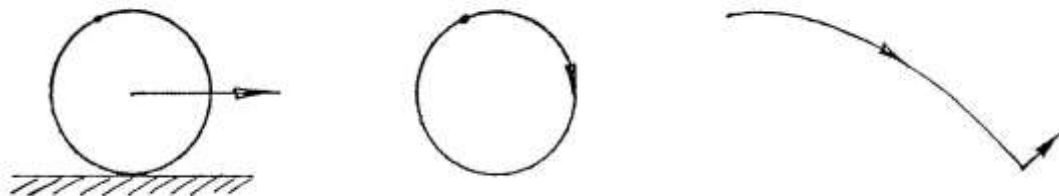


- Ein Punkt auf dem Umfang eines Rades führt aus der Sicht des mitfahrenden Beobachters eine Kreisbewegung aus, für den ruhenden Beobachter bewegt sich der Punkt auf einer Zykloide:



Bahnkurve für
mitfahrenden nicht mitfahrenden
Beobachter

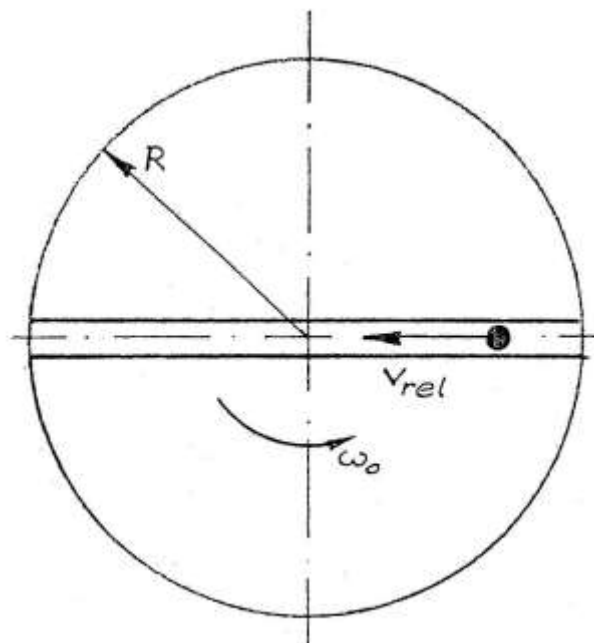
In diesem Abschnitt sollen Probleme behandelt werden, bei denen sich ein Punkt relativ zu einem sich ebenfalls bewegenden starren Körper bewegt.

Aufgabe 2-6

Eine Kreisscheibe rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt ein Punkt P vom Außenrand aus eine Bewegung mit konstanter Relativgeschwindigkeit v_{rel} radial nach innen.

Gegeben: $R, \omega_0, v_{\text{rel}}$

- Man schreibe den Ortsvektor für den Punkt P in einem festen (nicht mit rotierenden) Koordinatensystem auf.
- Man ermittle den Geschwindigkeitsvektor und den Beschleunigungsvektor für den Punkt P bezüglich des festen Koordinatensystems durch Differentiation des Ortsvektors und diskutiere die einzelnen Anteile.



Lösung:

a)

$$\vec{r}(t) = (R - v_{rel}t) \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{bmatrix}$$

b)

$$\vec{v}(t) = (R - v_{rel}t)\omega_0 \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{bmatrix} + v_{rel} \begin{bmatrix} -\cos(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = (R - v_{rel}t)\omega_0^2 \begin{bmatrix} -\cos(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) \end{bmatrix} + 2v_{rel}\omega_0 \begin{bmatrix} \sin(\omega_0 t) \\ -\cos(\omega_0 t) \end{bmatrix}$$

Die Vektoren

$$\begin{bmatrix} \pm \cos \omega_0(t) \\ \pm \sin \omega_0(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \pm \sin \omega_0(t) \\ \pm \cos \omega_0(t) \end{bmatrix}$$

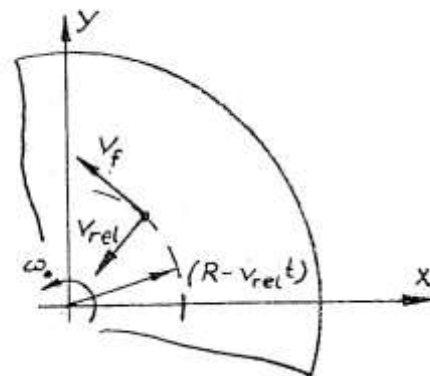
sind wegen $\sin^2 \omega_0(t) + \cos^2 \omega_0(t) = 1$ Einheitsvektoren, so dass die Faktoren vor diesen Vektoren in der Lösung von Aufgabe 2-6 deren Beträge sind.

Das Ergebnis dieser Aufgabe gestattet eine sehr anschauliche Interpretation der bei solchen Relativbewegungen auftretenden Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanteilen:

Der Geschwindigkeitsvektor v setzt sich wie erwartet aus der **Führungsgeschwindigkeit** mit dem Betrag

$$v_f = (R - v_{rel}t) \omega_0$$

(Bahngeschwindigkeit des Punktes der rotierenden Scheibe, in dem sich der Punkt P zur Zeit t gerade befindet) und der **Relativgeschwindigkeit** mit dem Betrag v_{rel} zusammen. Die nebenstehende Skizze zeigt diese beiden Anteile.



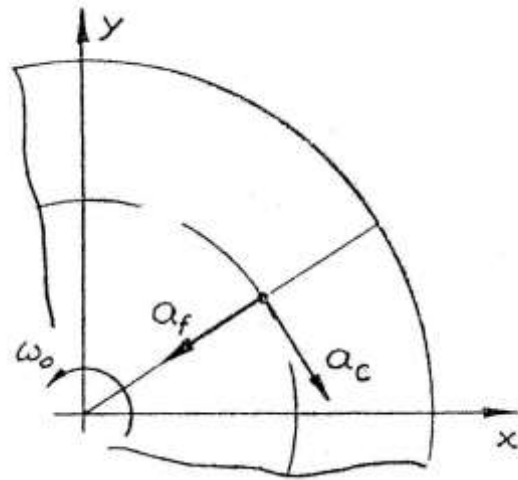
Auch bei der Beschleunigung wird der erste Summand des Ergebnisses durch die Führungsbewegung (Drehung der Scheibe} verursacht: Es ist die Normalbeschleunigung des sich auf einem Kreis mit dem Radius $(R - v_{\text{rel}} t)$ bewegendes Punktes der Scheibe, in dem sich P gerade befindet. Diese sogenannte **Führungsbeschleunigung** a_f könnte im allgemeinen Fall noch um die Bahnbeschleunigung dieses Punktes ergänzt werden müssen, wenn die Führungsgeschwindigkeit (hier die Winkelgeschwindigkeit ω_0) nicht konstant ist.

Eine im Allgemeinen auch mögliche **Relativbeschleunigung** a_{rel} kommt im Ergebnis nicht vor, weil die Relativgeschwindigkeit des Punktes P gegenüber der Scheibe konstant ist.

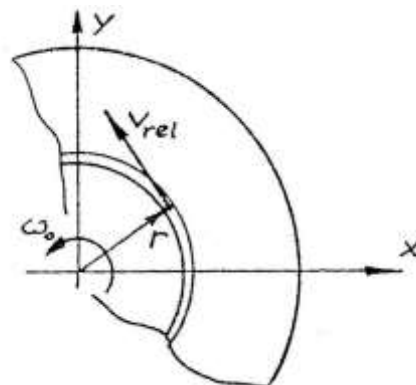
Dafür tritt ein Beschleunigungsanteil auf, der nur in der Kombination der beiden Bewegungen seine Ursache haben kann, da diese sogenannte **Coriolisbeschleunigung**

$$a_C = 2 \omega_0 v_{\text{rel}}$$

(nach dem französischen Physiker G. G. CORIOLIS, 1792 -1843) das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung und der Relativgeschwindigkeit enthält. In dem betrachteten Beispiel kann die Coriolisbeschleunigung als „Verzögerung“ interpretiert werden, die der Punkt P erfährt, weil er sich aus Bereichen höherer Führungsgeschwindigkeit auf das Niveau geringerer Führungsgeschwindigkeit (kleinerer Radius bei gleicher Winkelgeschwindigkeit ω_0) begibt. Demnach ist dieser Beschleunigungsanteil in diesem Fall der Führungsgeschwindigkeit entgegengerichtet.



Aber auch dann, wenn die Relativbewegung nicht in radialer Richtung erfolgt, ergibt sich ein entsprechender Beschleunigungsanteil, wie sich am Beispiel einer Relativbewegung in Umfangsrichtung leicht plausibel machen lässt:



Der Punkt P möge sich in einer kreisförmigen Rinne mit dem Radius r auf einer mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotierenden Scheibe bewegen. Die ebenfalls konstante

Relativgeschwindigkeit v_{rel} habe die gleiche Richtung wie die Führungsgeschwindigkeit

$$v_f = r \omega_o$$

so dass sich P mit der konstanten Gesamtgeschwindigkeit

$$v = r \omega_o + v_{\text{rel}}$$

auf einem Kreis mit dem Radius r bewegt. Dann erfährt er ausschließlich eine Normalbeschleunigung

$$a = v^2/r$$

$$a = (r \omega_o + v_{\text{rel}})^2/r$$

$$a = r \omega_o^2 + v_{\text{rel}}^2/r + 2 \omega_o v_{\text{rel}}$$

$$a = a_f + a_{\text{rel}} + a_c$$

Auch in diesem Fall kommt zur

Führungsbeschleunigung a_f (Beschleunigung infolge Kreisbewegung mit ω_o) und zur Relativbeschleunigung a_{rel} (Beschleunigung infolge Kreisbewegung mit v_{rel}) noch die Coriolis-Beschleunigung a_c (Beschleunigung infolge Überlagerung zweier Kreisbewegungen) hinzu. Bei diesem Beispiel sind alle drei Beschleunigungsanteile gleichgerichtet.

Die an den beiden Beispielen angestellten Überlegungen demonstrierten zwei grundsätzlich unterschiedliche Betrachtungsweisen für die Behandlung der Bewegung eines Punktes relativ zu einem sich ebenfalls bewegenden starren Körper:

- Die Bewegung des Massenpunktes wird mit einem Ortsvektor bezüglich eines festen Koordinatensystems beschrieben. Dann lassen sich Absolutgeschwindigkeit und Absolutbeschleunigung nach den Regeln der Kinematik des Massenpunktes durch Differenzieren ermitteln. Dieser Weg ist in vielen Fällen mathematisch recht aufwendig.
- Es werden Führungsbewegung (Bewegung des Punktes des starren Körpers, in dem sich der Massenpunkt gerade befindet, bezüglich eines festen Koordinatensystems) und Relativbewegung (Bewegung des Massenpunktes relativ zum starren Körper) gesondert betrachtet. Absolutgeschwindigkeit und Absolutbeschleunigung werden dann durch Überlagerung ermittelt.

Ohne die an den Beispielen plausibel gemachten Erkenntnisse noch einmal in allgemeiner Form herzuleiten, sollen die Regeln für die Behandlung der Relativbewegung nach Variante b) noch einmal zusammengestellt werden.

Bewegung eines Punktes relativ zu einem sich ebenfalls bewegenden starren Körpers:

Es ist die Führungsbewegung des Punktes des starren Körpers zu betrachten, in dem sich der Massenpunkt gerade befindet. Nach den Regeln der Starrkörperbewegung kann sich somit die Führungsgeschwindigkeit v_f aus zwei Anteilen, die Führungsbeschleunigung a_f aus vier Anteilen zusammensetzen. Bei diesen Überlegungen spielt die Relativbewegung keine Rolle.

Bei der Betrachtung der Relativbewegung kann das Führungssystem als in Ruhe befindlich angesehen werden. Nach den Regeln der Kinematik des Massenpunktes kann neben der Relativgeschwindigkeit v_{rel} eine aus zwei Anteilen zu bildende Relativbeschleunigung a_{rel} zu berücksichtigen sein.

Die Absolutgeschwindigkeit ergibt sich aus der vektoriellen Addition von Führungs- und Relativgeschwindigkeit.

Bei der Ermittlung der Absolutbeschleunigung ist neben Führungs- und Relativbeschleunigung nach die Coriolisbeschleunigung

$$a_C = 2 \omega_f v_{rel}$$

zu berücksichtigen (ω_f = Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung). Diese Formel für die Berechnung des Betrages der Coriolisbeschleunigung gilt nur, wenn die Vektoren der Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung und der Relativgeschwindigkeit senkrecht zueinander sind (ebene Bewegung). Allgemein gilt (auch für die Bewegung im Raum): Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung, der Vektor der Relativbewegung und der Vektor der Coriolisbeschleunigung

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_f \times \vec{v}_{rel}$$

bilden ein Rechtssystem. Der Betrag des Vektors a_C ist der Betrag der Coriolisbeschleunigung a_C . (a_C steht senkrecht auf v_{rel} , d.h. Drehung um 90° in Richtung ω_f).

Die Coriolisbeschleunigung ist Null, wenn die Führungsbewegung eine reine Translation ist (oder wenn der Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Führungsbewegung und der Vektor der Relativgeschwindigkeit parallel sind).

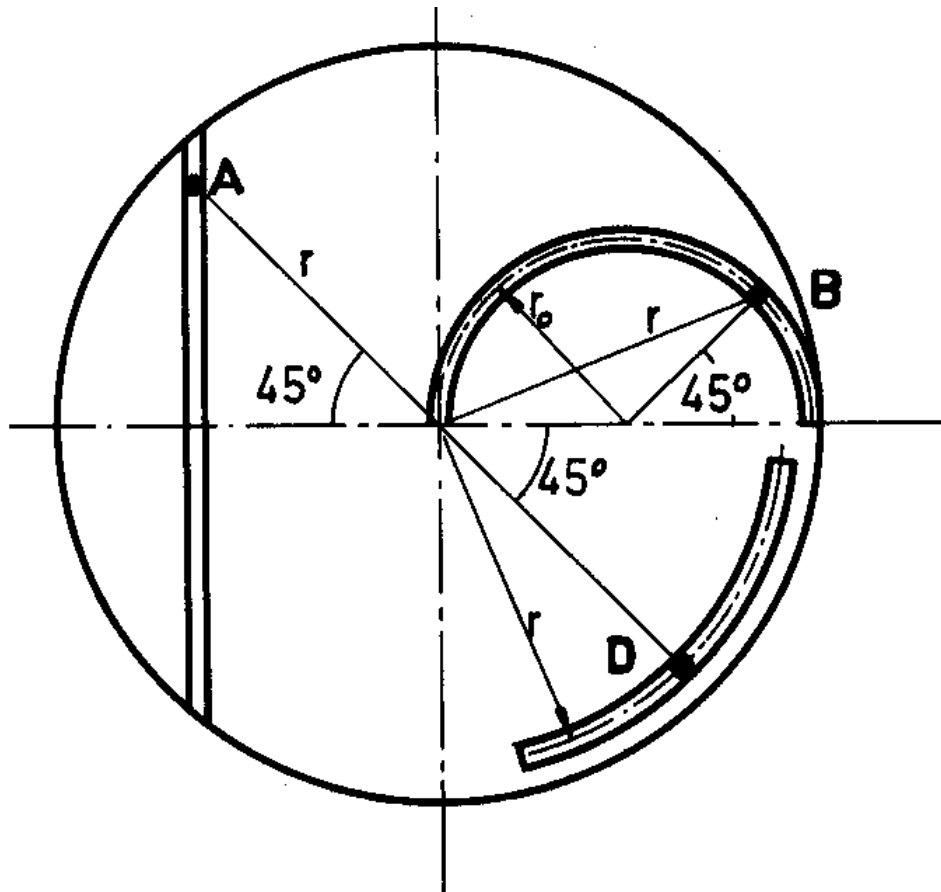
Die Absolutbeschleunigung ergibt sich aus der vektoriellen Addition von Führungs-, Relativ- und Coriolisbeschleunigung.

Im folgenden Beispiel werden die einzelnen Anteile skizziert, die im allgemeinsten Fall aus der Betrachtung der Bewegung des starren Körpers (Führungsbewegung) und der Bewegung des Punktes (Relativbewegung) hervorgehen können.

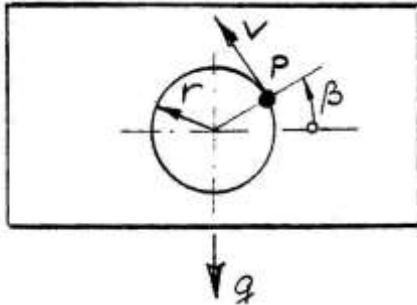
Aufgabe 2-7

Die skizzierte Scheibe rotiert um ihren Mittelpunkt beschleunigt im Uhrzeigersinn mit den momentanen Werten $\omega = 2,0 \text{ s}^{-1}$ und $\alpha = 3,0 \text{ s}^{-2}$.

Die Punkte A, B, D bewegen sich beschleunigt mit $v = 1,2 \text{ m/s}$ und $a = 2,5 \text{ m/s}^2$ in den eingezeichneten Schlitzen und zwar A nach oben, B nach rechts und D nach links unten. Der Abstand der einzelnen Punkte vom Drehpunkt beträgt $r = 1,0 \text{ m}$. Zu bestimmen sind die Gesamtbeschleunigungen von A, B, D.



Aufgabe 2-8



Auf einer Scheibe kreist ein Punkt mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v . Wie groß ist der Betrag der Absolutbeschleunigung des Punktes P in Abhängigkeit vom Winkel β , wenn die Scheibe sich mit der Beschleunigung g abwärts bewegt?

Lösung: $a = [g^2 + (v^2/r) \cdot (v^2/r + 2 g \sin \beta)]^{1/2}$

2.3. Systeme starrer Körper

2.3.1. Freiheitsgrade, Zwangsbedingungen

Die Lage eines starren Körpers im Raum kann durch die Angabe von 6 Koordinaten eindeutig beschrieben werden. Wenn der Körper durch keine Bindungen behindert wird, kann er bei der Bewegung diese Koordinaten unabhängig voneinander ändern:

- Der starre (durch keine Bindungen behinderte) Körper im Raum hat sechs Freiheitsgrade.

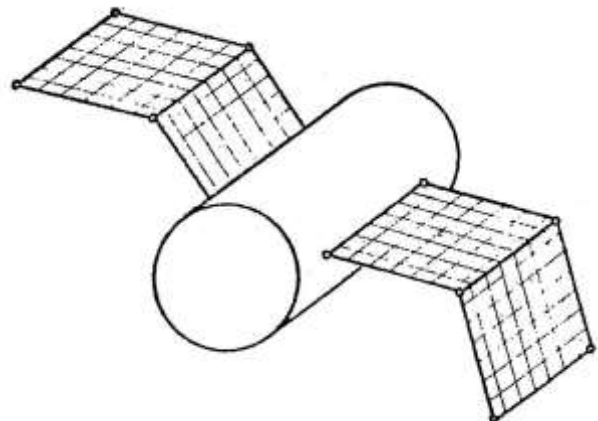
Mehrere (n) Körper im Raum, die nicht gekoppelt sind, haben $6 \cdot n$ Freiheitsgrade. Bestehen Kopplungen, so können diese starr (z. B. Gelenke, starre Seile oder Stäbe) oder nicht starr (z. B. elastische Federn) sein.

Nicht starre Kopplungen schränken die Zahl der Freiheitsgrade nicht ein, es wirken aber Kräfte zwischen den Körpern über die Kopplungselemente (werden erst in der Kinetik behandelt).

Starre Kopplungen (**kinematische** Kopplungen) schränken die Zahl der Freiheitsgrade ein, da zwischen den Koordinaten, die die Lage der Körper beschreiben, feste Beziehungen bestehen, die sogenannten **Zwangsbedingungen**.

Beispiel:

Das skizzierte kinematische Modell eines Satelliten mit "Sonnenpaddeln" besteht aus 5 starren Körpern und hat 10 Freiheitsgrade:



Die Lage eines Körpers (z. B. des Satellitenkörpers) ist durch die Angabe von 6 Koordinaten bestimmt.

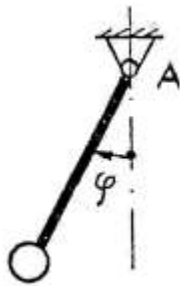
Nach Fixierung des Satellitenkörpers durch diese 6 Koordinaten können die beiden unmittelbar an ihm befestigten Paddel nur noch je eine (von der Lage des Satelliten unabhängige) Drehbewegung ausführen, die durch jeweils eine weitere Koordinate beschrieben wird.

Entsprechendes gilt für die Außenpaddel, nachdem auch die Lage der Innenpaddel festgelegt wurde.

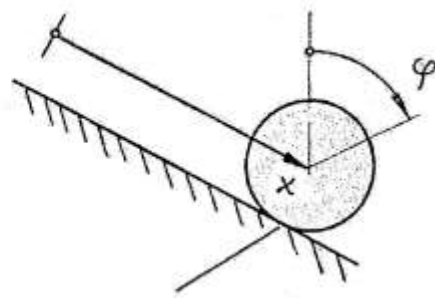
2.3.2. Ebene Systeme

In der Ebene hat ein starrer Körper drei Freiheitsgrade. Durch starre Bindungen oder Führung auf Bahnen kann diese Zahl verringert werden.

Beispiele:



Die Aufhängung des Pendels schränkt zwei Freiheitsgrade ein (möglich bleibt die Drehung um A).



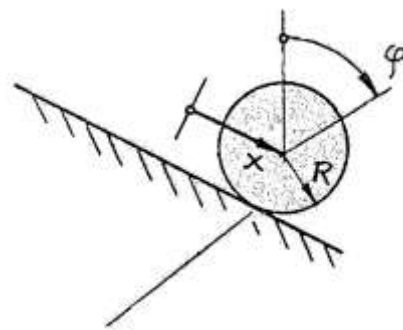
glatt, Schlupf möglich

Einer auf einer glatten Bahn geführte Walze verbleiben zwei Freiheitsgrade (Führung schränkt einen Freiheitsgrad ein). Es besteht kein Zusammenhang zwischen den Koordinaten x und φ .

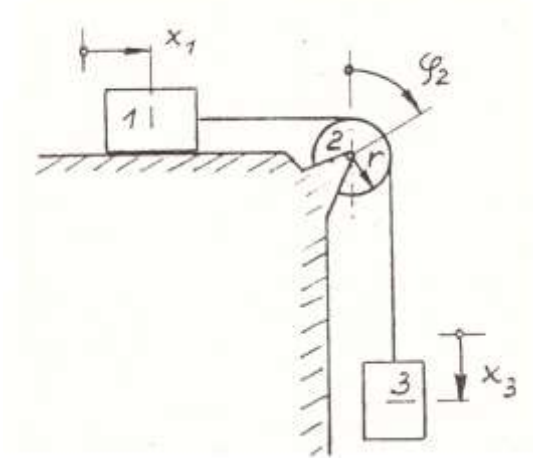
Die Führung einer Walze auf einer Bahn bei Voraussetzung einer reinen Rollbewegung schränkt zwei Freiheitsgrade ein, weil zwischen den Koordinaten x und φ der Zusammenhang

$$x = R \varphi$$

(Rollbedingung) besteht.



reines Rollen, kein Schlupf



Das nebenstehend skizzierte System aus drei starren Körpern hat unter den Voraussetzungen, dass das Verbindungsseil starr ist, die Rolle 2 schlupffrei vom Seil mitgenommen wird und Körper 3 sich nur vertikal bewegt (nicht pendelt), nur einen Freiheitsgrad, weil dann die Zwangsbedingungen

erfüllt sind.

Bei komplizierteren Systemen ist es oft angebracht, zunächst die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten zu ermitteln, (z. B. unter Ausnutzung der Erkenntnisse über die Momentanpole der einzelnen Körper), um dann durch Integration über die Zeit zu den Zwangsbedingungen, die zwischen den Koordinaten bestehen, zu kommen.

Aufgabe 2-9

Zwei Scheiben 1 und 2 drehen sich entgegengesetzt mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten ω_1 bez. ω_2 und wickeln dabei ein Seil auf. Auf diesem Seil liegt eine starre Scheibe 3, die der Bewegung des Seils schlupffrei folgt und auf ihrem größeren Radius R_3 über ein weiteres Seil die Massen 4 und 5 trägt. Auch dieses Seil wird von der Scheibe 3 schlupffrei bewegt.

Geg.: R , ω_1 , ω_2 , r_3 , $R_3 = 3 \cdot r_3$

Es sind die Geschwindigkeit des Mittelpunktes und die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe 3 sowie die Geschwindigkeiten der Massen 4 und 5 zu ermitteln.

