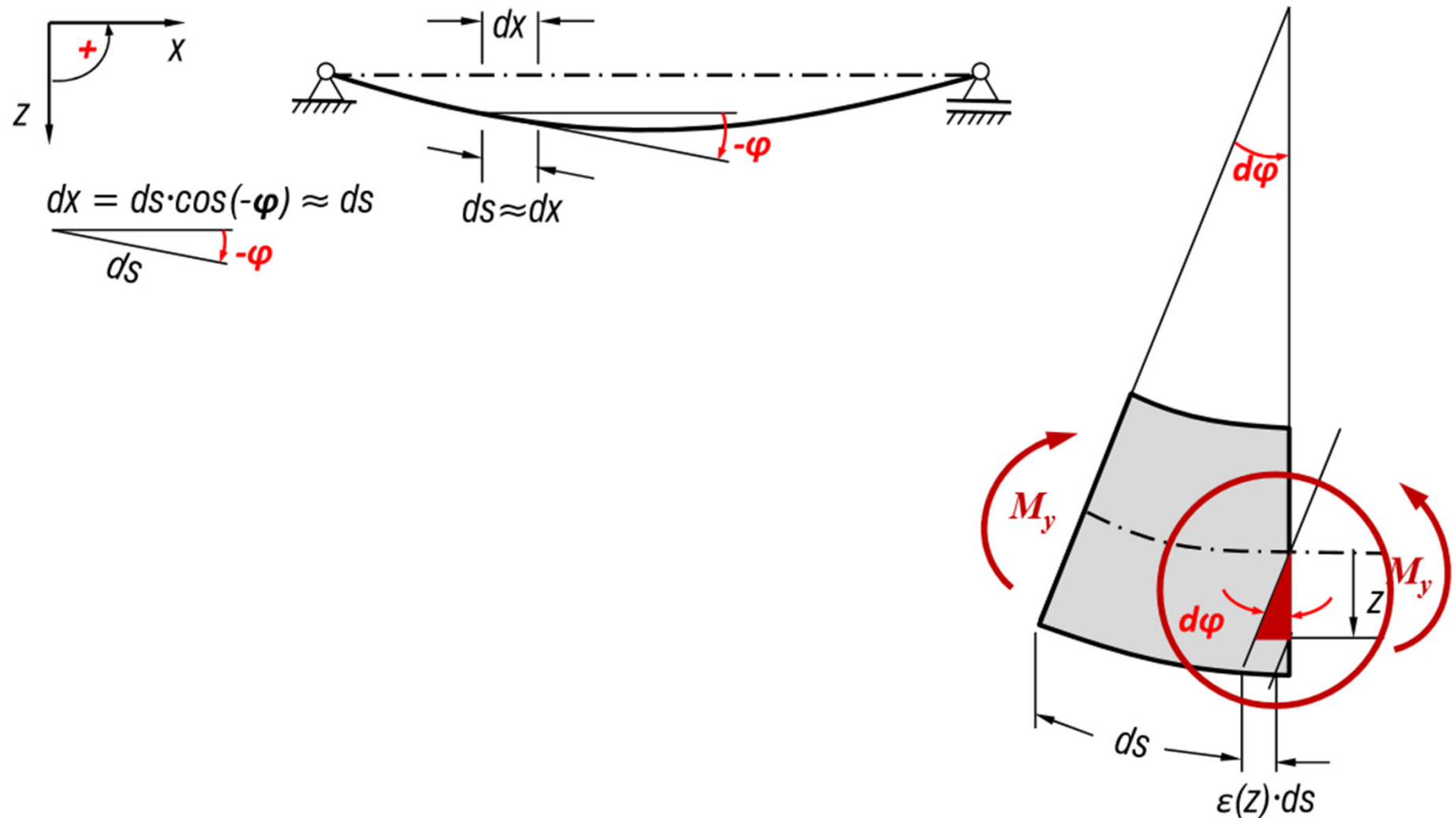
α_T : Wärmeausdehnungskoeffizient [-]



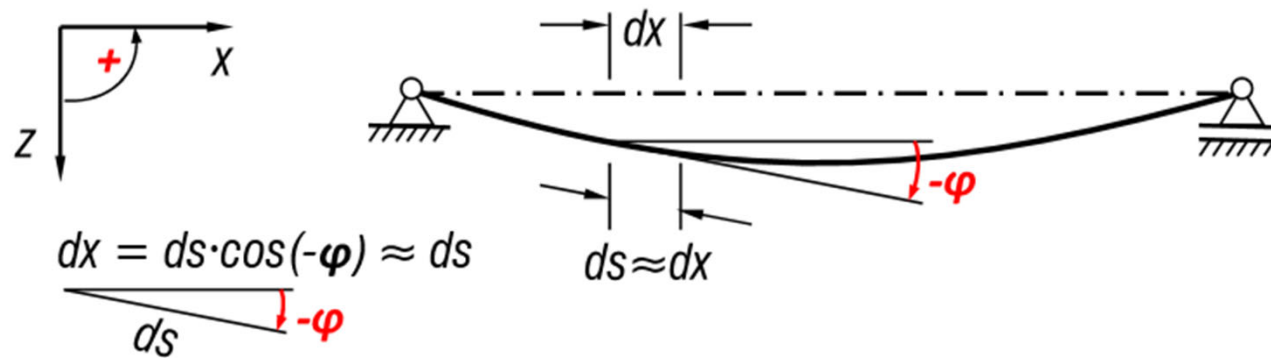
Biegung – Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y und M_z



Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



Handwritten derivation on grid paper showing the relationship between bending moment M_y , stress σ , and deflection φ for a rectangular cross-section.

Querschnitt bleibt eben

Resultierende aus Drehspannung:

$$D = G_{\max} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad (3)$$

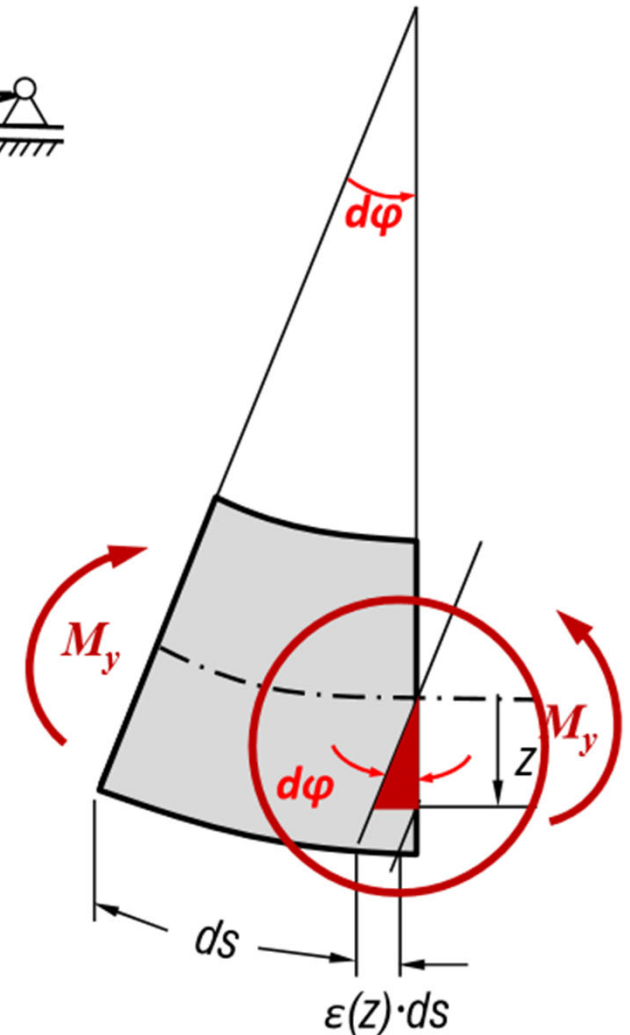
in (2): $M_y = G_{\max} \cdot \frac{b}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot h = G_{\max} \cdot \frac{b h^2}{6}$

$\Rightarrow G_{\max} = \frac{M_y}{\frac{b h^2}{6}}$ Widerstands moment $W [cm^3]$ eines Rechteckquerschnittes

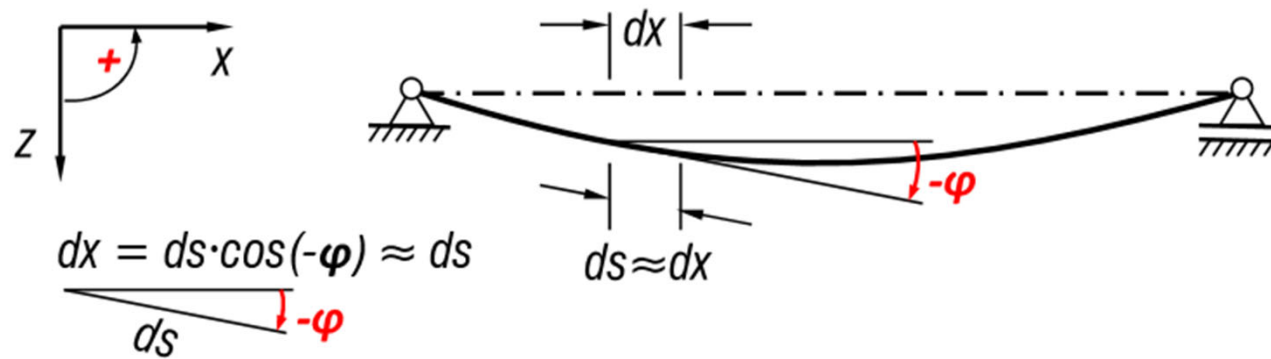
Allgemeiner Zusammenhang zwisch. $\sigma(z)$

$$\sigma(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad ; \quad I_y = \frac{b h^3}{12} \quad \text{beim Rechteckquerschnitt}$$

allgemein gilt:

$$W = \frac{I_y}{z_{\max}}$$


Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y



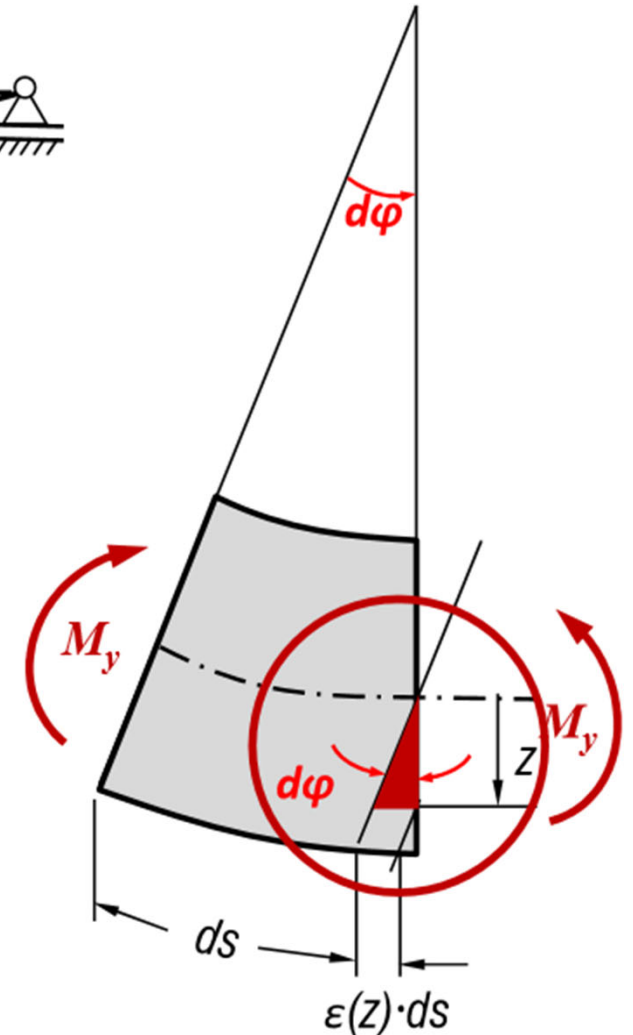
Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d\varphi}{dx} = -w''$$

Krümmung = -(2. Ableitung der Durchbiegung)

mit:
$$d\varphi = \frac{M_y}{EI_y} dx$$

folgt:
$$M_y = -EI_y w''$$

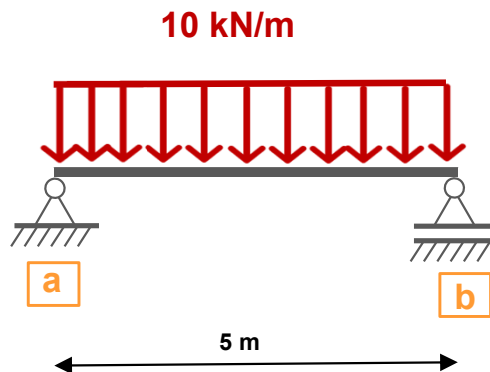


Verkrümmung infolge Biegemomenten M_y

$$\begin{array}{l} EI_y w(x) = - \iint M_y(x) dx + C_1 \cdot x + C_2 \\ \text{Durchbiegung} \quad \uparrow \\ EI_y w'(x) = - \int M_y(x) dx + C_1 \\ \text{Verdrehung} \quad \uparrow \\ EI_y w''(x) = - M_y(x) \\ \text{Krümmung} \quad \downarrow \quad \text{Moment} \\ EI_y w'''(x) = - \frac{dM_y(x)}{dx} = - V_z(x) \\ \downarrow \quad \text{Querkraft} \\ EI_y w''''(x) = - \frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} = - \frac{dV_z(x)}{dx} = q_z(x) \text{ — Last} \end{array}$$

Beispiel:

Einfeldträger mit Streckenlast



Stahlträger HEA 180

$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$

$I_y = 2510 \text{ cm}^4$

1 Formeln für Schnitt- und Verschiebungsgrößen

1.1 Einzelstab, Vereinbarung: $\Delta \rightarrow$ Lager überträgt nur Vertikalkraft

@ 1.1.1 Träger auf zwei Stützen, $\alpha = a/l$, $\beta = b/l$

	$El = \text{konst.}$ 	Auflagerkräfte 	M-Linie 	Biegelinie
		A	B	
1		$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$ bei $\xi_0 = 0,5$
2		$\frac{ql}{6}$	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{15,59}$ bei $\xi_0 = 0,577$
3		$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql}{6}$	$\frac{ql^2}{15,59}$ bei $\xi_0 = 0,423$
4		$\frac{2q_l + q_k}{6} l$	$\frac{q_l + 2q_k}{6} l$	$\frac{q_l^2 l^2}{153,6 EI}$ bei $\xi_0 = \frac{(2q_l + q_k)/\sqrt{3}}{q_l\sqrt{3} + \sqrt{q_l^2 + q_l q_k + q_k^2}}$
5		$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql}{3}$	$\frac{61 ql^2}{5760 EI}$ bei $\xi_0 = 0,5$
6		$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{Fl^3}{48 EI}$ bei $\xi_0 = 0,5$
7		βF	αF	$\alpha \beta F l$ bei $\xi_0 = \alpha$
8		$\frac{n-1}{2} F$	$\frac{n-1}{2} F$	$\frac{n F l^3}{76,8 EI} \left(1 - \frac{0,8}{n^2}\right)$
9		$\frac{n}{2} F$	$\frac{n}{2} F$	$\frac{n F l^3}{76,8 EI} \left(1 + \frac{0,4}{n^2}\right)$
9a				$\frac{x_0^2}{l} (F_1 + F_2)$ bei $x_0 = \frac{1}{2} \left(l - \frac{F_2}{F_1 + F_2} c \right)$ wenn $x_0 + c \leq l$
10		$-\frac{M^e}{l}$	$\frac{M^e}{l}$	$\alpha \leq \frac{1}{2}$: βM^e bei $\xi_0 = \alpha$ $\alpha \geq \frac{1}{2}$: $-\alpha M^e$ bei $\xi_0 = \alpha$
11		$\frac{M_i - M_k}{l}$	$-\frac{M_k - M_i}{l}$	$\frac{M_i + M_k}{16 EI} l^2$
12		0	0	0
13		0	0	0

Beispiel 2:

Verformung in Feldmitte $\max w = 2 \text{ cm}$

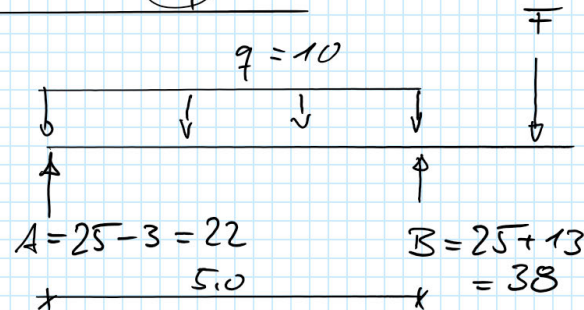
Stahl:

$$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

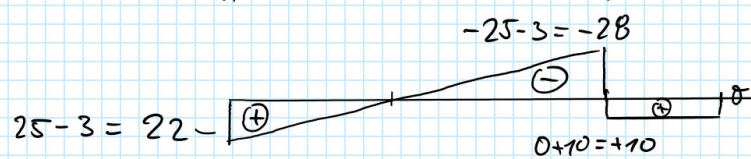
$$\text{zul. Spannung } \sigma = 23,5 \text{ kN/cm}^2$$

Ursprungssystem $(q) + (F)$:

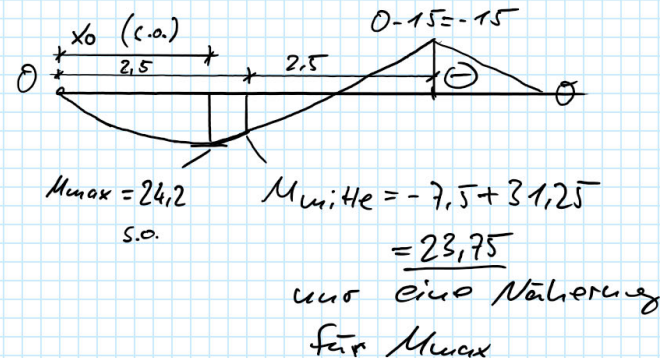
Auflagerkräfte:



V_{F+q}

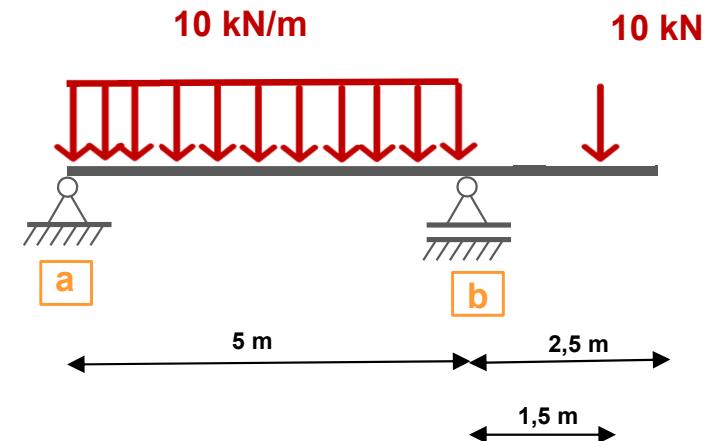


M_{F+q}



@ 1.1.6 Träger auf zwei Stützen mit Kragarm

$El = \text{konst.}$	M-Linie Auflagerkräfte				Biegelinie	
$i \xrightarrow{l} k \xrightarrow{c} j$	A	B	$\max M$	M_k	w_{Mitte} $+ l/2 \rightarrow l/2 +$	w_j
1	$(l^2 - c^2) \frac{q}{2l}$	$(l+c)^2 \frac{q}{2l}$	$\frac{A^2}{2q}$	$-\frac{qc^2}{2}$	$\left(\frac{l^2}{2,4} - c^2\right) \frac{ql^2}{32EI}$	$\left(\frac{c^3}{8} + \frac{c^2 l}{6} - \frac{l^3}{24}\right) \frac{qc}{EI}$
2	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{ql^4}{76,8EI}$	$-\frac{ql^3 c}{24EI}$
3	$-\frac{qc^2}{2l}$	$\left(1 + \frac{c}{2l}\right) qc$	M_k	$-\frac{qc^2}{2}$	$-\frac{ql^2 c^2}{32EI}$	$\left(\frac{l}{6} + \frac{c}{8}\right) \frac{qc^3}{EI}$
4	$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fa}{l}$	$\frac{Fab}{l}$	0	$\left(\frac{l^2}{16} - \frac{a^2}{12}\right) \frac{Fa}{EI}$ wenn $a \leq l/2$	$-(l+a) \frac{Fabc}{6lEI}$
5	$-\frac{Fa}{l}$	$\left(1 + \frac{a}{l}\right) F$	M_k	$-Fa$	$-\frac{Fal^2}{16EI}$	$\left(\frac{lc}{3} + \frac{ac}{2} - \frac{a^2}{6}\right) \frac{Fa}{EI}$
6	$-\frac{M^e}{l}$	$\frac{M^e}{l}$	$-M^e$	$-M^e$	$-\frac{M^e l^2}{16EI}$	$\left(\frac{l}{3} + \frac{c}{2}\right) \frac{cM^e}{EI}$
7	0	0	0	0	$\kappa^e l^2 / 8$	$-\kappa^e l c / 2$
8	0	0	0	0	0	$-\kappa^e c^2 / 2$



Profilreihen IPE, HEA, HEB, HEM

Profilreihe		IPE								
Nennhöhe		80	100	120	140	160	180	200	220	240
h	mm	80	100	120	140	160	180	200	220	240
b	mm	46	55	64	73	82	91	100	110	120
t_w	mm	3,8	4,1	4,4	4,7	5	5,3	5,6	5,9	6,2
t_f	mm	5,2	5,7	6,3	6,9	7,4	8	8,5	9,2	9,8
r	mm	5	7	7	7	9	9	12	12	15
d	mm	59,6	74,6	93,4	112	127	146	159	178	190
A	cm ²	7,64	10,3	13,2	16,4	20,1	23,9	28,5	33,4	39,1
A_{Vy}	cm ²	4,78	6,27	8,06	10,1	12,1	14,6	17,0	20,2	23,5
A_{Vz}	cm ²	3,6	5,1	6,3	7,6	9,7	11,2	14	15,9	19,1
A_w	cm ²	26,45	36,33	47,26	59,31	72,60	86,92	102,5	118,9	136,6
g_k	kN/m	0,06	0,081	0,104	0,129	0,158	0,188	0,224	0,262	0,307
U	m ² /m	0,3278	0,3998	0,4752	0,5502	0,6221	0,6979	0,7682	0,8484	0,9210
a	-	0,374	0,391	0,389	0,386	0,396	0,391	0,404	0,394	0,398
d/t_w	-	15,7	18,2	21,2	23,9	25,4	27,5	28,4	30,1	30,7
c/t_f	-	3,1	3,2	3,6	3,9	4	4,2	4,1	4,4	4,3
I_y	cm ⁴	80,1	171	318	541	869	1320	1940	2770	3890
$W_{el,y}$	cm ³	20	34,2	53	77,3	109	146	194	252	324
$W_{pl,y}$	cm ³	23,22	39,41	60,73	88,34	123,9	166,4	220,6	285,4	366,6
k_{My}	-	0,3409	0,37	0,351	0,336	0,355	0,342	0,369	0,352	0,371
α_{Vy}	-	0,6538	0,647	0,642	0,638	0,639	0,636	0,64	0,644	0,651
i_y	cm	3,24	4,07	4,9	5,74	6,58	7,42	8,26	9,11	9,97

Profilreihen IPE, HEA, HEB, HEM (Fortsetzung)

Profilreihe		IPE								
Nennhöhe		270	300	330	360	400	450	500	550	600
h	mm	270	300	330	360	400	450	500	550	600
b	mm	135	150	160	170	180	190	200	210	220
t_w	mm	6,6	7,1	7,5	8	8,6	9,4	10,2	11,1	12
t_f	mm	10,2	10,7	11,5	12,7	13,5	14,6	16	17,2	19
r	mm	15	15	18	18	21	21	21	24	24
d	mm	220	249	271	299	331	379	426	468	514
A	cm ²	45,9	53,8	62,6	72,7	84,5	98,8	116	134	156
A_{Vy}	cm ²	27,5	32,1	36,8	43,2	48,6	55,5	64,0	72,2	83,6
A_{Vz}	cm ²	22,1	25,7	30,8	35,1	42,7	50,8	60,4	71,9	83,8
A_w	cm ²	164,7	197,8	230,25	267,68	320,78	395,55	477,36	572,32	674,4
g_k	kN/m	0,361	0,422	0,491	0,571	0,663	0,776	0,907	1,055	1,224
U	m ² /m	1,042	1,161	1,2541	1,3539	1,4667	1,6055	1,7435	1,8774	2,0148
a	-	0,400	0,403	0,412	0,406	0,425	0,438	0,448	0,461	0,464
d/t_w	-	33,3	35	36,1	37,3	38,5	40,3	41,8	42,1	42,8
c/t_f	-	4,8	5,3	5,1	5	4,8	4,7	4,6	4,4	4,2
I_y	cm ⁴	5790	8360	11770	16270	23130	33740	48200	67120	92080
$W_{el,y}$	cm ³	429	557	713	904	1160	1500	1930	2440	3070
$W_{pl,y}$	cm ³	484	628,4	804,3	1019	1307	1702	2194	2787	3512
k_{My}	-	0,3591	0,3507	0,3687	0,3577	0,3807	0,3847	0,3847	0,4051	0,4013
α_{Vy}	-	0,6411	0,6323	0,6322	0,6318	0,6204	0,5996	0,5885	0,5729	0,5677
i_y	cm	11,2	12,5	13,7	15	16,5	18,5	20,4	22,3	24,3

Profilreihen IPE, HEA, HEB, HEM (Fortsetzung)

Profilreihe		HEA								
Nennhöhe		100	120	140	160	180	200	220	240	260
h	mm	96	114	133	152	171	190	210	230	250
b	mm	100	120	140	160	180	200	220	240	260
t_w	mm	5	5	5,5	6	6	6,5	7	7,5	7,5
t_f	mm	8	8	8,5	9	9,5	10	11	12	12,5
r	mm	12	12	12	15	15	18	18	21	24
d	mm	56	74	92	104	122	134	152	164	177
A	cm ²	21,2	25,3	31,4	38,8	45,3	53,8	64,3	76,8	86,8
A_{Vy}	cm ²	16,0	19,2	23,8	28,8	34,2	40,0	48,4	57,6	65,0
A_{Vz}	cm ²	7,5	8,4	10,1	13,2	14,5	18,1	20,6	25,1	28,7
A_w	cm ²	40,0	49,0	63,8	80,4	91,2	110,5	131,6	154,5	168,8
g_k	kN/m	0,167	0,199	0,247	0,304	0,355	0,423	0,505	0,603	0,682
U	m ² /m	0,5614	0,6774	0,7944	0,9062	1,024	1,136	1,255	1,369	1,484
a	-	0,245	0,241	0,242	0,258	0,245	0,257	0,247	0,250	0,251
d/t_w	-	11,2	14,8	16,7	17,3	20,3	20,6	21,7	21,9	23,6
c/t_f	-	4,4	5,7	6,5	6,9	7,6	7,9	8	7,9	8,2
I_y	cm ⁴	349	606	1030	1670	2510	3690	5410	7760	10450
$W_{el,y}$	cm ³	72,8	106	155	220	294	389	515	675	836
$W_{pl,y}$	cm ³	83,01	119,5	173,5	245,1	324,9	429,5	568,5	744,6	919,8
k_{My}	-	0,2693	0,2474	0,233	0,2515	0,2324	0,2484	0,2333	0,2414	0,248
α_{Vy}	-	0,8113	0,8063	0,7968	0,7928	0,7987	0,7946	0,7953	0,7988	0,8056
i_y	cm	4,06	4,89	5,73	6,57	7,45	8,28	9,17	10,1	11

Profilreihen IPE, HEA, HEB, HEM (Fortsetzung)

Profilreihe		HEA								
Nennhöhe		280	300	320	340	360	400	450	500	550
h	mm	270	290	310	330	350	390	440	490	540
b	mm	280	300	300	300	300	300	300	300	300
t_w	mm	8	8,5	9	9,5	10	11	11,5	12	12,5
t_f	mm	13	14	15,5	16,5	17,5	19	21	23	24
r	mm	24	27	27	27	27	27	27	27	27
d	mm	196	208	225	243	261	298	344	390	438
A	cm ²	97,3	113	124	133	143	159	178	198	212
A_{vy}	cm ²	72,8	84,0	93,0	99,0	105,0	114,0	126,0	138,0	144,0
A_{vz}	cm ²	31,8	37,8	40,8	44,5	49,2	57,4	65,8	75,2	84
A_w	cm ²	195,2	222,7	251,1	282,2	315	387,2	457,7	532,8	615
g_k	kN/m	0,764	0,883	0,976	1,048	1,121	1,248	1,398	1,551	1,662
U	m ² /m	1,603	1,717	1,756	1,795	1,834	1,912	2,011	2,11	2,209
a	-	0,252	0,257	0,250	0,256	0,266	0,283	0,292	0,303	0,321
d/t_w	-	24,5	24,5	25	25,6	26,1	27,1	29,9	32,5	35
c/t_f	-	8,6	8,5	7,6	7,2	6,7	6,2	5,6	5,1	4,9
I_y	cm ⁴	13670	18260	22930	27690	33090	45070	63720	86970	111900
$W_{el,y}$	cm ³	1010	1260	1480	1680	1890	2310	2900	3550	4150
$W_{pl,y}$	cm ³	1112	1383	1628	1850	2088	2562	3216	3949	4622
k_{My}	-	0,2409	0,2471	0,2449	0,2478	0,251	0,2617	0,2665	0,2715	0,2832
a_{vy}	-	0,7994	0,8029	0,7975	0,7879	0,7797	0,7565	0,7429	0,7309	0,7099
i_y	cm	11,9	12,7	13,6	14,4	15,2	16,8	18,9	21	23

Beispiel 2a:

Verformung an der Kragarmspitze

Stahl:

$$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

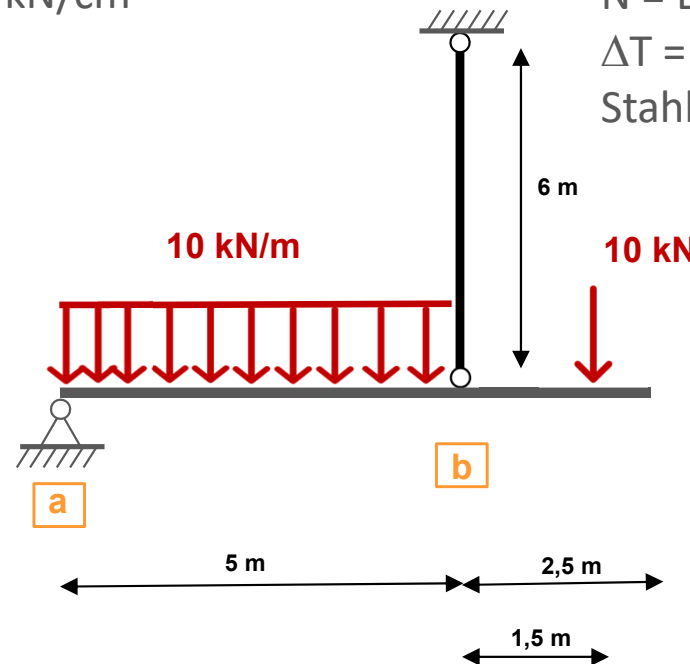
$$\text{zul. Spannung } \sigma = 23,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Zugstab A} = 8 \text{ cm}^2$$

$$N = B = 38 \text{ kN}$$

$$\Delta T = 40 \text{ K}$$

$$\text{Stahl: } \alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5}$$



Beispiel 3 a: Kragträger

Verformung am Kragarmende max $w = 2 \text{ cm}$

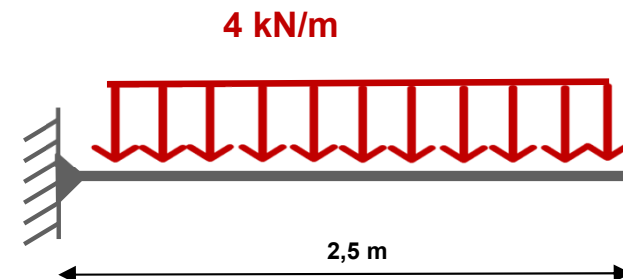
Stahl:

$E = 210.000 \text{ N/mm}^2$

zul. Spannung $\sigma = 23,5 \text{ kN/cm}^2$

@ 1.1.7 Kragträger

$EI = \text{konst.}$ 		M-Linie 	Biegelinie 		
		A	M_i	w_k	φ_k
1		ql	$-\frac{ql^2}{2}$	$\frac{ql^4}{8EI}$	$\frac{ql^3}{6EI}$
2		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{6}$	$\frac{ql^4}{30EI}$	$\frac{ql^3}{24EI}$
3		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{3}$	$\frac{11ql^4}{120EI}$	$\frac{ql^3}{8EI}$
4		F	$-Fl$	$\frac{Fl^3}{3EI}$	$\frac{Fl^2}{2EI}$
5		F	$-Fa$	$\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{6}\right) \frac{Fa^2}{EI}$	$\frac{Fa^2}{2EI}$
6		0	M_k	$-\frac{M_k l^2}{2EI}$	$-\frac{M_k l}{EI}$
7	Temp. $\kappa^e = \alpha_T (T_u - T_o) / h$	0	0	$-\frac{\kappa^e l^2}{2}$	$-\kappa^e l$



Beispiel 3 b: Kragträger

Verformung am Kragarmende max $w = 2 \text{ cm}$

Holz:

$E = 10.000 \text{ N/mm}^2$

zul. Spannung $\sigma = 16 \text{ N/mm}^2$

@ 1.1.7 Kragträger

$EI = \text{konst.}$ 		M-Linie 	Biegelinie 		
		A	M_i	w_k	φ_k
1		ql	$-\frac{ql^2}{2}$	$\frac{ql^4}{8EI}$	$\frac{ql^3}{6EI}$
2		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{6}$	$\frac{ql^4}{30EI}$	$\frac{ql^3}{24EI}$
3		$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{3}$	$\frac{11ql^4}{120EI}$	$\frac{ql^3}{8EI}$
4		F	$-Fl$	$\frac{Fl^3}{3EI}$	$\frac{Fl^2}{2EI}$
5		F	$-Fa$	$\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{6}\right) \frac{Fa^2}{EI}$	$\frac{Fa^2}{2EI}$
6		0	M_k	$-\frac{M_k l^2}{2EI}$	$-\frac{M_k l}{EI}$
7	 $\kappa^e = \alpha_T (T_U - T_O) / h$	0	0	$-\frac{\kappa^e l^2}{2}$	$-\kappa^e l$

