3. KINETIK DES MASSENPUNKTES

3.1. Dynamisches Grundgesetz

Alle im Folgenden angestellten Überlegungen basieren auf dem 2. NEWTONschen Axiom:

"Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht in Richtung dieser Kraft. "

Als ***Bewegungsgröße*** wird dabei das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit verstanden, in vektorieller Schreibweise lautet das 2. NEWTONsche Axiom:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

m v wird als Vektor des ***Impulses*** bezeichnet.

Wenn die Masse m zeitlich unveränderlich ist, vereinfacht sich diese Formel zu

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

("Kraft = Masse · Beschleunigung").

Typisch sind zwei Grundaufgaben der Kinetik:

- Das Bewegungsgesetz ist gegeben (aus kinematischen Untersuchungen), gefragt ist nach den Kräften, die diese Bewegungen hervorrufen.
- Kräfte sind gegeben, gefragt ist das Bewegungsgesetz für die Masse.

3.2. Kräfte am Massenpunkt

Eingeprägte Kräfte sind äußere Kräfte, die auf die Masse wirken, z. B. : Gewicht, Magnetkräfte, ...

Reaktionskräfte sind äußere Kräfte, die durch Bewegungseinschränkung hervorgerufen werden, z.B. : Kräfte an Führungen, die Normalkraft zwischen Masse und schiefer Ebene, Lagerreaktionen, ...

Bei beschleunigt bewegten Massen kommen zu diesen äußeren Kräften noch die sogenannten ***Massenkräfte*** hinzu, die je nach Art der Beschleunigung als ***Trägheits-, Zentrifugal- oder Corioliskräfte*** bezeichnet werden.

3.2.1 Gravitation und Schwerkraft

Nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz gilt für die gegenseitige Anziehungskraft zweier Massen m_1 und m_2 die sich im Abstand r voneinander befinden:

$$F_G = \frac{m_1 m_2}{r^2} G$$

mit der Gravitationskonstanten $G = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²

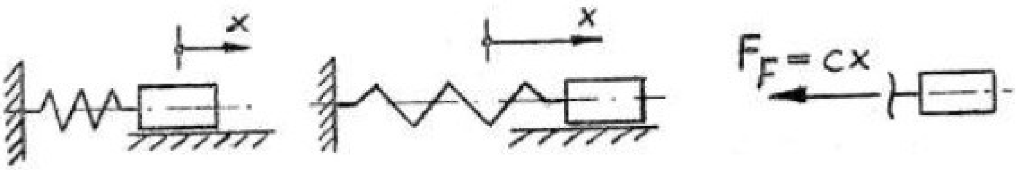
Aufgabe 3-1

Für eine Masse $m_1 = m$ in unmittelbarer Erdnähe ist nach dem Gravitationsgesetz die Anziehungskraft zwischen m_1 und der Erdmasse m_G zu berechnen.

Geg. : Erdmasse $m_G = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg ,
Erdradius $R = 6373$ km

3.2.2 Federkräfte

Die Längenänderung einer Feder hat eine Kraft zur Folge, die entgegen der Richtung der Längenänderung wirkt:



Die Beziehung $F_F = c\,x$ mit der Federzahl c (Dimension z. B. N/mm) gilt für sogenannte lineare Federn, Beispiele dafür sind:

- Schraubenfedern, - Biegefedern, - Zugstab.

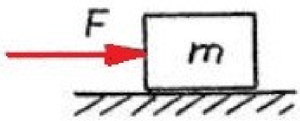
3.2.3 Massenkraft, das Prinzip von d'ALEMBERT

Das 2. NEWTONsche Axiom (bei konstanter Masse)

$$\vec{F} - m\,\vec{a} = 0$$

gilt nur für freie Massen, so dass durch die angreifenden Kräfte die Beschleunigungen auch tatsächlich hervorgerufen werden können. Bei geführten Bewegungen gibt es natürlich Anteile der eingeprägten Kräfte, die sich nicht in Beschleunigungen umsetzen, sondern von den Reaktionskräften im Gleichgewicht gehalten werden.

Beispiel:



Eingeprägte Kräfte:

F: Bei reibungsfreier Bewegung wirkt diese Kraft beschleunigend auf m, bei reibungsbehafteter Bewegung nur die Differenz zwischen F und der Widerstandskraft.

mg: Diese Kraft wirkt nicht beschleunigend, da sie mit der Normalkraft im Gleichgewicht ist.

Schlussfolgerung: Man muss bei geführten Massen in die Formel für das 2. NEWTONsche Axiom alle eingeprägten Kräfte und die Zwangskräfte einsetzen:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_R - m\,\vec{a} = 0$$

Das Prinzip von d'ALEMBERT:

Der bewegte Körper wird freigeschnitten, es werden angetragen

- alle eingeprägten Kräfte,
- alle Reaktionskräfte infolge äußerer Bindungen,
- die Massenkräfte $-m\,\vec{a}$.

Danach können die Gleichgewichtsbedingungen (wie in der Statik) aufgeschrieben werden.

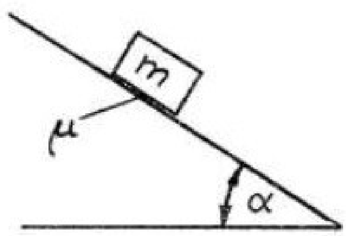
Wegen des Minuszeichens vor der Massenkraft muss diese entgegen der Beschleunigungsrichtung angetragen werden, z. B. bei Normalbeschleunigungen also immer nach außen. Bahnbeschleunigungen, die bei den meisten Aufgabenstellungen ja nicht bekannt sind, werden entgegen der Koordinatenrichtung angetragen, was automatisch auch bei Verzögerungen und Richtungsumkehr der Bewegung zu richtigen Ergebnissen führt.

Aufgabe 3-2

Auf einer schiefen Ebene beginnt eine Masse bei t = 0 aus der Ruhelage heraus abwärt zu rutschen. Unter Berücksichtigung von Reibung zwischen der Masse und der schiefen Ebene sind zu ermitteln:

a) Nach welcher Zeit t* hat die Masse auf der schiefen Ebene die Strecke s* = 3 m zurückgelegt?

b) Welche Geschwindigkeit v* hat ***m*** zu diesem Zeitpunkt?



Geg.: m = 10 kg
$\alpha = 30°$
$\mu = 0{,}2$

3.3. Integration des dynamischen Grundgesetzes

Abhängig von der Aufgabenstellung kann es zweckmäßig sein, das Prinzip von d'ALEMBERT zu nutzen und über das Aufschreiben des Kraftgleichgewichts mit anschließender Integration zu den Bewegungsgleichungen zu kommen oder aber einen der nachfolgend behandelten Integrationswege zu gehen.

3.3.1 Der Impulssatz

Aus dem dynamischen Grundgesetz

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad bzw. \quad \vec{F}\,dt = d(m\vec{v})$$

erhält man durch beidseitige bestimmte Integration den ***Impulssatz***:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\,dt = (m\vec{v})_1 - (m\vec{v})_0$$

Er eignet sich besonders für Aufgaben, bei denen nach einer Geschwindigkeit bei bekannter Kraftwirkung über die Zeit gefragt wird.

Aufgabe 3-3

Durch Einwirkung einer konstanten Bremskraft F = 2 kN über $\Delta t = 3$ s wird ein Fahrzeug mit der Masse m = 1000 kg, das sich mit v = 100 km/h bewegte, abgebremst. Wie groß ist danach seine Geschwindigkeit v_E ?

Für den einzelnen Massenpunkt hat der Impulssatz nur untergeordnete Bedeutung, er gilt jedoch auch für ein System von Massenpunkten.

Sonderfall ***Impulserhaltungssatz***:

Wirkt keine äußere Kraft auf, den Massenpunkt, so bleibt der Impuls erhalten:

$$m\,\vec{v} = \text{konst.}$$

3.3.2 Arbeit, Energie, Leistung

Arbeit ist das Produkt aus dem Weg und der tangential zur Bahnrichtung wirkenden Kraft:

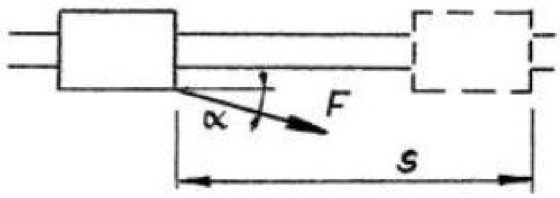
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_S\, ds$$

(F_S ist der Betrag der Komponente des Kraftvektors in Richtung der Bahntangente).

W ist eine skalare Größe mit der Dimension Kraft · Länge, z. B. ***1 Nm = 1 J***

Aufgabe 3-4

Ein Waggon wird mit einer Kraft F = 10 kN, die unter einem Winkel $\alpha = 20°$ angreift, über eine Strecke s = 40 m bewegt. Welche Arbeit wurde geleistet?



Bei einer ***Drehbewegung*** mit stets tangential am Hebelarm R angreifender Kraft F gilt wegen $ds = R\, d\varphi$ und $M = F\, R$:

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F\, R\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\, d\varphi$$

Arbeit kann immer nur von den an einem System angreifenden äußeren Kräften geleistet werden.

Weitere Gleichungen zur Ermittlung der Arbeit W:

$$W_{pot} = m\, g\, h$$

$$W_{Feder} = \tfrac{1}{2}\, c\, s^2$$

$$W_{Reibung} = F_N\, \mu\, s$$

Energie ist das Vermögen, Arbeit zu leisten. So hat z. B. die Gewichtskraft das Vermögen (das Potential), eine Arbeit (bezogen auf ein willkürlich zu wählendes Null-Potential) W = mgh zu leisten, wenn sich die Masse m in der Höhe h befindet: "Die Masse m hat in der Höhe h über dem Nullpotential die potentielle Energie W_{pot} = mgh. "

In die Definition der Arbeit geht die Zeit nicht ein. Ein Maß, welche Arbeit pro Zeiteinheit geleistet wurde, ist die ***Leistung***

$$P = dW/dt$$

Für eine in Wegrichtung konstante Kraft F gilt somit

$$P = F \cdot ds/dt = F \cdot v$$

bzw. bei einer Drehbewegung

$$P = M\,\omega$$

Die Dimension der Leistung ist Arbeit/Zeit, z. B. : ***1 Nm/s = 1 J/s = 1 W***,
(für die Arbeit werden häufig auch die Leistungseinheiten verwendet, z. B. Ws oder kWh.)

3.3.3 Der Energiesatz

Die Integration des dynamischen Grundgesetzes

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

über den Weg liefert

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d(m\vec{v})}{dt}\, d\vec{r}$$

woraus man mit $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ bei m = konst. erhält:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r} = m \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{v}\, d\vec{v}$$

Wenn wieder mit F_S der Betrag der Kraftkomponente in Richtung der Bahntangente bezeichnet wird, erhält man damit bei Integration der rechten Seite:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_S\, ds = \frac{m}{2} v_2^{\,2} - \frac{m}{2} v_1^{\,2}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht der Ausdruck für die Arbeit der äußeren Kraft, auf der rechten Seite die Differenz der sogenannten kinetischen Energie am Ende bzw. Beginn des Integrationsweges.

Die kinetische Energie **$W_{kin} = ½\, m\, v^2$** ist das Arbeitsvermögen der Punktmasse m infolge ihrer Bewegung mit der Geschwindigkeit v.

In der aufgeschriebenen mathematischen Formulierung heißt die Beziehung Arbeitssatz:

Die von der äußeren Kraft F_S längs des Weges s geleistete Arbeit ist gleich der Differenz der kinetischen Energie zwischen End- und Anfangszustand der betrachteten Bewegung.

Für ***Potentialkräfte*** ist die Integration

$$\int_{s_1}^{s_2} F_S \, ds$$

vom Integrationsweg unabhängig (Beispiele für Potentialkräfte: Schwerkraft, Federkraft). Am Beispiel der Schwerkraft soll die vereinfachte Behandlung von Potentialkräften demonstriert werden: Die vertikal gerichtete Kraft mg leistet bei beliebigem Weg nur jeweils in Richtung der vertikalen Komponente des Weges Arbeit, so dass das Ergebnis der Integration nur von der Höhendifferenz der beiden Endpunkte der Bewegung abhängt. Der Arbeitssatz vereinfacht sich damit, wenn nur die Schwerkraft als äußere Kraft wirkt:

$$\mathbf{mg\,(h_1 - h_2) = \tfrac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,v_1^2}$$

bzw.

$$\mathbf{mg\,h_1 + \tfrac{1}{2}\,m\,v_1^2 = mg\,h_2 + \tfrac{1}{2}\,m\,v_2^2}$$

Mit der potentiellen Energie

$W_{pot} = mg\,h$

(mit der Höhe h, die sich auf ein beliebig festzulegendes Null-Potential bezieht) kann dann unter Voraussetzung, dass nur Potentialkräfte wirken, der Energiesatz formuliert werden:

$$\mathbf{W_{pot,1} + W_{kin,1} = W_{pot,2} + W_{kin,2}} \qquad (*)$$

Die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ist konstant.

Da Federkräfte auch Potentialkräfte sind, kann die potentielle Energie einer linearen Feder

$$\mathbf{W_{pot,F} = \tfrac{1}{2}\;c\,s^2}$$

(s - Verlängerung oder Verkürzung der Feder) den jeweiligen potentiellen Energien in der Beziehung (*) zugeschlagen werden.

Wenn neben den Potentialkräften noch andere Kräfte wirken, so muss die von ihnen verrichtete Arbeit über das Arbeitsintegral in die Energiebilanz einbezogen werden, und man verwendet den erweiterten Energiesatz:

$$\mathbf{W_{pot,1} + W_{kin,1} + W_{An} - W_{Ab} = W_{pot,2} + W_{kin,2}}$$

Darin ist W_{An} bzw. W_{Ab} die zwischen Zustand 1 und Zustand 2 durch die Nichtpotentialkräfte verrichtete Arbeit. Diese ist positiv (W_{An}), wenn Energie zugeführt wird (Antriebskräfte), negativ (W_{Ab}), wenn Energie abgeführt wird (Abtriebskräfte, Reibung).

Da in die Energiebetrachtungen im Wesentlichen Geschwindigkeiten und Wege eingehen, ist bei Aufgaben, wo weder Zeiten gegeben noch gefragt sind, die Lösung mit Hilfe des Energiesatzes im Allgemeinen anderen Lösungsverfahren vorzuziehen. Empfohlen werden folgende Schritte zur Lösung von Aufgaben mit Hilfe des Energiesatzes:

a) **Definition von zwei zu betrachtenden Zustände 1 und 2,**

b) **Festlegen der Nullpotentiallinie (horizontale Linie) als Bezugslinie für die potentielle Energie der Lage (infolge Schwerkraft),**

c) **Aufstellen der Energiebilanz:**

Summe aus kinetischer und potentieller Energie (Energie der Lage und Federenergie) im Zustand 1

+

Zugeführte Energie (Antrieb) während der Bewegung von 1 nach 2

–

Abgeführte Energie während der Bewegung von 1 nach 2 (Abtrieb, Reibung)

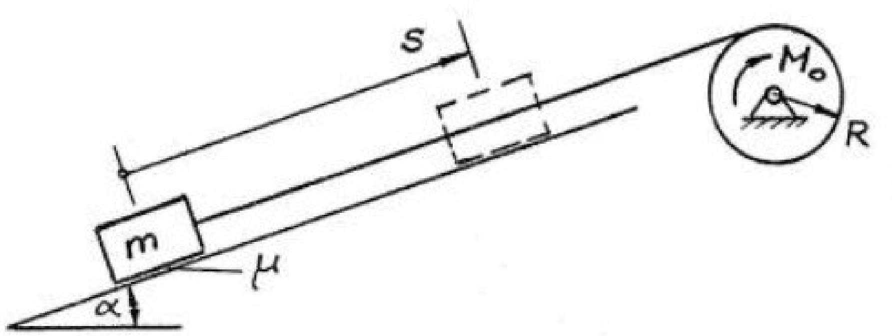
=

Summe aus kinetischer und potentieller Energie (Energie der Lage und Federenergie) im Zustand 2.

Aufgabe 3-5

Eine Winde zieht mit konstantem Moment $\boldsymbol{M_o}$ eine Masse $\boldsymbol{m}$ eine schiefe Ebene hinauf. Zwischen der Masse $\boldsymbol{m}$ und der schiefen Ebene ist Gleitreibung mit dem Gleitreibungskoeffizienten $\boldsymbol{\mu}$ zu berücksichtigen. Die Masse der Winde kann vernachlässigt werden. Die Bewegung beginnt aus der Ruhe heraus.

Geg.: $M_o = 4$ Nm
$m = 2$ kg
$\alpha = 15°$
$s = 1$ m
$R = 0{,}1$ m
$\mu = 0{,}3$



Wie groß ist die Geschwindigkeit v der Masse m, nachdem sie den Weg s zurückgelegt hat?

4. KINETIK STARRER KÖRPER

Die Bewegung eines starren Körpers wird beschrieben (vgl. "Kinematik starrer Körper") als Translation eines Körperpunktes und Rotation aller übrigen Körperpunkte um diesen Punkt.

4.1. Translation

Für die translatorische Bewegung (alle Punkte bewegen sich auf kongruenten Bahnen) kann man sich die Masse des Körpers in einem beliebigen Punkt konzentriert denken und die Gesetze für die Kinetik des Massenpunkts anwenden. Da für die Behandlung der allgemeinen Bewegung (Translation mit überlagerter Rotation) vielfach der Schwerpunkt als Bezugspunkt gewählt werden muss, wird empfohlen, für die Translation allgemein den Schwerpunkt als den Körperpunkt anzusehen, in dem die Masse konzentriert ist. Dann rechnet man nach den Verfahren der Kinetik des Massenpunkts mit:

$m\,\ddot{x}_S$	d'ALEMBERTsche Kraft,
$m\,v_S^2/2$	kinetische (Translations-) Energie,
$m\,v_S$	Impuls.

Dabei ist m die Gesamtmasse des Körpers, der Index S steht für "Schwerpunkt" .

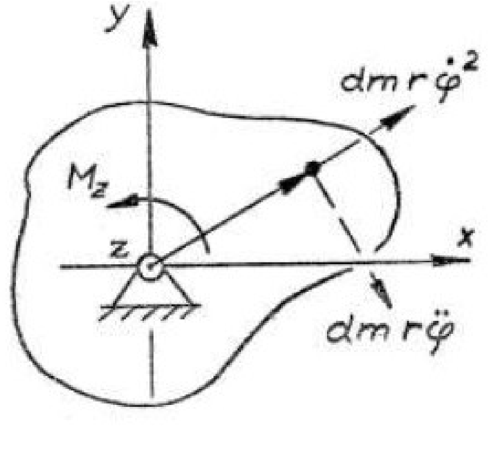
4.2. Rotation um eine feste Achse

Die skizzierte Masse dreht sich um die feste Achse z. M_z ist das resultierende Moment aller ***äußeren Kräfte***.

Ein Massenelement dm im Abstand r von der Drehachse z erfährt dabei eine Bahnbeschleunigung $r\varphi$ und eine Normalbeschleunigung $r\varphi^2$, so dass die Massenkräfte

$$dm\ r\ \varphi \text{ und } dm\ r\ \varphi^2$$

anzutragen sind.



Die nach außen gerichteten Zentrifugalkräfte $dm\ r\ \varphi^2$ heben sich zum Teil auf, die verbleibenden belasten die Drehachse.

Auch die resultierende Kraft aus den Massenkräften dm r φ belastet die Drehachse, während ihre Momentwirkungen mit dem äußeren Moment im Gleichgewicht sein müssen:

$$M_z = \int_{(m)} r^2 \ddot{\varphi}\, dm = \ddot{\varphi} \int_{(m)} r^2 dm$$

Der Ausdruck

$$J = \int_{(m)} r^2 dm$$

wird Massenträgheitsmoment der Masse m genannt,

$$J\ddot{\varphi}$$

ist das sogenannte ***d'ALEMBERTsches Moment*.**

Die kinetische Energie einer sich um eine feste Achse drehenden Masse ergibt sich als Summe der kinetischen Energien der Massenelemente dm, die sich mit der Bahngeschwindigkeit r bewegen:

$$W_{kin,rot} = \int_{(m)} \frac{1}{2} (r\dot{\varphi})^2\, dm = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \int_{(m)} r^2 dm$$

Damit ergibt sich als kinetische Rotationsenergie:

$$W_{kin,rot} = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2$$

<u>4.3. Massenträgheitsmomente</u>

Das Massenträgheitsmoment der Masse m berechnet sich nach der Formel

$$J = \int_{(m)} r^2 dm$$

(Dimension z. B. : kg cm^2) und ist ein Maß für die Drehträgheit der Masse. Der sich nach dieser Formel ergebende Wert bezieht sich immer auf eine ganz bestimmte Drehachse, so dass zu jeder Angabe eines Massenträgheitsmoments die Angabe der Drehachse gehört.

Für Körper, die sich aus mehreren Teilmassen zusammensetzen, gilt:

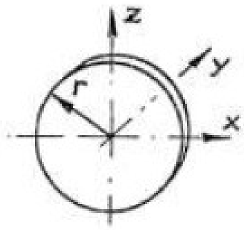
Massenträgheitsmomente, die sich auf gleiche Drehachsen beziehen, dürfen addiert bzw. subtrahiert werden.

4.3.1 Massenträgheitsmomente einfacher Körper

Massenträgheitsmomente können mit der Formel (Kap. 4.3) berechnet oder aus Tabellenbüchern entnommen werden.
Einige Formeln zur Berechnung der Massenträgheitsmomente häufig verwendeter Körper sind im Folgenden angegeben:

a) DÜNNE KREISSCHEIBE mit dem Radius r und der Masse m, bezogen auf die durch den Schwerpunkt der Scheibe gehenden Achsen x, y, z:

$$J_{S,\,x,\,\mathrm{Kreisscheibe}} = m\,r^2 / 4$$
$$J_{S,\,y,\,\mathrm{Kreisscheibe}} = m\,r^2 / 2$$
$$J_{S,\,z,\,\mathrm{Kreisscheibe}} = m\,r^2 / 4$$

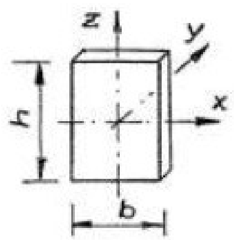


b) HOHLZYLINDER $J_{S,\,\mathrm{Hohlzylinder}}$ mit der Gesamtmasse m, dem Innenradius r_i und dem Außenradius r_a , bezogen auf die Zylinderachse

$$J_{S,\,\mathrm{Hohlzylinder}} = m\,(r_i^2 + r_a^2) / 2$$

c) DÜNNE RECHTECKSCHEIBE mit den Abmessungen b und h und der Masse m, bezogen auf die durch den Schwerpunkt der Scheibe gehenden Achsen x, y, z:

$$J_{S,\,x,\,\mathrm{Rechteckscheibe}} = m\,h^2 / 12$$
$$J_{S,\,y,\,\mathrm{Rechteckscheibe}} = m\,(b^2 + h^2) / 12$$
$$J_{S,\,z,\,\mathrm{Rechteckscheibe}} = m\,b^2 / 12$$

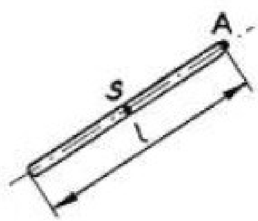


d) KUGEL mit dem Radius rund der Masse m, bezogen auf eine beliebige Achse durch den Kugelmittelpunkt:

$$J_{S,\,\mathrm{Kugel}} = 0{,}4\ m\,r^2$$

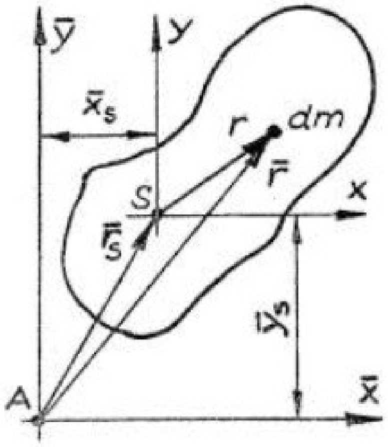
e) DÜNNWANDIGER STAB mit der Masse m und der Länge l, bezogen auf die Drehachse durch den Schwerpunkt, die senkrecht aus der Zeichenebene ragt.

$$J_S = m\,l^2 / 12$$



4.3.2 Der Satz von STEINER

Analog zum STEINERschen Satz für Flächenträgheitsmomente gibt es auch für die Massenträgheitsmomente eine Formel, mit der bei gegebenem Massenträgheitsmoment durch eine Schwerpunktachse das Massenträgheitsmoment bezüglich einer dazu parallelen Achse berechnet werden kann.



In der Skizze sollen die Achsen x und y durch den Schwerpunkt des Körpers gehen. Gegeben sei das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich einer Achse z senkrecht zu x und y und die Masse des Körpers m, gesucht ist das Massenträgheitsmoment J_A bezüglich einer zu z parallelen Achse durch den Punkt A im Abstand r_S von S.

Aus der Skizze kann man die Beziehung

$$\bar{r}^2 = (x_S + x)^2 + (y_S + y)^2$$

ablesen.

Wenn man diesen Ausdruck in die Integralformel für das Trägheitsmoment

$$J_A = \int_{(m)} \bar{r}^2 dm$$

einsetzt, so ergibt sich unter Beachtung der Tatsache, dass die statischen Momente

$$\int_{(m)} x\,dm \quad bzw \quad \int_{(m)} y\,dm$$

die sich auf die Schwerpunktachsen beziehen, gleich Null sind, eine Formel, mit der J_A bei bekanntem J_S berechnet werden kann.

Es ist der STEINERsche Satz:

$$J_A = J_S + m\bar{r}_S^{\,2}$$

Bei der Anwendung dieser Formel ist zu beachten, dass A einen beliebigen Punkt und S den Schwerpunkt des Körpers bezeichnen. Die beiden durch diese Punkte gehenden Achsen, auf die sich J_A bzw. J_S beziehen, müssen parallel sein. Ihr Abstand ist r_S , m ist die Gesamtmasse des Körpers.

Aufgabe 4-1

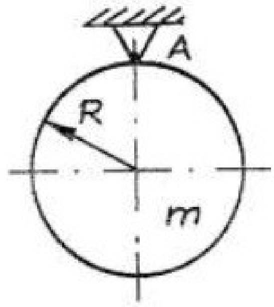
Berechnen Sie mit Hilfe des STEINERschen Satzes das Massenträgheitsmoment für den dünnen Stab bei Rotation um den Randpunkt A. Die Drehachse steht wieder senkrecht zur Zeichenebne (s. Bild S. 44).

Aufgabe 4-2

Die skizzierte dünne Kreisscheibe ist am Rand aufgehängt.

Geg.: m, R

Ges.: Massenträgheitsmoment J_A bezüglich einer Achse, die senkrecht zur Zeichenebene gerichtet ist und durch den Punkt A geht.



Aufgabe 4-2.1

Die Schwungmasse aus Alu $\rho_{Al} = 2{,}7$ kg/dm³ besteht aus einem Ring mit Außendurchmesser D = 80 mm, einer Zylinderbohrung mit d = 20 mm und 4 gleichen quadratischen Löchern der Abmessung: 15 mm * 15 mm * 15 mm. (s. Skizze)

Bestimmen Sie:

a) Gesamtmasse der Schwungscheibe
b) Massenträgheitsmoment ***J*** der Schwungscheibe