2. KINEMATIK STARRER KÖRPER

Ein starrer Körper besteht aus einer unendlichen Zahl von Punkten, die ihre Lage zueinander während der Bewegung nicht ändern. In diesem Abschnitt wird die Kinematik der Bewegung solcher Körper behandelt, wobei zwei, Sonderfälle der allgemeinen Bewegung (Translation, Rotation) immer wieder benutzt werden, um zum Teil recht komplizierte Bewegungsvorgänge möglichst anschaulich untersuchen zu können:

Wenn jede beliebige Gerade, die zwei Punkte des starren Körpers verbindet, während der Bewegung ihre Richtung beibehält, so führt der Körper eine reine ***Translation*** aus. Bei einer solchen translatorischen Bewegung bewegen sich alle Punkte des Körpers auf kongruenten Bahnen, so dass die Beschreibung der Bewegung eines Punktes genügt (→ Kinematik des Punktes).

Diese Bahnen bei der translatorischen Bewegung können beliebige Raumkurven sein, zum Beispiel auch Kreise: Die Kabine eines Paternosters führt (zum Glück für verträumte Mitfahrer) während der gesamten Bewegung eine Translation aus.

Wenn ein Punkt des starren Körpers festgehalten wird, kann er nur noch eine reine Rotation ausführen. Wenn alle Punkte des Körpers sich dabei auf Kreisbahnen um eine durch diesen Punkt gehende -sich selbst nicht bewegende - Achse ausführen, so spricht man von einer ***Rotation*** um eine feste Achse. Der allgemeinste Fall liegt vor, wenn auch die Achse noch eine Rotation um den festen Punkt ausführt.

Für die Beschreibung der Rotation wird der Vektor der Winkelgeschwindigkeit so definiert, dass sein Betrag dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit entspricht und seine Richtung mit der Drehachse zusammenfällt. Für die Bahngeschwindigkeit eines durch den Vektor r gegebenen Punktes gilt:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

wobei im allgemeinen sämtliche Faktoren zeitabhängig können. Der Geschwindigkeitsvektor ist tangential zur Kreisbahn gerichtet.

Der Beschleunigungsvektor setzt sich in der Ebene aus dem tangential an die Bahn gerichteten Bahnbeschleunigung und der zum Drehzentrum hin gerichteten Normalsbeschleunigung zusammen:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

2.1. Die ebene Bewegung des starren Körpers

Die ebene Bewegung des starren Körpers ist durch die Beschreibung der Bewegung von zwei Punkten eindeutig bestimmt. Da der Abstand zweier Punkte konstant bleibt, ist die Bewegung damit sogar überbestimmt beschrieben, es genügt zum Beispiel die Angabe der zeitlichen Abhängigkeit

- der beiden Koordinaten eines Punktes und einer Koordinate eines zweiten Punktes oder
- der beiden Koordinaten eines Punktes und einer zusätzlichen Winkelkoordinate.

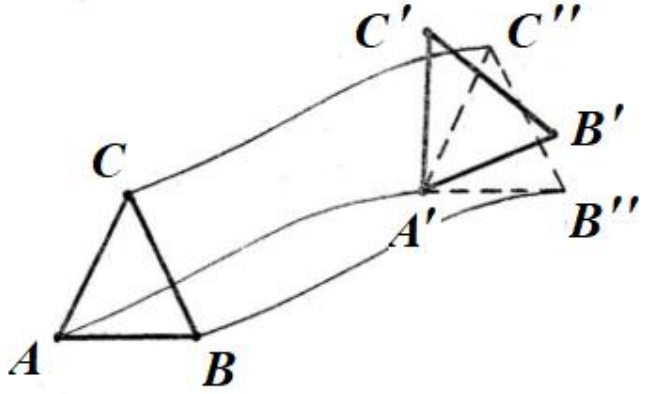
Der starre (durch keine Bindungen behinderte) Körper in der Ebene hat drei Freiheitsgrade.

2.1.1. Translation und Rotation

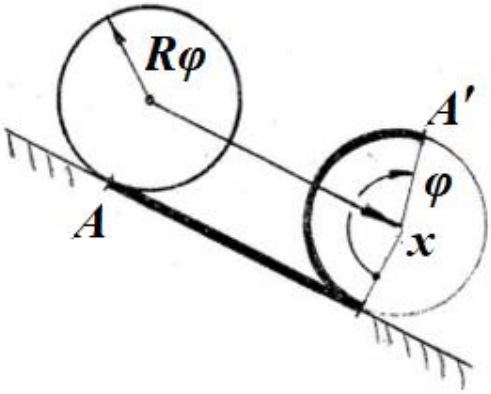
Es ist üblich (und meist zweckmäßig), die allgemeine Bewegung als eine Überlagerung einer Translation mit einer Rotation zu beschreiben.

Beispiele:

a) Das skizzierte Dreieck bewegt sich aus der Lage ABC in die Lage A'B'C'. Man kann diese Bewegung zum Beispiel auffassen als eine reine Translation aus ABC nach A"B"C" (alle Punkte bewegen sich auf kongruenten Bahnen) und eine Drehung um den Punkt A'. Bei dieser Betrachtung wurde der Punkt A als Bezugspunkt (zur Beschreibung der Translation und als Zentrum der Rotation) verwendet. Natürlich kann dafür auch jeder andere, Punkt benutzt werden.

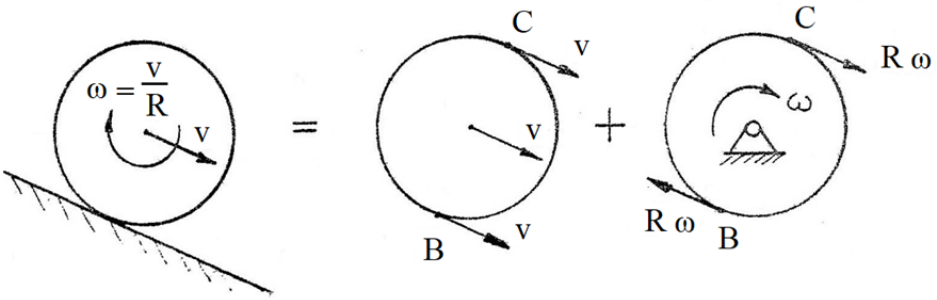


b) Eine Walze, die auf einer schiefen Ebene eine reine (schlupffreie) Rollbewegung ausführt, hat nur einen Freiheitsgrad: Die Translation (beschrieben zum Beispiel durch eine Koordinate x, die die jeweilige Lage des Mittelpunktes angibt) erfolgt auf einer Geraden, und die Drehbewegung ist von der Translation nicht unabhängig, weil die auf dem Umfang abgewälzte Strecke gleich sein muß mit der Strecke, die der Mittelpunkt zurückgelegt hat. Es gilt die sogenannte



Rollbedingung $\mathbf{x = R\,\varphi}$

Obwohl natürlich Translation und Rotation gleichzeitig ablaufen, ist es vielfach zweckmäßig. auch hier Translation und Rotation gesondert zu betrachten.



Aus der Rollbedingung ergibt sich durch Differentiation nach der Zeit der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Mittelpunktes und der Winkelgeschwindigkeit der Rotation:

$$v = \dot{x} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

Man beachte, dass durch Überlagerung der translatorischen und der rotatorischen Geschwindigkeit für jeden Punkt der Walze Betrag und Richtung der Geschwindigkeit bestimmt werden kann. So erhält man zum Beispiel

für den Punkt C: $v_C = v + R\,\omega = 2\,v$

während der Punkt B wegen: $v_B = v - R\,\omega = 0$

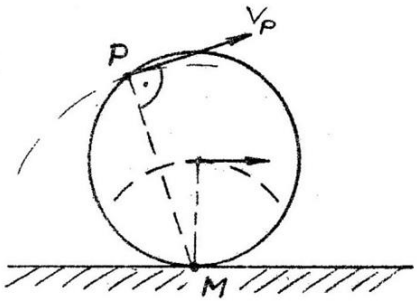
<u>momentan</u> in Ruhe ist.

2. 1.2. Der Momentanpol

Zu jedem Zeitpunkt der allgemeinen Bewegung eines starren Körpers in der Ebene kann diese als (momentane) reine Rotation um einen festen Punkt, den sogenannten ***Momentanpol***, aufgefasst werden.

Der Momentanpol befindet sich in dem betrachteten Augenblick in Ruhe, während alle übrigen Punkte des Körpers eine Rotationen um ihn ausführen. Die Geschwindigkeiten dieser Punkte sind tangential an die (konzentrischen) Kreise um den Momentanpol gerichtet.

Beispiel: Das rollende Rad.



Im vorigen Abschnitt wurde herausgefunden, dass der Berührungspunkt zwischen Rad und Unterlage momentan in Ruhe ist. Dieser Punkt ist der Momantanpol M der Bewegung. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes P des Rades ist dann senkrecht zur Verbindungslinie MP gerichtet.

Der Momentanpol ändert im allgemeinen ständig seine Lage. Für eine reine Translationsbewegung liegt er im Unendlichen.

Wenn die Geschwindigkeit v_A eines beliebigen Punktes A des starren Körpers bekannt ist, kann die momentane Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers nach

$$\omega = v_A/r_A$$

berechnet werden (r_A ist der Abstand des Punktes A vom Momentanpol M). Da für jeden anderen Punkt des Körpers eine entsprechende Formel gilt, kann z. B. für den Punkt B im Abstand rB vom Momentanpol die Geschwindigkeit nach

$$v_B = r_B\,\omega$$

berechnet werden.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

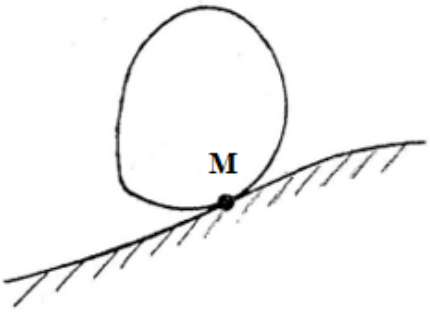
$$v_A/v_B = r_A/r_B$$

Die Geschwindigkeiten zweier Punkte eines starren Körpers verhalten sich wie ihre Abstände vom Momentanpol.

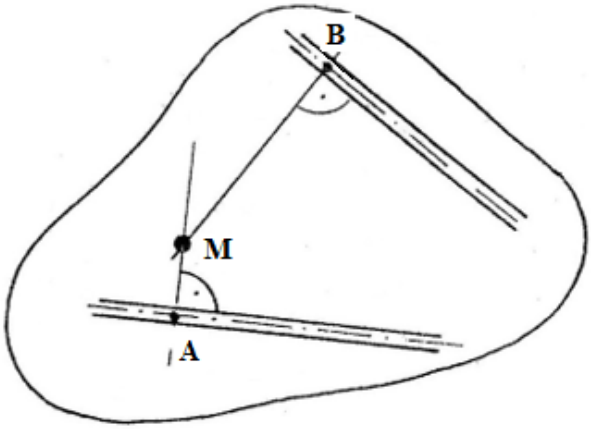
Aus den bisher angestellten Überlegungen lassen sich Regeln ableiten, wie der Momentanpol einer Bewegung zu finden ist.

Man findet den Momentanpol

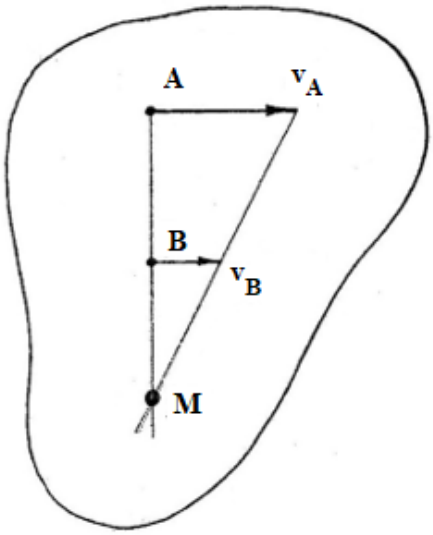
- bei <u>reinem Rollen</u> eines starren Körpers auf einer ruhenden Unterlage als den Berührungspunkt zwischen Körper und Unterlage,



- bei bekannten <u>Geschwindigkeitsrichtungen</u> zweier Punkte als Schnittpunkt der Senkrechten zu diesen Richtungen, wenn diese nicht parallel sind,



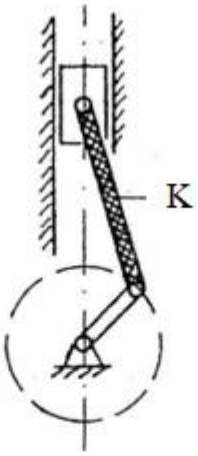
- bei bekannten parallelen Geschwindigkeitsrichtungen zweier Punkte nur, wenn auch die Beträge der Geschwindigkeiten bekannt sind:
  Der Momentanpol liegt auf der Verbindungsgeraden der beiden Punkte, die Abstände der Punkte vom Momentanpol sind proportional zu den Beträgen ihrer Geschwindigkeiten.



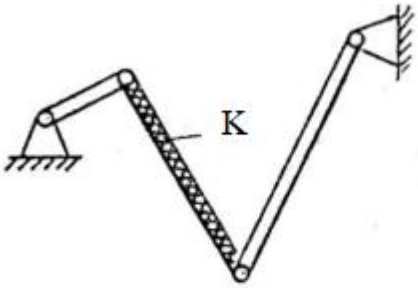
Aufgabe 2-1

Man bestimme die Momentanpole der starren Körper K für die dargestellten Getriebe in der jeweils skizzierten Lage.

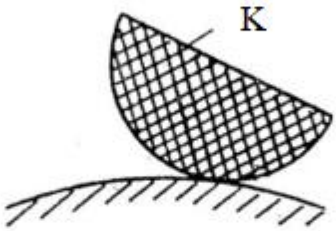
a)



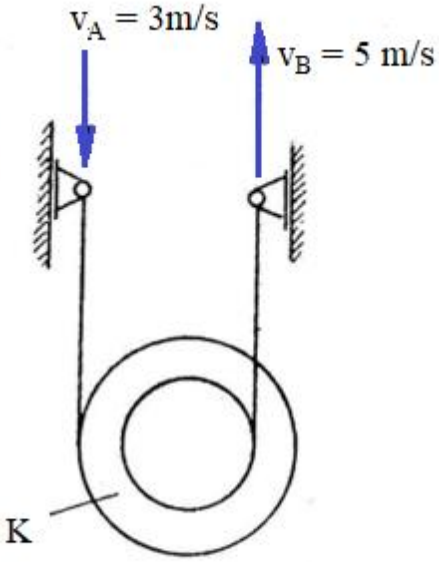
b)



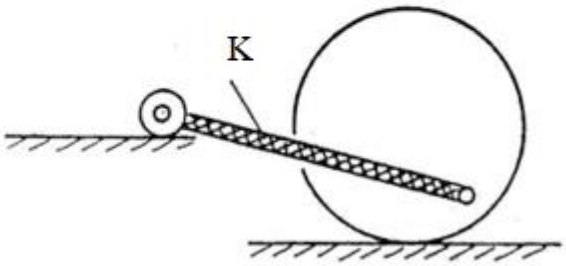
c)



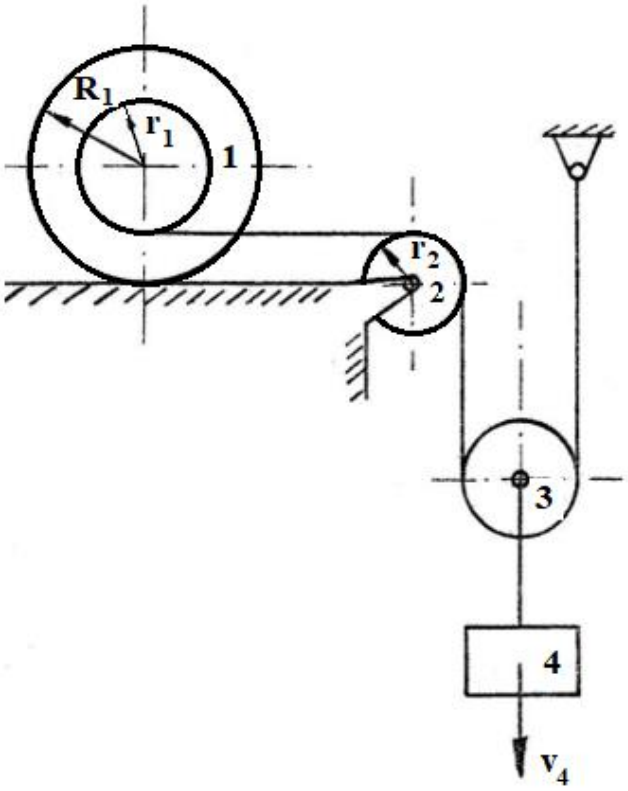
d)



e)



Aufgabe 2-2



Die skizzierte Walze führt eine reine Rollbewegung aus, die Seile sind starr und laufen ohne Schlupf über die Rollen.

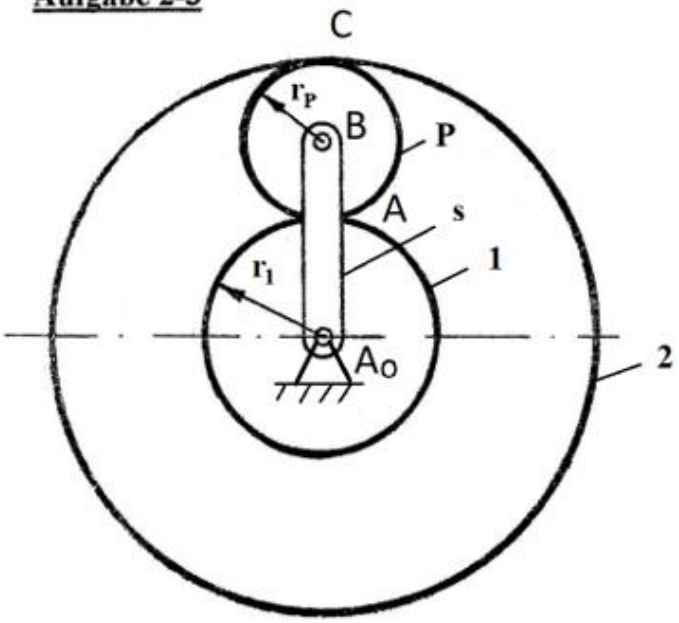
Die Masse 4 bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_4 abwärts.

Gegeben:

$R_1 = 2\, r_1$
r_2
v_4

Man ermittle die Winkelgeschwindigkeit ω_2 der Umlenkrolle 2 und die Geschwindigkeit v_1 des Mittelpunkts der Walze 1.

Aufgabe 2-3



In dem skizzierten Planetengetriebe hat das Sonnenrad **1** den Teilkreisradius r_1 das Planetenrad **P** hat den Teilkreisradius r_P, und der Steg **s** zwischen den Mittelpunkten dieser beiden Räder dementsprechend die Länge $(r_1 + r_P)$. Die Innenverzahnung **2** am Gehäuse hat den Teilkreisradius $(r_1 + 2\, r_P)$.

Gegeben: $r_1 = r_P$

a) Unter der Voraussetzung eines feststehenden Gehäuses **2** ist das Drehzahlverhältnis n_1/n_s von Rad **1** und Steg **s** zu ermitteln.

b) Es ist die Drehzahl n_1 des Rades **1** zu ermitteln, wenn sich gleichzeitig der Steg s mit der Drehzahl n_s und das Gehäuse bzw. Rad **2** mit der Drehzahl n_2 drehen.

2.1.3. Geschwindigkeit und Beschleunigung

Entsprechend der Idee, die Bewegung eines starren Körpers durch die Translation eines Punktes des Körpers und eine Rotation um diesen Punkt zu beschreiben, kann man die Gesamtgeschwindigkeit eines beliebigen Punktes des starren Körpers beschreiben aus:

$$\vec{v} = \vec{v}_{trans} + \vec{v}_{rot}$$

Durch Ableitung dieser Beziehung nach der Zeit ergibt sich für die Gesamtbeschleunigung:

$$\vec{a} = \vec{a}_{trans} + \vec{a}_{t,rot} + \vec{a}_{n,rot}$$

Die ebene Bewegung des starren Körpers wird beschrieben durch die Translation eines beliebigen Bezugspunktes O, der eine Rotation um den Bezugspunkt überlagert ist.

Die ***Translation*** des Bezugspunktes kann auf einer beliebigen (im allgemeinen gekrümmten) Bahnkurve erfolgen und wird nach den Regeln der "Kinematik des Punktes" beschrieben.

Die ***Rotation*** um den Bezugspunkt erfolgt mit der (im allgemeinen zeitlich veränderlichen) Winkelgeschwindigkeit ω um den Bezugspunkt, wobei jeder Punkt des starren Körpers eine Kreisbewegung um den Bezugspunkt ausführt.

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes P setzt sich aus einem translatorischen Anteil v_{trans} und dem rotatorischen Anteil v_{rot} zusammen. Dabei ist

v_{trans} - die Bahngeschwindigkeit des Bezugspunktes O,

v_{rot} die Bahngeschwindigkeit der Kreisbewegung von P um den Bezugspunkt:

$$v_{rot} = r^* \omega$$

mit dem Abstand r^* zwischen 0 und P.

Die beiden Anteile v_{trans} und v_{rot} sind vektoriell zur Gesamtgeschwindigkeit des Punktes P zu überlagern.

Hinweis: Um die momentane Geschwindigkeit eines Punktes P des starren Körpers zu bestimmen, ist es meist zweckmäßig, als Bezugspunkt O den Momentanpol zu wählen, so dass für den Punkt P nur der Rotationsanteil zu berücksichtigen ist.

Die Beschleunigung eines beliebigen Punktes P setzt sich aus einem translatorischen Anteil a_{trans} und dem rotatorischen Anteil a_{rot} zusammen. Dabei ist

a_{trans} die Gesamtbeschleunigung des Bezugspunktes O, die sich im allgemeinen aus der Bahnbeschleunigung des Bezugspunktes $a_{t,trans}$ und seiner Normalbeschleunigung

$$a_{n,trans} = v^2_{trans}/\rho$$

(ρ = Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Bezugspunktes) zusammensetzt,

a_{rot} die sich im allgemeinen auch aus zwei Anteilen ($a_{t,rot}$ und $a_{n,rot}$) zusammensetzende Beschleunigung der Kreisbewegung des Punktes P um den Bezugspunkt O:

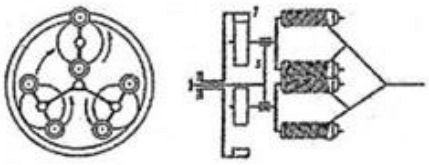
$$a_{t,rot} = r\ \alpha$$

$$a_{n,rot} = r\ \omega^2$$

Im allgemeinsten Fall ist also die Gesamtbeschleunigung des Punktes P aus <u>vier Anteilen</u> vektoriell zusammenzusetzen.

Aufgabe 2-4

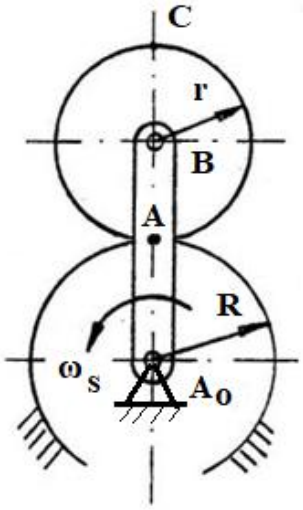
Das unten skizzierte offene Planetengetriebe wir in der Produktion von Seilen und Zwirnen verwendet (s. analoges Getriebe Bild rechts). Dabei trägt jeder Planet 2 Spulen, die mit dem Planeten umlaufen und rotieren.



Die 3 Planetenräder mit dem Radius r rollen auf einem Sonnenrad (Radius R) ab. Der Steg, der die Planetenachsen führt, dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_s.

Gegeben: R, r, ω_s

Man ermittle für die Punkte **A** und **C** des Planetenrades die Beträge der Geschwindigkeiten v_A bzw. v_C und die Beträge der Gesamtbeschleunigungen a_A bzw. a_C.

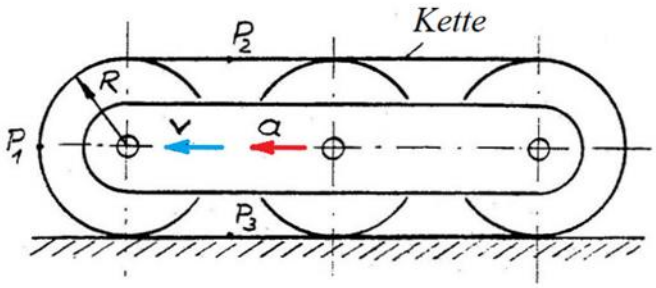


Aufgabe 2-5

Ein Kettenfahrzeug bewegt sich mit der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a.

Gegeben: v, a, R

Man ermittle die Beträge der Geschwindigkeiten der Kettenpunkte P_1, P_2 und P_3 und den Betrag der Gesamtbeschleunigung für P_1.



2.2. Relativbewegung

Jede Bewegung kann nur relativ zu einem Bezugssystem beschrieben werden. Bewegt sich das Bezugssystem selbst, so stellt sich die Bewegung relativ zum Bezugssystem bzw. relativ zu einem festen System unterschiedlich dar.

Beispiele:

- In einem sich bewegenden Fahrzeug wird ein Gegenstand senkrecht nach oben geworfen:

Bahnkurve für

mitfahrenden nicht mitfahrenden

Beobachter