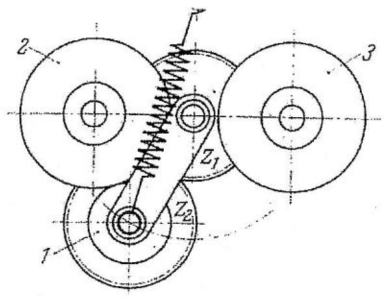
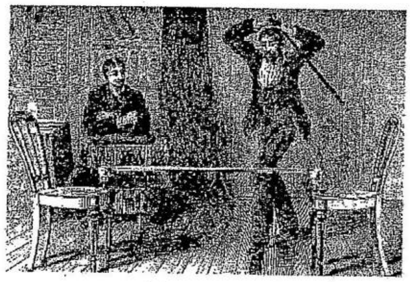
Frankfurt – University of Applied Sciences
Nibelungenplatz 1
D-60318 Frankfurt

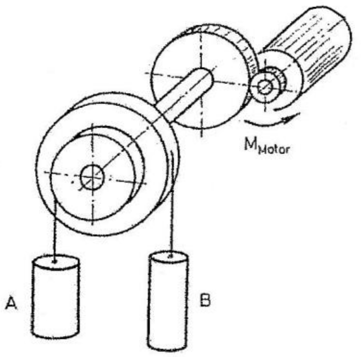
FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

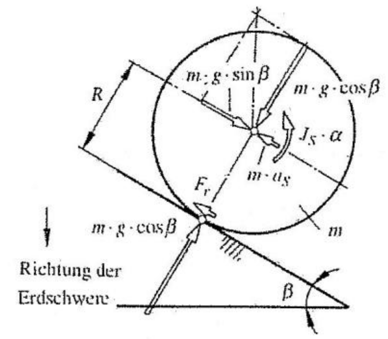
Prof. Dr. C. Wirth

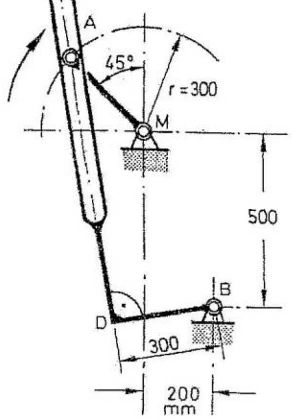
Modul:
Technische Mechanik
Kinematik und Kinetik

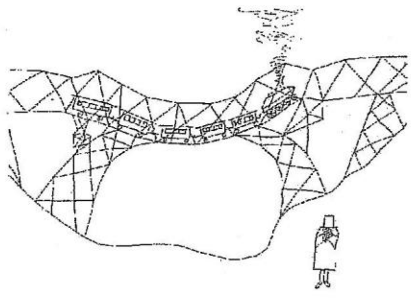


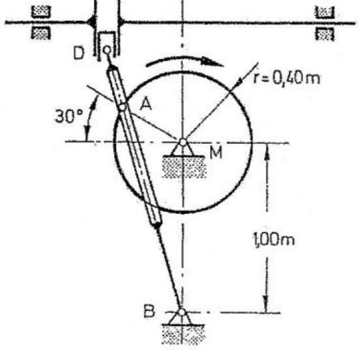












„Die Mechanik erfreut sich unter den Ingenieuranfängern eines üblen Rufes: In der Tat ist die Kombination aus Sinn für das Wesentliche eines Problems, mathematischer Gewandtheit und Fähigkeit, die Endgleichungen zu deuten, nicht leicht zu erlernen."

K. Marguerre

VORBEMERKUNGEN

Im Fach Kinematik/Kinetik des Studiengangs Mechatronik/Mikrosystemtechnik, ebenso wie im Maschinenbau, werden die Grundlagen der Bewegungslehre von Massenpunkten und starren Körpern behandelt. Dabei kann in der zur Verfügung stehenden Zeit nur ein sehr kleiner Ausschnitt aus diesen umfangreichen Gebieten so dargestellt werden, dass der Student befähigt wird, selbstständig Aufgaben zu rechnen.

In der ***Kinematik*** „Lehre von der Bewegung von Körpern und Punkten“ werden die Bewegungen ohne Untersuchung ihrer Verursachung (durch Kräfte oder Momente) und ihrer Wirkungen betrachtet. Die ***Kinetik*** ist dagegen die Lehre von den Wechselwirkungen zwischen Kräften und den Bewegungen von Massen.

Der Ingenieur, der in der Praxis mit kinematisch-kinetischen Aufgaben konfrontiert wird, wird sich im Allgemeinen tiefer in das Fachgebiet einarbeiten müssen. Die Vorlesung kann ihm dafür nur das Grundlagenwissen vermitteln.

Die in diesem Skriptum enthaltenen Aufgaben haben ausgesprochen elementaren Charakter und sollen den Studenten mit den wesentlichen Gesetzen der Kinetik vertraut machen. Die aus praktischen Problemen resultierenden Aufgaben sind mit den gleichen Gesetzen und den vorgestellten Verfahren zu behandeln, sind jedoch meist nur mit wesentlich höherem Aufwand bei Verwendung anspruchsvollerer mathematischer Verfahren lösbar. Oft führen nur numerische Lösungsverfahren unter Benutzung des Computers zum Ziel.

Der Textteil lehnt sich eng an das Buch meines ehemaligen Kollegen J. Dankert [3] an, während die Aufgaben selbst erstellt wurden oder aus anderen Sammlungen stammen.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Dankert, J. und H.:	Technische Mechanik Springer Verlag, Berlin, 2013 www.dankertdankert.de
Böge, W.:	Formeln und Tabellen zur Technische Mechanik Springer Verlag, Berlin, 2017
Kabus, K.:	Mechanik und Festigkeitslehre Hanser Verlag, München, 2017
Hauger, Schnell, Gross:	Technische Mechanik, 3. Kinetik Springer Verlag, Berlin, 2019
Will, P., Lämmel, B.:	Kleine Formelsammlung Technische Mechanik Hanser Verlag, Leipzig, 2009

1. KINEMATIK DES PUNKTES

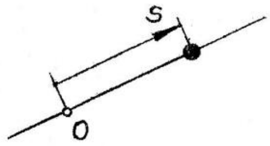
Für zahlreiche Problemstellungen der Kinematik und Kinetik genügt es, von einem sich bewegenden Körper nur die Bewegung eines speziellen Punktes zu betrachten. Darüber hinaus ist die Kinematik des Punktes die Basis für die Behandlung komplizierterer Aufgabenstellungen.

Bei den im Folgenden angestellten Überlegungen ist es nicht erforderlich, dass man stets nur den (unendlich kleinen) Massenpunkt als Gegenstand der Betrachtungen ansieht. Man sollte vielmehr von der Vorstellung ausgehen, dass die Bewegung eines Punktes beschrieben wird, der zu einem Körper mit endlichen Abmessungen und komplizierter Struktur gehören kann.

1.1. Geradlinige Bewegung des Punktes

1.1.1. Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Die Bewegung eines Punktes entlang einer geraden Linie wird vollständig beschrieben durch Angabe einer Zeit-Funktion:



s = s(t)

Dabei wird die Wegkoordinate s von einem beliebig festzulegenden Anfangspunkt ausgezählt, **s(t)** gibt dann die Lage des Punktes zu jedem Zeitpunkt **t** an, wobei auch der Anfang der Zeitzählung (t = 0) eindeutig festgelegt werden muss.

Die Geschwindigkeit **v** ist ein Maß dafür, wie schnell sich die Wegkoordinate s mit der Zeit ändert. Als ***mittlere Geschwindigkeit*** in einem Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ (der Punkt legt während Δt den Weg $\Delta s = s_2 - s_1$ zurück) wird der Quotient

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

definiert, die ***Momentangeschwindigkeit*** ergibt sich daraus durch Übergang zum unendlich kleinen Zeitintervall:

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$$

Der Punkt über der Koordinate deutet die Ableitung nach der Zeit an.

Analog zur Geschwindigkeit als Maß für die Änderung der Wegkoordinate wird die Beschleunigung ***a*** als Maß der Geschwindigkeitsänderung definiert.

Die ***mittlere Beschleunigung*** im Zeitintervall $\mathbf{\Delta t = t_2 - t_1}$ errechnet sich nach der Formel

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

wobei v_1 die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 und v_2 die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_2 ist.

Die ***Momentanbeschleunigung*** ergibt sich dementsprechend aus

$$a = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

Man beachte:

Wenn die Weg-Zeit-Funktion **s(t)** bekannt ist, so ist damit der Bewegungsvorgang vollständig beschrieben. Die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion **v(t)** und die Beschleunigungs-Zeit-Funktion **a(t)** erhält man durch ein- bzw. zweimaliges Differenzieren der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit.

Bei bekannter Geschwindigkeits-Zeit-Funktion gewinnt man die Weg-Zeit-Funktion durch Integration über die Zeit. Für die Bestimmung der sich dabei ergebenden Integrationskonstanten ist eine zusätzliche Aussage erforderlich (z. B. aus der Kenntnis der Wegkoordinate s_o) zu einem bestimmten Zeitpunkt t_o).

Bei bekannter Beschleunigungs-Zeit-Funktion sind zur kompletten Beschreibung der Bewegung noch zwei zusätzliche Angaben erforderlich. Da dies bei den meisten Aufgaben die Aussagen über die Wegkoordinate $\mathbf{s_o}$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v_o}$ beim Beginn der Betrachtung der Bewegung (Zeitpunkt $\mathbf{t_o}$) sind, nennt man diese zusätzlichen Aussagen "Anfangsbedingungen". Natürlich können diese Zusatzbedingungen sich auf jeden beliebigen Zeitpunkt der Bewegung beziehen, auch auf verschiedene Zeitpunkte für Weg- und Geschwindigkeitsaussage, es können auch zwei Aussagen über die Wegkoordinate zu verschiedenen Zeitpunkten sein.

Aufgabe l-l

Zwischen den Kilometersteinen 67,5 und 70 zeigt der Tachometer eines Autos konstant 130 km/h. Tatsächlich werden für die Strecke 71 s benötigt. Wie groß ist der Fehler der Tachometeranzeige (absolut und prozentual)?

Lösung: 3,24 km/h bzw. 2,56 %

Aufgabe 1-2

Ein Auto beschleunigt aus dem Stand auf eine Geschwindigkeit von 100 km/h in 8,3 s.
Wie groß ist die mittlere Beschleunigung a_m in m/s²?

Lösung: a_m = 3,35 m/s²

Aufgabe 1-3

Sie befinden sich auf dem im Jahre 1889 von Gustave Eiffel erbauten Turm in Paris auf der obersten Plattform und lassen einen Körper fallen. Im freien Fall bewegt er sich (bei Vernachlässigung des Luftwiderstands) mit der konstanten Beschleunigung g = 9,81 m/s².

a) Der Körper erreicht nach 7,7 s den Erdboden? In welcher Höhe H befinden Sie sich?
b) Wie groß ist die Aufprallgeschwindigkeit v_E des Körpers?
c) Nach welcher Zeit T erreicht er eine Geschwindigkeit von 100 km/h?

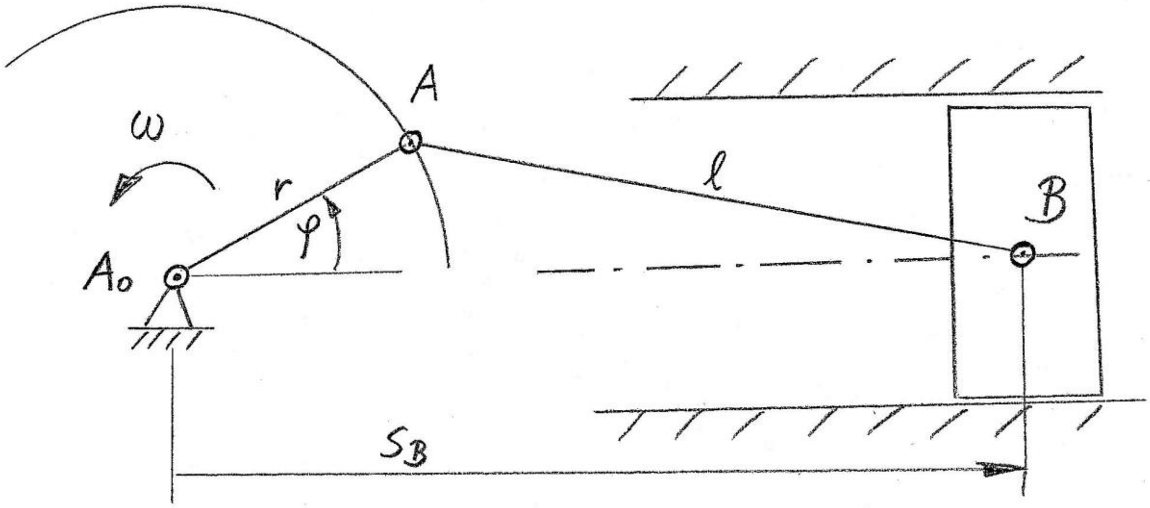
Lösung: a) H = 290,8 m
b) v_E = 272 km/h
c) T = 2,83 s

Aufgabe 1-4

Die skizzierte Schubkurbel besteht aus der Kurbel A_oA (Radius r = 0,1 m), die mit $\omega = 100\ s^{-1}$ konstant umläuft und der Koppel AB (Länge l = 0,4 m).

a) Ermitteln Sie die Gleichung für die Bahn $s_B(t)$ und die Bahngeschwindigkeit $v_B(t)$
b) Wie groß ist v_B für $\varphi = 45°$

Hinweis: $\varphi = \omega_o\, t$

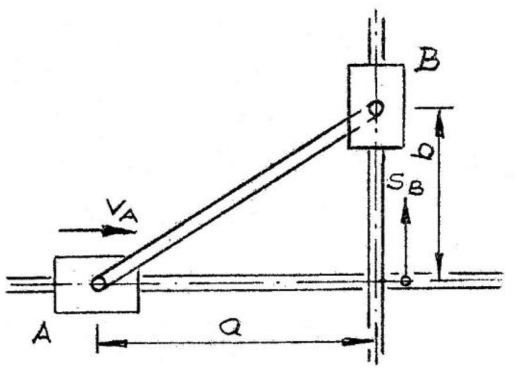


Aufgabe 1-5

Das Getriebe ist als Spielzeug (Klappsmühle) bekannt, wobei der Antrieb über die Koppel erfolgt. Als Teilbewegung wir die Bauart auch in der Technik verwendet. (Bild oben)

Zwei Kolben A und B sind durch eine starre Stange gekoppelt. Der Kolben A bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{v_A}$. Zum Zeitpunkt t = 0 befinden sich die Kolben in der skizzierten Lage. (Skizze unten)

Gegeben: $a = 0{,}4$ m
$b = 0{,}3$ m
$\mathbf{v_A} = 0{,}8$ m/s



Man ermittle für den Kolben B die Funktionen

$\mathbf{s_B}(t)$ und $\mathbf{v_B}(t)$

Lösung: $\mathbf{s_B}(t) = (b^2 + 2a\,\mathbf{v_A}\,t - v_A^2\,t^2)^{1/2}$
$\mathbf{v_B}(t) = \mathbf{v_A}\,(a - \mathbf{v_A}\,t) / \mathbf{s_B}(t)$

1.2. Allgemeine Bewegung des Punktes

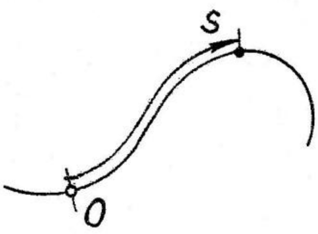
Zur besseren Veranschaulichung wird zunächst die allgemeine Bewegung eines Punktes in einer Ebene betrachtet. Die angegebenen Formeln gelten jedoch auch bei Erweiterung auf die dritte Dimension.

1.2.1. Darstellung der Bewegung, Ortsvektor, Geschwindigkeitsvektor

Für die Darstellung der allgemeinen Bewegung eines Punktes bieten sich zwei Möglichkeiten an:

a) Die Bewegung erfolgt auf einer vorgeschriebenen Bahn und wird durch Angabe der Funktion s = s(t) beschrieben. Die Wegkoordinate s muss dabei allen Krümmungen der Bahn folgen.

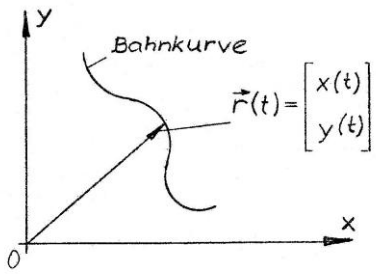
Vorteile dieser Darstellungsweise: Es gelten alle Formeln, die für die geradlinige Bewegung angegeben wurden, wobei die Beschleunigung nur die tangential zur Bahnkurve gerichtete sogenannte ***Bahnbeschleunigung*** ist.



Nachteile: Die Funktion s(t) enthält keine Informationen über die Bahnkurve und einen bei dieser Bewegung zusätzlich vorhandenen Beschleunigungsanteil.

Für viele Aufgabenstellungen ist diese (im Allgemeinen einfachere) Betrachtungsweise ausreichend (man denke an die "Fahrzeugaufgaben" des vorigen Abschnitts, bei denen die Einschränkung auf eine geradlinige Bewegung ohne weiteres fallengelassen werden kann).

b) Ein Ortsvektor ***r*** , dessen Komponenten von der Zeit t abhängig sind, beschreibt die Bewegung des Punktes. Damit sind sowohl die Bahnkurve selbst (die Komponenten des Ortsvektors definieren eine Parameterdarstellung der Bahnkurve) als auch die Lage des bewegten Punktes auf der Bahnkurve zu jedem Zeitpunkt t gegeben.



Als Maß für die Änderung des Ortsvektors mit der Zeit wird der Geschwindigkeitsvektor definiert:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\vec{t}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta x(t)}{\Delta t} \\ \dfrac{\Delta y(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{d\vec{t}}$$

Die Geschwindigkeit ist ein tangential zur Bahnkurve gerichteter Vektor.

Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich durch Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit (ein Vektor wird nach einer skalaren Größe differenziert, indem seine Komponenten differenziert werden, d. h. die x - und y - Komponenten können einzeln differenziert werden).

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors

$$\left|\dot{\vec{r}}\right| = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v$$

(Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate seiner Komponenten) ist gleich der Bahngeschwindigkeit v(t) = ṡ(t).

1.2.2. Beschleunigungsvektor, Bahn- und Normalbeschleunigung

Als Maß für die Änderung des Geschwindigkeitsvektors mit der Zeit wird der Beschleunigungsvektor definiert:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\vec{t}} = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Der Beschleunigungsvektor ergibt sich aus der Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit.
Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, bei dem sich sowohl (Bahngeschwindigkeit v) als auch die Richtung mit der Zeit ändern können, ergibt sich auch bei konstanter Bahngeschwindigkeit ein Beschleunigungsvektor, wenn die Bewegung nicht geradlinig ist.

Für die allgemeine Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn mit dem Radius r gilt:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \alpha \cdot R + \omega^2 \cdot R$$

Der Beschleunigungsvektor für die Bewegung auf einer Kreisbahn setzt sich aus zwei senkrecht aufeinander stehenden Komponenten zusammen: Die Bahnbeschleunigung $a_t = v = \alpha \cdot R$ ist wie die Geschwindigkeit tangential zur Bahn gerichtet, die Normalbeschleunigung $a_n = v^2/R = \omega^2 \cdot R$ ist senkrecht dazu zum Kreismittelpunkt gerichtet.

Die Bahnbeschleunigung ist Null, wenn die Bewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit erfolgt.

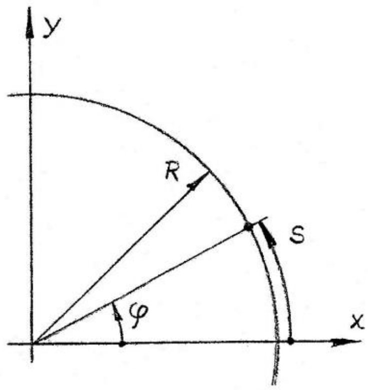
Die Normalbeschleunigung ist bei Bewegung auf einer beliebigen Bahnkurve nur dann gleich Null, wenn die. Bahn nicht gekrümmt ist (z. B. bei geradliniger Bewegung oder in Wendepunkten). Bei Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn ist die Normalbeschleunigung stets ungleich Null.

Der Betrag der Gesamtbeschleunigung kann nach $|a| = \sqrt{a_t^{\,2} + a_n^{\,2}}$

berechnet werden. Die Gesamtbeschleunigung ist stets zur konkaven Seite der Bahn gerichtet (bei verschwindender Normalbeschleunigung tangential zur Bahnkurve).

1.2.3. Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung

Die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn ist ein wichtiger Spezialfall der allgemeinen Bewegung des Punktes.
Zur Beschreibung der Lage eines Punktes auf einer Kreisbahn ist die Angabe einer Winkelkoordinate φ(t) meist besser geeignet als die Wegkoordiante s(t) und wohl immer günstiger als die Beschreibung durch einen Ortsvektor.
Wenn R der Radius der Kreisbahn ist, dann gilt



$$\boldsymbol{s(t) = R\ \varphi(t)}$$
$$\boldsymbol{v(t) = \dot{s}(t) = R \cdot \dot{\varphi}(t)}$$
$$\boldsymbol{a(t) = \dot{v}(t) = R \cdot \ddot{\varphi}(t)}$$

Es ist üblich und zweckmäßig, analog zur Winkelkoordinate $\varphi(t)$ die

Winkelgeschwindigkeit $\quad$ $\boldsymbol{\omega(t) = d\varphi/dt}$

und die ***Winkelbeschleunigung*** $\quad$ $\boldsymbol{\alpha(t) = d\omega/dt}$

als Größen zur Beschreibung der Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn zu benutzen.

Die Winkelgeschwindigkeit wird üblicherweise in $[s^{-1}]$ angegeben, die Winkelbeschleunigung in $[s^{-2}]$.

Eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = [s^{-1}]$ bedeutet, dass sich der Winkel φ in einer Sekunde um 1 rad ($180/\pi \approx 57{,}3°$) vergrößert.

In der technischen Praxis wird bei Drehbewegungen gern die Drehzahl n (im Allgemeinen: Anzahl der Umdrehungen pro Minute) zur Beschreibung der Geschwindigkeit einer Rotationsbewegung verwendet. Es gilt (1 Umdrehung $\rightarrow$ Winkel 2π)

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi \cdot n}$$

wobei sich ω dann natürlich mit der gleichen Dimension wie n.

Durch die Winkelbeschleunigung (als Maß für die Änderung der Winkelgeschwindigkeit) wird entsprechend $a_t = \alpha \cdot R$ nur die Bahnbeschleunigung (als Maß für die Änderung der Bahngeschwindigkeit) repräsentiert. Natürlich gibt es bei einer Kreisbewegung immer (auch bei konstanter Winkelgeschwindigkeit) eine Normalbeschleunigung

$$\boldsymbol{a_n = v^2/R = \omega^2 \cdot R}$$

Aufgabe 1–6

Ein Pkw fährt mit konstanter Geschwindigkeit v = 40 km/h eine Kurve mit dem Radius R = 20 m. Wie groß sind Bahn- und Normalbeschleunigung?

Lösung: $\quad a_t = 0$
$\quad a_n = 6{,}17\ m/s^2$

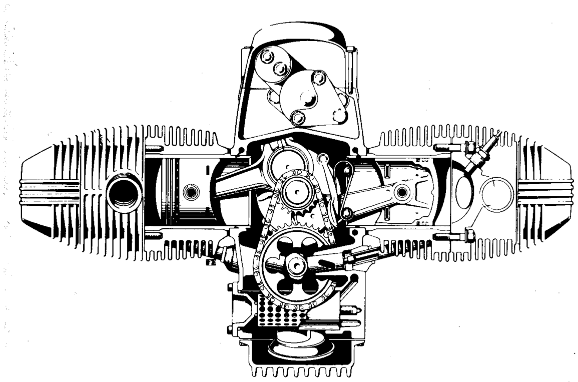
Aufgabe 1–7

Bei einem Crash-Test prallt ein Pkw mit 50 km/h gegen eine starre Wand. Nach 80 ms sind Fahrzeug und Dummies auf die Geschwindigkeit 0 abgebremst. Wie groß ist die mittlere Beschleunigung während des Aufpralls?

Lösung: $\quad a_m = -\ 174\ m/s^2$

Aufgabe 1-8

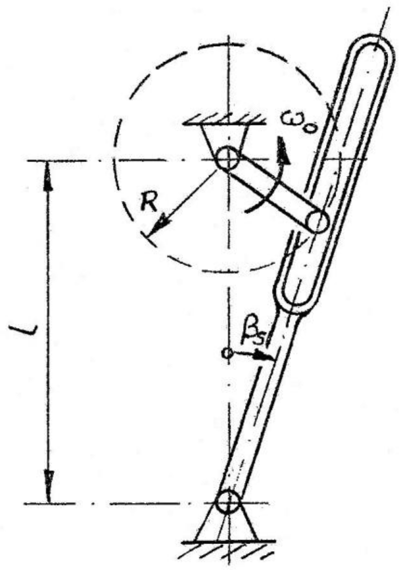
Ein dargestellte Boxer-Motor läuft mit einer Drehzahl $n = 6000\ \mathrm{min}^{-1}$. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω, welche Normalbeschleunigung a_n erfährt ein Punkt auf der Kurbelwelle, der $R = 78$ mm von der Drehachse entfernt ist?



Lösung: $\omega = 628{,}3\ \mathrm{s}^{-1}$
$a_n = 30793\ \mathrm{m/s}^2$

Aufgabe 1-9

Das skizzierte Getriebe ist als schwingende Kurbelschleife bekannt und dient als Antrieb für Hobel- und Stoßmaschinen.
Dabei läuft eine Kurbel mit dem Radius R mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_o um und nimmt eine Schleife (Schwinge) mit.
Man berechne für die Schleife $ß_s(t)$,
die Winkelgeschwindigkeit $\omega_s(t)$ und
die Winkelbeschleunigung $\alpha_s(t)$, wenn
$ß(t=0) = 0$ ist. Für $t = 0$ und $t = \pi/\omega_o$ gebe man den Betrag der Gesamtbeschleunigung a des Punktes der Schleife an, in dem sich der Mitnehmer der Kurbel gerade befindet.



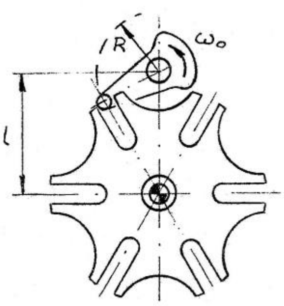
Gegeben: R, l, ω_o

Lösung: Mit $\Phi(t) = 1 + (l/R)^2 - 2\,(l/R)\cos\omega_o t$

$ß_s(t) = \arctan\left[(R\sin\omega_o t)/(1 - R\cos\omega_o t)\right]$
$\omega_s(t) = \left[(l/R)\cos\omega_o t - 1\right]\omega_o/\Phi(t)$
$\alpha_s(t) = \left[1-(l/R)^2\right](l/R)\left[\omega_o/\Phi(t)\right]^2\sin\omega_o t$

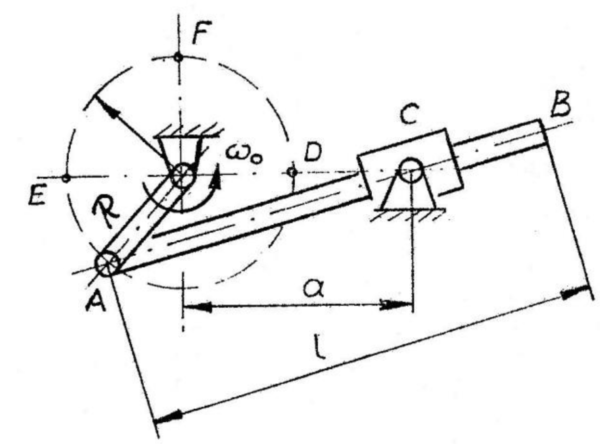
$a_{(t=0)} = (R\omega_o)^2/(l - R)$
$a_{(t=\pi/\omega o)} = (R\omega_o)^2/(l + R)$

Das mathematische Modell des in der Aufgabe 1-9 behandelten Mechanismus entspricht auch den kinematischen Verhältnissen des sogenannten „Malteserkreuzes“. Damit wird eine periodische (durch Rasten unterbrochene) Drehbewegung mit Hilfe einer kontinuierlichen Drehbewegung erzeugt (Anwendungsbeispiele: Filmtransport in Projektoren, Antrieb für Druckerwalzen. ...).



Aufgabe 1-10

Das dargestellte Getriebe ist als Rührwerk von praktischer Bedeutung. Eine Kurbel dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 und nimmt die Stange AB mit. Bei C handelt es sich um ein ortsfestes Gleit-Drehlager. Zum Zeitpunkt t = 0 befindet sich A im Punkt D.



Gesucht sind (man lege den Ursprung des Koordinatensystems in C):

a) die Bahnkurve von B in Parameterdarstellung x(t) und y(t),

b) die Komponenten v_{Bx} und v_{By} des Geschwindigkeitsvektors des Punktes B allgemein,

c) die Beträge der Geschwindigkeiten des Punktes B für a = 2R und l = 4R, wenn A sich in E bzw. F befindet.

Lösung: Mit $\Psi = l/(R^2 + a^2 - 2\,a\,R\cos\omega_0 t)^{1/2}$

a) $x(t) = (a - R\cos\omega_0 t)\,(\Psi - 1)$; $y(t) = -R\,(\Psi - 1)\sin\omega_0 t$

b) $v_{Bx}(t) = (\cos\omega_0 t - a/R)\,a\,(R/l)^2\,\Psi^3\,\omega_0\sin\omega_0 t + (\Psi - 1)\,R\,\omega_0\sin\omega_0 t$
$v_{By}(t) = a\,(R/l)^2\,\Psi^3\,\omega_0\sin^2\omega_0 t - (\Psi - 1)\,R\,\omega_0\cos\omega_0 t$

c) A in E : $v_B = 0{,}333\,R\,\omega_0$; A in F : $v_B = 0{,}961\,R\,\omega_0$