4.4. Ebene Bewegung starrer Körper

Die Bewegungsgesetze der allgemeinen ebenen Bewegung des starren Körpers (Überlagerung von Translation und Rotation) erhält man, indem man eine „Kraftgleichung“ für die Translation der in einem Bezugspunkt konzentrierten Masse und eine Momentengleichung für die Drehung um die durch diesen Bezugspunkt gehende, senkrecht auf der Bewegungsebene stehende Achse aufstellt. Bei Anwendung des Energiesatzes sind Translationsenergie (Masse ist im Bezugspunkt konzentriert) und Rotationsenergie (Drehung um den Bezugspunkt) in der Energiebilanzgleichung zu berücksichtigen.

Besteht zwischen den gewählten Koordinaten eine Abhängigkeit (Zwangsbedingung, Beispiel: „Rollbedingung“ für schlupffreies Rollen), so lassen sich die Bewegungsgleichungen zusammenfassen, und ihre Anzahl reduziert sich auf die Anzahl der Freiheitsgrade des starren Körpers.

WICHTIG: Diese Aussagen gelten uneingeschränkt nur, wenn der Schwerpunkt als Bezugspunkt gewählt wird. Da die Wahl eines anderen Punktes als Bezugspunkt - wenn es überhaupt für die entsprechende Untersuchung erlaubt ist - nur in wenigen Spezialfällen nennenswerte Vorteile bringt, wird im Folgenden immer vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt des starren Körpers als Bezugspunkt gewählt wird.

Der starre Körper hat in der Ebene drei Freiheitsgrade, deren Anzahl i. a. durch Zwangsbedingungen reduziert ist. Sinngemäß gelten alle Aussagen auch für Systeme starrer Körper, bei denen auch zwischen den einzelnen Körpern noch Zwangsbedingungen berücksichtigt werden müssen. Der in der technischen Praxis mit Abstand häufigste Fall ist der starre Körper oder das System starrer Körper mit einem Freiheitsgrad.

4.4.1 Das Prinzip von d'ALEMBERT

Das bereits aus der Kinetik des Massenpunktes bekannte Prinzip von d'ALEMBERT wird in seiner Anwendung auf starre Körper im folgenden so beschrieben, dass durch Freischneiden und Antragen aller Kräfte und Momente das Problem durch Aufschreiben von Gleichgewichtsbedingungen wie ein Problem der Statik behandelt werden kann. Im Einzelnen werden folgende Schritte für die Lösung von Aufgaben empfohlen:

- Wahl geeigneter Bewegungskoordinaten: Zweckmäßig ist es, für jede Bewegungsmöglichkeit des starren Körpers eine eigene Koordinate zu wählen (z. B. für das rollende Rad eine Weg- und eine Winkelkoordinate), auch wenn zwischen den eingeführten Koordinaten Zwangsbedingungen zu berücksichtigen sind. Man sollte darauf achten, dass alle gewählten Koordinaten gleichzeitig positiv werden.

- Freischneiden des starren Körpers von allen äußeren Bindungen. Bei Systemen starrer Körper ist es ratsam (und wird zur Vermeidung von Fehlern dringend empfohlen), auch die Bindungen zwischen den einzelnen Körpern zu schneiden. Dabei ist es sinnvoll, den (oder die) Körper in einer ausgelenkten Lage (alle Koordinaten ungleich Null und positiv) zu skizzieren.

- Antragen von Kräften und Momenten:

    1. ***Eingeprägte Kräfte und Momente***, z. B. : Eigengewicht, Antriebskräfte, Antriebsmomente, ...

    2. ***Zwangskräfte***, die durch das Freischneiden sichtbar wurden: Diese Kräfte sind die aus der Anwendung des Schnittprinzips in der Statik bekannten Lagerreaktionen, Seilkräfte, Kräfte zwischen starrem Körper und Führungen, auch Haftreibungskräfte, ...

    3. ***Bewegungswiderstände***, z. B. : Gleitreibung, Rollreibung (nicht: Haftreibungskräfte, die zu den Zwangskräften, gehören und sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben), Luftwiderstand, ... Bewegungswiderstände sind immer entgegen der tatsächlichen Bewegungsrichtung anzutragen. Wenn diese nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden kann, ist die Rechnung gegebenenfalls mit den korrigierten Richtungen für die Bewegungswiderstände zu wiederholen.

    4. ***d'ALEMBERTsche Kräfte (im Schwerpunkt) und Momente*** (Massenträgheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes), die entgegen den Richtungen der eingeführten Bewegungskoordinaten anzutragen sind. Dabei spielt die tatsächliche Bewegungsrichtung keine Rolle, da sich alle Bewegungsgrößen (auch Beschleunigung und Geschwindigkeit) mit dem sich ergebenden Vorzeichen auf die gewählten Koordinaten beziehen.

- Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen. Dabei muss der Bezugspunkt für das Momentengleichgewicht natürlich nicht der Schwerpunkt sein. Es ist häufig (wie bei statischen Problemen) vorteilhaft, den Momentenbezugspunkt so zu wählen, dass für die weitere Rechnung die nicht interessierenden Kräfte gar nicht in den Gleichgewichtsbedingungen erscheinen.

- Einsetzen der kinematischen Zwangsbedingungen in die Gleichgewichtsbeziehungen. Die Anzahl der erforderlichen Zwangsbedingungen entspricht der Differenz der Anzahl der eingeführten Bewegungskoordinaten n und der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems, bei einem System mit nur einem Freiheitsgrad müssen also n - 1 Zwangsbedingungen berücksichtigt werden.

Nach Einsetzen der Zwangsbedingungen in die Gleichgewichtsbeziehungen muss die Anzahl der Unbekannten (Zwangskräfte, Beschleunigungen, Winkelbeschleunigungen) mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmen. Wenn nur nach Zwangskräften oder Beschleunigungen gefragt ist, können diese aus dem entstandenen Gleichungssystem direkt berechnet werden.

Wenn nach den Bewegungsgesetzen (Geschwindigkeit-Zeit, Weg-Zeit, Geschwindigkeit-Weg) gefragt ist, müssen noch folgende Schritte abgearbeitet werden:

- Elimination der Zwangskräfte aus den Gleichgewichtsbeziehungen, so dass die Anzahl der verleibenden Gleichungen der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems entspricht. Diese Gleichungen enthalten noch die unbekannten Beschleunigungen, gegebenenfalls in Abhängigkeit von der Zeit.

- Integration der Beschleunigungs-Zeit-Gesetze und Ermittlung der dabei anfallenden Integrationskonstanten aus Zusatzbedingungen, z. B. Anfangsbedingungen. Man erhält direkt das Geschwindigkeits-Zeit- und das Weg-Zeit-Gesetz, aus denen bei Bedarf auch das Geschwindigkeits-Weg-Gesetz bestimmt werden kann.

4.4.2 Energiesatz

In die Bilanzgleichung des Energiesatzes (vgl. Kinetik des Massenpunktes) gehen Weggrößen und Geschwindigkeiten ein. Die Anwendung des Energiesatzes ist deshalb einer Lösung nach dem Prinzip von d'ALEMBERT vorzuziehen, wenn

- nach der Geschwindigkeits-Weg-Funktion gefragt ist und

- das System nur einen Freiheitsgrad hat (bei mehreren Freiheitsgraden ist die Energiebilanzgleichung zwar eine richtige, für die Ermittlung mehrerer unbekannter Bewegungsgrößen aber nicht ausreichende Beziehung).

Folgende Schritte werden für die Behandlung eines Problems mit Hilfe des Energiesatzes empfohlen:

- Definition der beiden Bewegungszustände 1 und 2 (Lage und Geschwindigkeiten aller Körper). Dabei können, wenn dies zweckmäßig erscheint, mehrere Lagekoordinaten und
- Geschwindigkeiten definiert werden, die dann erst später mit Hilfe der Zwangsbedingungen auf jeweils eine reduziert werden müssen.

- Festlegen des Nullpotentials (horizontale Linie) als Bezugslinie für die potentiellen Energien der Körper. Dabei darf bei Systemen starrer Körper für jeden Körper eine eigene Bezugslinie definiert werden. Es ist meist von Vorteil, die Bezugslinie(n) so zu legen, dass in einem der beiden Zustände 1 oder 2 keine potentielle Energie berücksichtigt werden muss.

- Aufschreiben der Energiebilanz:

  Summe aller potentiellen Energien im Zustand 1 (Energie der Lage, in Federn gespeicherte potentielle Energie)

  +

  Summe aller kinetischen Translationsenergien im Zustand 1, bezogen auf die Schwerpunkte der Körper

  +

  Summe aller kinetischen Rotationsenergien im Zustand 1, wobei die Massenträgheitsmomente bezüglich der Schwerpunkte einzusetzen sind

  +

  Zugeführte Energien auf dem Weg von 1 nach 2 (z. B. Arbeit von Antriebskräften: $F \cdot s$ und Antriebsmomenten: $M \cdot \varphi$)

  –

  Energieverluste auf dem Weg von 1 nach 2 (z. B. Reibungsverluste)

  =

  Summe aller potentiellen Energien im Zustand 2 (Energie der Lage, in Federn gespeicherte potentielle Energie)

  +

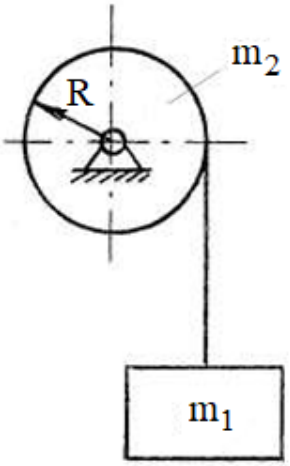
  Summe aller kinetischen Translationsenergien im Zustand 2, bezogen auf die Schwerpunkte der Körper

  +

  Summe aller kinetischen Rotationsenergien im Zustand 2, wobei die Massenträgheitsmomente bezüglich der Schwerpunkte einzusetzen sind

- Einsetzen der kinematischen Zwangsbedingungen in die Energiebilanz: Es ergibt sich das Geschwindigkeits-Weg- Gesetz mit einer Weggröße und einer Geschwindigkeit.

Aufgabe 4-3



Die an einem masselosen Seil hängende Masse m_1 wird zur Zeit t = 0 freigelassen. Bei der Abwärtsbewegung rollt das Seil von der sich reibungsfrei drehenden zylindrischen Rolle (Masse m_2, Radius R) ab.

Geg. : $m_2 = 4\ m_1$

Man bestimme für die Masse m_1

a) den nach $t^* = 5$ s zurückgelegten Weg s^*

b) ihre Geschwindigkeit v^* zu diesem Zeitpunkt.

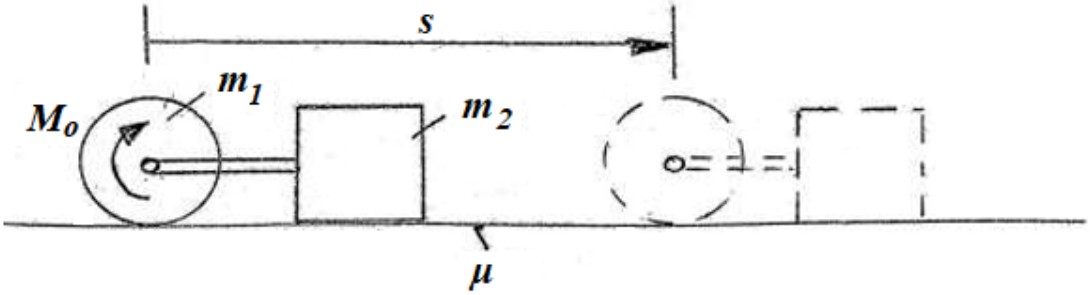
c) Wie groß ist die Kraft F_S in dem Seil während der Bewegung für $m_1 = 5$ kg?

Aufgabe 4-4

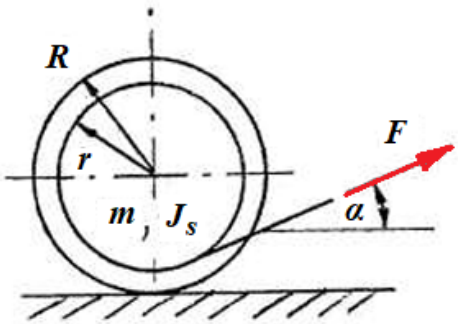
Eine Walze m_1 mit dem Radius r wird durch das konstante Drehmoment M_o angetrieben und schiebt die Masse m_2 die Ebene entlang. Walze und Masse sind durch eine masselose Stange (Stab) verbunden. Der Reibwert für Masse m_2 beträgt μ.
Die Bewegung beginnt aus der Ruhelage heraus.

Wie groß muss M_o sein, damit das System nach $s = 2$ m die Geschwindigkeit $v = 4$m/s erreicht hat ?

Geg.: $m_1 = 3$ kg $m_2 = 6$ kg, $\mu = 0{,}1$, $r = 0{,}05$ m



Aufgabe 4-5



Eine Rolle mit der Masse m und dem auf ihren Mittelpunkt bezogenen Massenträgheitsmoment J_S wird mit der konstanten Kraft F an einem Faden, der über den Radius r aufgewickelt ist, gezogen.

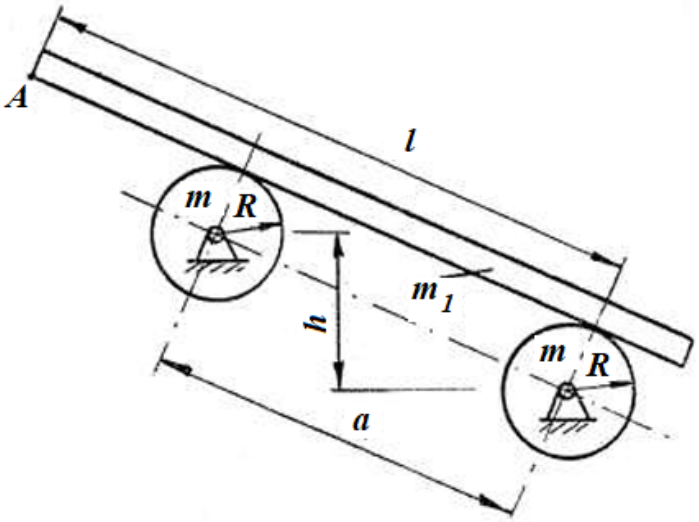
Geg. : F, m, α
$R = 1{,}25\ r$
$J_S = 0{,}6\ m\ R^2$

Man ermittle unter der Voraussetzung einer reinen Rollbewegung die Beschleunigung $a_R = \ddot{x}_R$ der Rolle und diskutiere das Ergebnis für die speziellen Winkel $\alpha_1 = 0°$ und $\alpha_2 = 90°$.

Aufgabe 4-6

Ein Brett mit der Masse m_1 rollt schlupffrei über zwei zylindrische Rollen (Masse m).
Die Bewegung beginnt in der skizzierten Lage aus der Ruhe heraus.

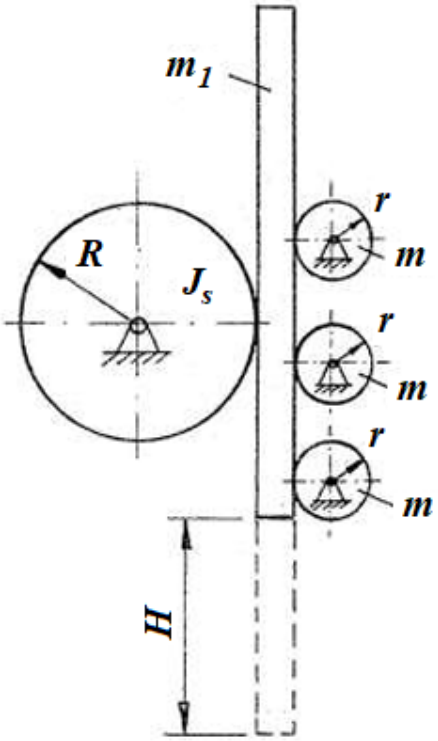
Geg. : a
$h = 0{,}5\ a$
$l = 1{,}5\ a$
$m = 0{,}28\ m_1$



a) Man ermittle den Zeitpunkt t_A , zu dem der Punkt A über die linke Rolle läuft.

b) Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die Geschwindigkeit v_A des Brettes ?

Aufgabe 4-7



Um das unbekannte Massenträgheitsmoment J_s eines Zahnrades mit dem Radius R zu ermitteln, wird der skizzierte Versuchsaufbau verwendet:
Eine Zahnstange mit der Masse m_1 wird aus der Ruhe heraus fallengelassen. Sie nimmt bei ihrer Bewegung das Zahnrad und drei zylindrische Führungsrollen schlupffrei mit. Die Führungsrollen haben alle den gleichen Radius und jeweils die Masse m.

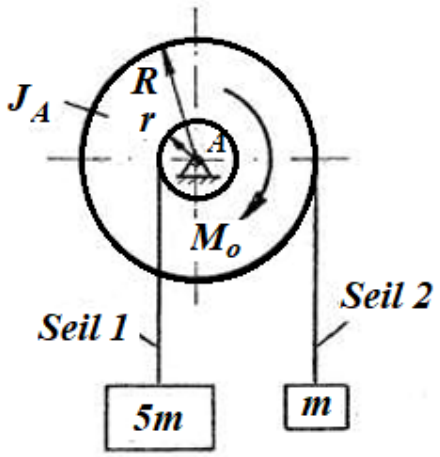
Es wird die Zeit T gemessen, die die Zahnstange für das Durchfallen der Höhe H benötigt.

Geg. : R = 60 mm
m_1 = 2 kg
m = 0,4 kg
H = 500 mm
T = 1,5 s

a) Es ist das Massenträgheitsmoment J_S zu ermitteln.
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Zahnstange am Ende der Messstrecke?

Aufgabe 4-8

Eine Scheibe mit dem auf den Drehpunkt A bezogenen Massenträgheitsmoment J_A wird durch ein konstantes Antriebsmoment M_o angetrieben. Dabei werden die Masse 5m am Radius r angehoben und das Gegengewicht m am Radius R abgesenkt.



Gegeben: m , r , R = 3r
$J_A = 2mr^2$, $M_o = 4mgr$

Gesucht: a) Winkelbeschleunigung
$\alpha = \varphi''$ der Scheibe
b) Seilkräfte in den
Seilen 1 und 2

5. KINETIK DES MASSENPUNKTSYSTEMS

Ein ***Massenpunktsystem*** besteht aus mehreren Massenpunkten, zwischen denen starre und/oder nicht starre (z. B. elastische) oder auch keine Bindungen bestehen.

Die Theorie des Massenpunktsystems wird in der technischen Praxis vornehmlich für die Berechnung von Stoßvorgängen genutzt. Deshalb dienen auch hier die in den folgenden Abschnitten behandelten Themen im Wesentlichen der Vorbereitung der später erörterten Stoßtheorie.

Der ***starre Körper*** ist ein Sonderfall des Massenpunktsystems mit unendlich vielen unendlich kleinen Massenpunkten, die sämtlich starr miteinander verbunden sind.

5.1. Der Impulssatz

Bei Integration des Schwerpunktsatzes

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}}_s = (m\dot{\vec{r}}_s)^{\cdot} = (m\vec{v}_s)^{\cdot}$$

über die Zeit erhält man den Impulssatz für ein Massenpunktsystem:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i dt = (m\vec{v}_s)_1 - (m\vec{v}_s)_0$$

Die Änderung des Impulses mv_s (v_s – Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunkts, m – Gesamtmasse) eines Massenpunktsystems innerhalb des Zeitintervalls $t_1 - t_0$ ist gleich dem Zeitintegral über die Resultierende aller äußeren Kräfte.

Sonderfall:

Wenn keine äußeren Kräfte auf ein Massenpunktsystem einwirken, so bleibt der Impuls des Systems konstant (Impulserhaltungssatz).

Man beachte, dass wie beim Schwerpunktsatz das System so betrachtet werden darf, als ob alle Kräfte im Schwerpunkt angreifen würden. Man bekommt als Ergebnis einer solchen Rechnung allerdings auch nur eine Aussage über die Bewegung des Schwerpunkts und keine Information darüber, ob und wie das Massenpunktsystem um seinen Gesamtschwerpunkt rotiert.

Aufgabe 5-1

Ein Mensch in einem Boot (Masse m_1), das sich in Ruhe befindet, schießt ein Geschoss mit der Masse m_2 mit der Anfangsgeschwindigkeit v_2 in horizontaler Richtung ab. Mensch, Boot und Gewehr haben die Gesamtmasse m_2.

Gegeben: $m_1 = 150$ kg
$m_2 = 50$ g
$v_2 = 800$ m/s

Unter der Annahme, dass die Einwirkung äußerer Kräfte vernachlässigt werden kann, ist die Geschwindigkeit v_1, die die Masse m_1 unmittelbar nach dem Schuss hat, zu ermitteln.

5.2. Stoß

Als Stoß wird das Aufeinandertreffen zweier Körper bezeichnet, wodurch sich eine Bewegungsänderung ergibt.

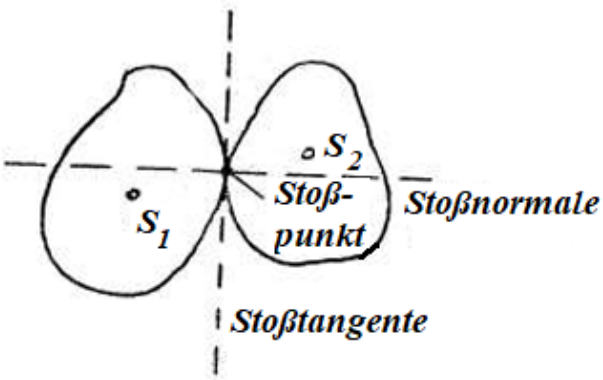
Die nachfolgend behandelte Theorie des Stoßes basiert auf folgenden Annahmen:

- Die Dauer t_s des gesamten Stoßvorgangs ist sehr klein.
- Die Kräfte an der Stoßstelle sind so groß, dass dagegen alle übrigen auf die Körper wirkenden Kräfte während des Stoßvorgangs vernachlässigt werden können.
- Die am Stoßvorgang beteiligten Körper können hinsichtlich ihrer Bewegungsgesetze als starr angenommen werden.

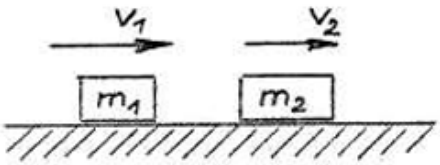
Der Berührungspunkt der beiden am Stoß beteiligten Körper wird Stoßpunkt genannt, die durch den Stoßpunkt gehende Gerade senkrecht zur Berührungsebene heißt ***Stoßnormale***.

Liegen die Geschwindigkeiten der Stoßpunkte der beiden Massen unmittelbar vor dem Stoß in Richtung der Stoßnormalen, so ist es ein ***gerader Stoß***, anderenfalls ein ***schiefer Stoß***.

Wenn die Schwerpunkte der beiden Massen auf der Stoßnormalen liegen, spricht man von einem ***zentrischen Stoß***, anderenfalls von einem ***exzentrischen Stoß***.



5.2.1 Der gerade zentrische Stoß



Die beiden Massen m_1 und m_2 haben vor dem Stoß die Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 ($v_1 > v_2$) , nach dem Stoß die Geschwindigkeiten u_1 bzw. u_2. Da äußere Kräfte vernachlässigt werden können und die Kräfte an der Stoßstelle für das Massensystem innere Kräfte sind, gilt immer der Impulserhaltungssatz:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Diese Gleichung enthält bei bekannten Massen und bekannten Geschwindigkeiten vor dem Stoß als Unbekannte die beiden Geschwindigkeiten der Massen nach dem Stoß. Für zwei Sonderfälle lässt sich eine zweite Gleichung aufschreiben:

- Beim vollkommen plastischen Stoß nimmt man an, dass die beiden Massen sich nach dem Stoß gemeinsam bewegen:

$$u_1 = u_2$$

- Beim vollkommen elastischen Stoß wird angenommen, dass sich alle durch den Stoß hervorgerufenen Deformationen elastisch zurückbilden, so dass kein Energieverlust entsteht:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Für diese beiden Idealfälle können die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 aus jeweils zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten errechnet werden. Man erhält folgende

<u>Geschwindigkeiten nach dem Stoß:</u>

Vollkommen plastischer Stoß:

$$u_1 = u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Vollkommen elastischer Stoß:

$$u_1 = \frac{2 m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$$

Für den interessanten Spezialfall gleicher Massen liefern diese Formeln mit $m_1 = m_2 = m$:

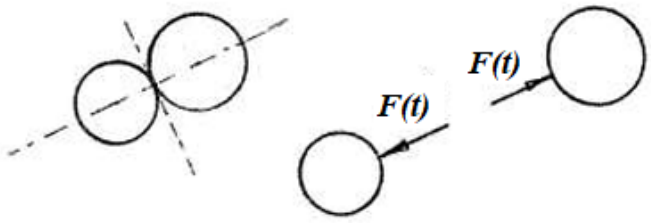
- Beim vollkommen plastischen Stoß gleicher Massen bewegen sich diese danach mit dem arithmetischen Mittel ihrer Geschwindigkeiten vor dem Stoß:

$$u_1 = u_2 = (v_1 + v_2)/2$$

- Beim vollkommen elastischen Stoß gleicher Massen tauschen diese ihre Geschwindigkeiten aus:

$$u_1 = v_2 \;;\; u_2 = v_1$$

Der vollkommen plastische und der vollkommen elastische Stoß sind die Grenzzustände des realen Stoßvorgangs. Um diesen zu untersuchen, wird der Impulssatz für beide Massen gesondert formuliert. Dabei ist zu beachten, dass die zwischen den Massen wirkende Stoßkraft F(t) für die einzelnen Massen eine äußere Kraft ist.



Die weiteren Überlegungen basieren auf folgender Vorstellung vom Stoßvorgang: Während der sogenannten Kompressionsperiode ($0 \le t \le t_K$) baut sich die Kraft F(t) von Null bis zu ihrem Maximalwert auf. Zum Zeitpunkt t_K bewegen sich die Massen mit der gemeinsamen Geschwindigkeit v_K. In der sogenannten Restitutionsperiode ($t_K \le t \le t_s$) geht die Kraft F(t) auf Null zurück. Zum Zeitpunkt t_s ist der Stoßvorgang beendet.

Das Verhältnis der beiden Kraftstöße in der Restitutions- bzw. Kompressionsperiode wird als

Stoßzahl *k*

bezeichnet. Diese kann experimentell ermittelt werden und wird somit für die weitere Rechnung als bekannt vorausgesetzt.

Damit ergeben sich die beiden Gleichungen für den geraden zentrischen Stoß:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$k = \frac{u_1 - u_2}{v_2 - v_1}$$

Diese beiden Gleichungen sind:

- der Impulserhaltungssatz und
- eine Gleichung, die auch als Definitionsgleichung für die Stoßzahl k angesehen werden darf.

Man beachte die Reihenfolge der Geschwindigkeiten in den Differenzausdrücken von Zähler und Nenner. Die so definierte Stoßzahl kann Werte im Bereich

$$0 \leq k \leq 1$$

annehmen. Mit den Grenzwerten für k sind die beiden Idealfälle des Stoßvorgangs in den allgemeinen Gleichungen enthalten:

$k = 0 \rightarrow u_1 = u_2$ (vollkommen plastisch),
$k = 1 \rightarrow u_1 - u_2 = v_2 - v_1$ (vollkommen elastisch).

Die Definitionsgleichung für k (Quotient der Geschwindigkeitsdifferenzen nach bzw. vor dem Stoß) wird im Allgemeinen auch als Basis für die experimentelle Bestimmung der Stoßzahl verwendet.

Aufgabe 5-2

Zur Ermittlung der Stoßzahl wird ein sogenannter Rücksprungversuch ausgeführt: Eine Masse m_1 wird in der Höhe H fallengelassen und trifft auf eine ruhende sehr große Masse m_2, die von m1 erreichte Rücksprunghöhe h wird gemessen.
Unter der Voraussetzung, dass die Versuchsbedingungen die Vernachlässigung des Luftwiderstands gestatten und die Masse m_2 als sehr groß gegenüber m_1 angesehen werden darf ($m_2 \rightarrow \infty$), ist k bei bekannten Höhen H und h zu ermitteln.

Aufgabe 5-3

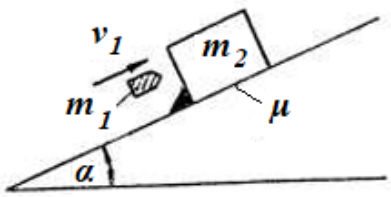
Ein Fahrzeug mit der Masse m_1 = 1200 kg prallt auf ein stehendes Fahrzeug (Masse m_2 = 1000 kg), das mit blockierten Rädern dadurch um die Strecke s_2 = 16 m verschoben wird. Wie groß war die Aufprallgeschwindigkeit, wenn die Stoßzahl k = 0,15 und ein Reibkoeffizient zwischen Fahrzeug und Straße von μ = 0,5 angenommen werden darf ?

Aufgabe 5-4

Eine auf einer schiefen Ebene ruhende Masse m_2 wird von der mit der Geschwindigkeit v_1 auftreffenden Masse m_1 getroffen. Der Stoß erfolgt plastisch, so dass beide Massen sich anschließend gemeinsam bewegen. Bei der Bewegung auf der schiefen Ebene muss Reibung mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ berücksichtigt werden.

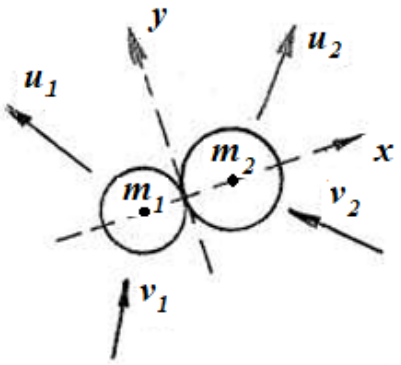
Gegeben: $m_2 = 9\, m_1$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}15$
$v_1 = 50$ m/s (parallel zur schiefen Ebene)

Gesucht: a) u_1 von (m_1+m_2) unmittelbar nach dem Stoß.
b) Weg s^*, den (m_1+m_2) gemeinsam auf der schiefen Ebene zurückgelegt haben, wenn sie den höchsten Punkt erreicht haben.



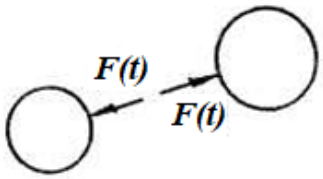
5.2.2 Der schiefe zentrische Stoß

Bei der Behandlung des schiefen zentrischen Stoßes (Schwerpunkte liegen auf der Stoßnormalen, Geschwindigkeiten vor dem Stoß haben jedoch beliebige Richtungen) wird vorausgesetzt, dass die Oberflächen am Stoßpunkt glatt sind, so dass die Stoßkraft nur in Richtung der Stoßnormalen übertragen werden kann. Entsprechend der Skizze wird die x-Achse eines Koordinatensystems so gelegt, dass sie mit der Stoßnormalen zusammenfällt.



Wenn keine Kraftkomponente in y-Richtung übertragen wird, muss in diese Richtung für jede Masse der Impulserhaltungssatz gelten:

$$m_1 u_{1,y} - m_1 v_{1,y} = 0$$
$$m_2 u_{2,y} - m_2 v_{2,y} = 0$$



Aus diesen beiden Gleichungen und der Überlegung, dass in x-Richtung die Beziehungen des geraden zentrischen Stoßes gelten müssen, ergeben sich die

Gleichungen für den schiefen zentrischen Stoß:

$$u_{1,y} = v_{1,y}$$

$$u_{2,y} = v_{2,y}$$

$$m_1 v_{1,x} + m_2 v_{2,x} = m_1 u_{1,x} + m_2 u_{2,x}$$

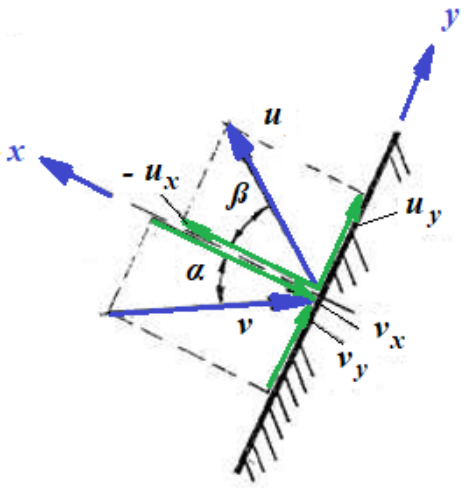
$$k = \frac{u_{1,x} - u_{2,x}}{v_{2,x} - v_{1,x}}$$

Ein wichtiger Sonderfall ist der ***schiefe Stoß gegen eine starre glatte Wand*** ($v_2 = 0$, $m_2 \to \infty$):

$$u_y = v_y$$

$$u_x = -k\, v_x$$

(Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Stoßnormalen bleibt konstant, Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Stoßnormalen wird mit dem Faktor k reduziert und ändert ihre Richtung).



Für den Stoß gegen eine starre glatte Wand gilt also offensichtlich:

$u \leq v$ (u = v nur für den vollkommen elastischen Stoß),

$\alpha \leq \beta$ („Einfallswinkel = Ausfallswinkel" nur für den vollkommen elastischen Stoß),

Außerdem liest man aus der Skizze ab:

$$\tan \alpha = v_y/v_x$$
$$\tan \beta = -u_y/u_x$$

Mit den Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten beim Stoß gegen die starre glatte Wand ergibt sich daraus

$$\tan \beta = k^{-1} \tan \alpha$$

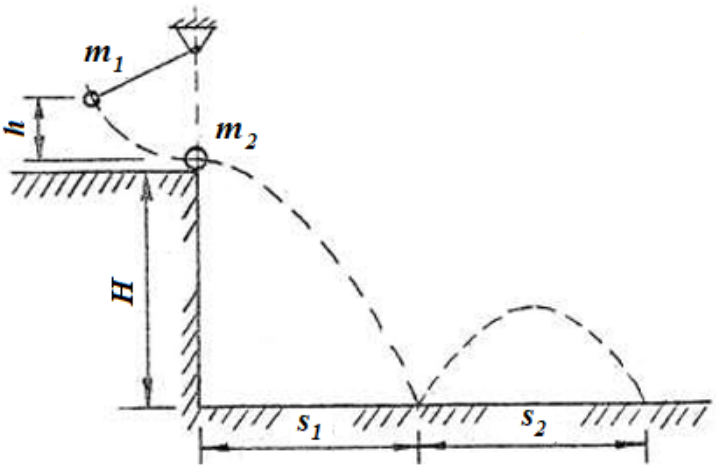
Für die Geschwindigkeit errechnet man auf die gleiche Weise

$$u = v\,(\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}$$

<u>Aufgabe 5-5</u>

Ein an einem Faden hängender Massenpunkt m_1 wird ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen und stößt auf einen ruhenden Massenpunkt m_2 (Stoßzahl k_1).

a) Welche Höhe erreicht m_1 nach dem Stoß in welcher Richtung ?

b) Man ermittle s_1 und s_2 für die Bewegung von m_2 nach dem Stoß, wenn für den Stoß zwischen m_2 und dem glatten starren Untergrund die Stoßzahl k_2 gilt.

Gegeben: $m_2 = 3\ m_1$
$h = 50$ cm
$H = 30$ cm
$k_1 = 0{,}6$
$k_2 = 0{,}5$