

Kapitel 5, Übung 2: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 5, Seiten 37-51

Hinweis: Es ist $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

5.5. Berechnen Sie die allg. Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) $\dot{x} = -5t$

e) $\dot{x} + 5tx = -5t$

b) $\dot{x} + 5x = -5t$

f) $\dot{x} = \cos 4t$

c) $\dot{x} = 5t^2 - 5t$

g) $\dot{x} + 2x = \cos 4t$

d) $\dot{x} + 5x = 5t^2 - 5t$

h) $\dot{x} + \frac{2}{t}x = \cos 4t$, $t > 0$ (Lösung ist länglich!)

5.6. Die Differentialgleichungen sind die aus der vorherigen Aufgabe. Berechnen Sie die spezielle Lösung zu den gegebenen Randbedingungen.

a) $\dot{x} = -5t$ mit $x(0) = 5$

b) $\dot{x} + 5x = -5t$ mit $x(0) = 5$

c) $\dot{x} = 5t^2 - 5t$ mit $x(0) = 5$

d) $\dot{x} + 5x = 5t^2 - 5t$ mit $x(0) = 5$

e) $\dot{x} + 5tx = -5t$ mit $x(0) = 5$

f) $\dot{x} = \cos 4t$ mit $x(0) = 5$

g) $\dot{x} + 2x = \cos 4t$ mit $x(0) = 5$

h) $\dot{x} + \frac{2}{t}x = \cos 4t$, $t > 0$ mit $x(1) = 5$ (Taschenrechner)

5.7. Berechnen Sie die Lösungen folgender homogener Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) $\begin{cases} \dot{u} = u + v \\ \dot{v} = 4u - 2v \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dot{u} = 3u - 4v \\ \dot{v} = u - v \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{u} = u + v \\ \dot{v} = 4u + v \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + 3y + z \\ \dot{z} = -3x + y - z \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{u} = u + v \\ \dot{v} = -2u + 3v \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = 4x - 4y + z \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dot{u} = -5u + 3v \\ \dot{v} = -15u + 7v \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x + y - 2z \\ \dot{z} = 3x + 2y + z \end{cases}$

Kapitel 5, Übung 2: Lösungen

5.5. Berechnen Sie die allg. Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Notation für lineare DGL 1.Ordnung: $\dot{x} + p(t)x = r(t)$, $x, t \in \mathbb{R}$

Allg. Lösung $x(t) = e^{-P(t)} \left(\int e^{P(t)} r(t) dt + C \right)$ mit $P(t) = \int p(t) dt$.

a) $\dot{x} = -5t$

D.h., $p=0$, $r=-5t$. Zunächst $P(t) = \int p dt = 0$ und deshalb

$$e^{P(t)} = e^0 = 1 = e^{-P(t)}. \text{ Damit } \int e^{P(t)} r(t) dt = \int 1 \cdot (-5t) dt = -\frac{5}{2} t^2.$$

Allg. Lösung: $x(t) = -\frac{5}{2} t^2 + C$.

Hinweis: Das geht natürlich auch viel einfacher: Direkt integrieren. Dies ist ein Beispiel, dass der Formalismus auch in diesem Fall funktioniert.

b) $\dot{x} + 5x = -5t$

D.h., $p=5$, $r=-5t$. Zunächst $P(t) = \int p dt = \int 5 dt = 5t$. Damit

$$\begin{aligned} \int e^{P(t)} r(t) dt &= \int e^{5t} \cdot (-5t) dt = -5 \int t e^{5t} dt \\ &= -5 \left[t \cdot \frac{1}{5} e^{5t} - \int 1 \cdot \frac{1}{5} e^{5t} dt \right] = -5 \left[t \cdot \frac{1}{5} e^{5t} - \frac{1}{25} e^{5t} \right] = -t e^{5t} + \frac{1}{5} e^{5t}. \end{aligned}$$

Allg. Lösung: $x(t) = e^{-5t} \left[-t e^{5t} + \frac{1}{5} e^{5t} + C \right] = -t + \frac{1}{5} + C e^{-5t}$.

c) $\dot{x} = 5t^2 - 5t$

D.h., $p=0$, $r=5t^2 - 5t$. Zunächst $P(t) = \int p dt = 0$ und deshalb

$$e^{P(t)} = e^0 = 1 = e^{-P(t)}. \text{ Damit } \int e^{P(t)} r(t) dt = \int 1 \cdot (5t^2 - 5t) dt = \frac{5}{3} t^3 - \frac{5}{2} t^2.$$

Allg. Lösung: $x(t) = \frac{5}{3} t^3 - \frac{5}{2} t^2 + C$. Hinweis: siehe a).

d) $\dot{x} + 5x = 5t^2 - 5t$

D.h., $p=5$, $r=5t^2 - 5t$. Zunächst $P(t) = \int p dt = \int 5 dt = 5t$. Damit

$$\begin{aligned} \int e^{P(t)} r(t) dt &= \int e^{5t} \cdot (5t^2 - 5t) dt = 5 \int (t^2 - t) e^{5t} dt \\ &= 5 \left[(t^2 - t) \cdot \frac{1}{5} e^{5t} - \int (2t - 1) \cdot \frac{1}{5} e^{5t} dt \right] = (t^2 - t) e^{5t} - \int (2t - 1) e^{5t} dt \\ &= (t^2 - t) e^{5t} - \left((2t - 1) \frac{1}{5} e^{5t} - \int 2 \frac{1}{5} e^{5t} dt \right) = (t^2 - t) e^{5t} - \left((2t - 1) \frac{1}{5} e^{5t} - \frac{2}{25} e^{5t} \right) \\ &= (t^2 - t) e^{5t} - \frac{1}{5} (2t - 1) e^{5t} + \frac{2}{25} e^{5t} = t^2 e^{5t} - \frac{7}{5} t e^{5t} + \frac{7}{25} e^{5t} \end{aligned}$$

Allg. Lösung: $x(t) = e^{-5t} \left[t^2 e^{5t} - \frac{7}{5} t e^{5t} + \frac{7}{25} e^{5t} + C \right] = t^2 - \frac{7}{5} t + \frac{7}{25} + C e^{-5t}$.

e) $\dot{x} + 5tx = -5t$

D.h., $p=5t$, $r=-5t$. Zunächst $P(t) = \int p dt = \int 5t dt = \frac{5}{2} t^2$. Damit

$$\int e^{p(t)} r(t) dt = \int e^{\frac{5}{2}t^2} \cdot (-5t) dt = -5 \int t e^{\frac{5}{2}t^2} dt .$$

Substitution $z = t^2 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 2t \Rightarrow \frac{1}{2} dz = t dt$. Damit folgt

$$\dots = -5 \int e^{\frac{5}{2}z} \frac{1}{2} dz = -\frac{5}{2} \int e^{\frac{5}{2}z} dz = -\frac{5}{2} \frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}z} = -e^{\frac{5}{2}t^2}$$

$$\text{Allg. Lösung: } x(t) = e^{-\frac{5}{2}t^2} \left[-e^{\frac{5}{2}t^2} + C \right] = -1 + C e^{-\frac{5}{2}t^2} .$$

f) $\dot{x} = \cos 4t$

D.h., $p=0$, $r = \cos 4t$. Zunächst $P(t) = \int p dt = 0$ und deshalb

$$e^{p(t)} = e^0 = 1 = e^{-p(t)} . \text{ Damit } \int e^{p(t)} r(t) dt = \int 1 \cdot (\cos 4t) dt = \frac{1}{4} \sin 4t .$$

$$\text{Allg. Lösung: } x(t) = \frac{1}{4} \sin 4t + C .$$

g) $\dot{x} + 2x = \cos 4t$

D.h., $p=2$, $r = \cos 4t$. Zunächst $P(t) = \int p dt = \int 2 dt = 2t$. Damit

$$\int e^{p(t)} r(t) dt = \int e^{2t} \cdot (\cos 4t) dt \quad \text{part. Int.: } u = \cos 4t , v' = e^{2t} \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} \cos 4t - \int \frac{1}{2} e^{2t} (-4) \sin 4t dt$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} \cos 4t + 2 \int e^{2t} \sin 4t dt \quad \text{part. Int.: } u = \sin 4t , v' = e^{2t} \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} \cos 4t + 2 \left(\frac{1}{2} e^{2t} \sin 4t - \int \frac{1}{2} e^{2t} 4 \cos 4t dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} \cos 4t + e^{2t} \sin 4t - 4 \int e^{2t} \cos 4t dt$$

Nochmal zusammengefasst in einer Gleichung:

$$\int e^{2t} \cdot (\cos 4t) dt = \frac{1}{2} e^{2t} \cos 4t + e^{2t} \sin 4t - 4 \int e^{2t} \cos 4t dt .$$

Das Integral auf der rechten Seite ist das der linken Seite!

Also die Integrale alle auf die linke Seite bringen:

$$\Rightarrow 5 \int e^{2t} \cdot (\cos 4t) dt = \frac{1}{2} e^{2t} \cos 4t + e^{2t} \sin 4t$$

$$\Rightarrow \int e^{2t} \cdot (\cos 4t) dt = \frac{1}{10} e^{2t} \cos 4t + \frac{1}{5} e^{2t} \sin 4t$$

$$\text{Allg. Lösung: } x(t) = e^{-2t} \left[\frac{1}{10} e^{2t} \cos 4t + \frac{1}{5} e^{2t} \sin 4t + C \right] = \frac{1}{10} \cos 4t + \frac{1}{5} \sin 4t + C e^{-2t}$$

h) $\dot{x} + \frac{2}{t} x = \cos 4t$, $t > 0$

D.h., $p = \frac{2}{t}$, $r = \cos 4t$. Zunächst $P(t) = \int p dt = \int \frac{2}{t} dt = 2 \ln t = \ln t^2$. Dann

$$e^{p(t)} = e^{\ln t^2} = t^2 \quad \text{und} \quad e^{-p(t)} = \frac{1}{e^{p(t)}} = \frac{1}{e^{\ln t^2}} = \frac{1}{t^2} = t^{-2} . \text{ Damit}$$

$$\begin{aligned}
\int e^{P(t)} r(t) dt &= \int t^2 \cos 4t dt && \text{part.Int.: } u=t^2, v'=\cos 4t \Rightarrow v=\frac{1}{4} \sin 4t \\
&= t^2 \frac{1}{4} \sin 4t - \int 2t \frac{1}{4} \sin 4t dt \\
&= t^2 \frac{1}{4} \sin 4t - \frac{1}{2} \int t \sin 4t dt && \text{part.Int.: } u=t, v'=\sin 4t \Rightarrow v=-\frac{1}{4} \cos 4t \\
&= t^2 \frac{1}{4} \sin 4t - \frac{1}{2} \left(-t \frac{1}{4} \cos 4t - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cos 4t dt \right) \\
&= t^2 \frac{1}{4} \sin 4t + t \frac{1}{8} \cos 4t - \frac{1}{8} \int \cos 4t dt \\
&= t^2 \frac{1}{4} \sin 4t + t \frac{1}{8} \cos 4t - \frac{1}{8} \frac{1}{4} \sin 4t \\
\text{Allg. Lösung: } x(t) &= \frac{1}{t^2} \left[t^2 \frac{1}{4} \sin 4t + t \frac{1}{8} \cos 4t - \frac{1}{32} \sin 4t + C \right] \\
&= \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{1}{8t} \cos 4t - \frac{1}{32t^2} \sin 4t + \frac{C}{t^2}
\end{aligned}$$

5.6. Die Differentialgleichungen sind die aus der vorherigen Aufgabe. Berechnen Sie die spezielle Lösung zu den gegebenen Randbedingungen.

a) $\dot{x} = -5t$ mit $x(0) = 5$

$$x(t) = -\frac{5}{2}t^2 + C \Rightarrow 5 = x(0) = C \Rightarrow x(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 5$$

b) $\dot{x} + 5x = -5t$ mit $x(0) = 5$

$$x(t) = -t + \frac{1}{5} + C e^{-5t} \Rightarrow 5 = x(0) = 0 + \frac{1}{5} + C \Rightarrow C = \frac{24}{5} \Rightarrow x(t) = -t + \frac{1}{5} + \frac{24}{5} e^{-5t}$$

c) $\dot{x} = 5t^2 - 5t$ mit $x(0) = 5$

$$x(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + C \Rightarrow 5 = x(0) = C \Rightarrow x(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 5$$

d) $\dot{x} + 5x = 5t^2 - 5t$ mit $x(0) = 5$

$$x(t) = t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{7}{25} + C e^{-5t} \Rightarrow 5 = x(0) = \frac{7}{25} + C \Rightarrow C = \frac{118}{25}$$

$$\Rightarrow x(t) = t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{7}{25} + \frac{118}{25} e^{-5t}$$

e) $\dot{x} + 5tx = -5t$ mit $x(0) = 5$

$$x(t) = -1 + C e^{-\frac{5}{2}t^2} \Rightarrow 5 = x(0) = -1 + C \Rightarrow C = 6 \Rightarrow x(t) = -1 + 6e^{-\frac{5}{2}t^2}$$

f) $\dot{x} = \cos 4t$ mit $x(0) = 5$

$$x(t) = \frac{1}{4} \sin 4t + C \Rightarrow 5 = x(0) = C \Rightarrow x(t) = \frac{1}{4} \sin 4t + 5$$

g) $\dot{x} + 2x = \cos 4t$ mit $x(0) = 5$

$$x(t) = \frac{1}{10} \cos 4t + \frac{1}{5} \sin 4t + C e^{-2t} \Rightarrow 5 = x(0) = \frac{1}{10} + 0 + C \Rightarrow C = \frac{49}{10}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{10} \cos 4t + \frac{1}{5} \sin 4t + \frac{49}{10} e^{-2t}$$

h) $\dot{x} + \frac{2}{t}x = \cos 4t$, $t > 0$ mit $x(1) = 5$ (Taschenrechner)

$$x(t) = \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{1}{8t} \cos 4t - \frac{1}{32t^2} \sin 4t + \frac{C}{t^2}$$

$$\Rightarrow 5 = x(1) = \frac{1}{4} \sin(4) + \frac{1}{8} \cos(4) - \frac{1}{32} \sin(4) + C \approx -0.247255998456561 + C$$

$$\Rightarrow C \approx 5.247255998456561$$

$$\Rightarrow x(t) \approx \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{1}{8t} \cos 4t - \frac{1}{32t^2} \sin 4t + \frac{5.247255998456561}{t^2}$$

5.7. Berechnen Sie die Lösungen folgender homogener Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

a)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u + v \\ \dot{v} &= 4u - 2v \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von \mathbf{A} :

$$0 = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = -2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \Rightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -3$$

Also zwei reelle EW. Deshalb Ansatz $u = Ae^{2t} + Be^{-3t}$
 $v = Ce^{2t} + De^{-3t}$

Einsetzen:

$$2Ae^{2t} - 3Be^{-3t} = Ae^{2t} + Be^{-3t} + Ce^{2t} + De^{-3t}$$

$$2Ce^{2t} - 3De^{-3t} = 4(Ae^{2t} + Be^{-3t}) - 2(Ce^{2t} + De^{-3t})$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \text{1. Glg., } e^{2t}: & \quad 2A = A + C & \Rightarrow & \quad A = C \\ \text{1. Glg., } e^{-3t}: & \quad -3B = B + D & \Rightarrow & \quad -4B = D \\ \text{2. Glg., } e^{2t}: & \quad 2C = 4A - 2C & \Rightarrow & \quad C = A \\ \text{2. Glg., } e^{-3t}: & \quad -3D = 4B - 2D & \Rightarrow & \quad D = -4B \end{aligned}$$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten:

$$u = Ae^{2t} + Be^{-3t}$$

$$v = Ae^{2t} - 4Be^{-3t}$$

b)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u + v \\ \dot{v} &= 4u + v \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von \mathbf{A} :

$$0 = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) \Rightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 3$$

Also zwei reelle EW. Deshalb Ansatz: $u = Ae^{-t} + Be^{3t}$
 $v = Ce^{-t} + De^{3t}$

Einsetzen:

$$-Ae^{-t} + 3Be^{3t} = Ae^{-t} + Be^{3t} + Ce^{-t} + De^{3t}$$

$$-Ce^{-t} + 3De^{3t} = 4(Ae^{-t} + Be^{3t}) + Ce^{-t} + De^{3t}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{1.Glg., } e^{-t}: & -A = A+C & -2A = C \\
 \text{1.Glg., } e^{3t}: & 3B = B+D & 2B = D \\
 \text{2.Glg., } e^{-t}: & -C = 4A+C & C = -2A \\
 \text{2.Glg., } e^{3t}: & 3D = 4B+D & D = 2B
 \end{array} \Rightarrow$$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten: $u = Ae^{-t} + Be^{3t}$
 $v = -2Ae^{-t} + 2Be^{3t}$

c)

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= u+v \\
 \dot{v} &= -2u+3v
 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}
 0 &= |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 2 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \\
 &\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = -1 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = -1 \Rightarrow \lambda - 2 = \pm \sqrt{-1} = \pm i \Rightarrow \lambda = 2 \pm 1i
 \end{aligned}$$

Also zwei komplex-konjugierte EW. Deshalb Ansatz:

$$\begin{aligned}
 u &= e^{2t}(A \cos(1t) + B \sin(1t)) = e^{2t}(A \cos t + B \sin t) \\
 v &= e^{2t}(C \cos(1t) + D \sin(1t)) = e^{2t}(C \cos t + D \sin t)
 \end{aligned}$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \frac{d}{dt}(e^{2t}(A \cos t + B \sin t)) = 2e^{2t}(A \cos t + B \sin t) + e^{2t}(-A \sin t + B \cos t) \\
 &= (2A + B)e^{2t} \cos t + (-A + 2B)e^{2t} \sin t
 \end{aligned}$$

Ebenso $\dot{v} = (2C + D)e^{2t} \cos t + (-C + 2D)e^{2t} \sin t$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 (2A + B)e^{2t} \cos t + (-A + 2B)e^{2t} \sin t &= e^{2t}(A \cos t + B \sin t) + e^{2t}(C \cos t + D \sin t) \\
 (2C + D)e^{2t} \cos t + (-C + 2D)e^{2t} \sin t &= -2(e^{2t}(A \cos t + B \sin t)) + 3(e^{2t}(C \cos t + D \sin t)) \\
 \Rightarrow (2A + B)e^{2t} \cos t + (-A + 2B)e^{2t} \sin t &= (A + C)e^{2t} \cos t + (B + D)e^{2t} \sin t \\
 \Rightarrow (2C + D)e^{2t} \cos t + (-C + 2D)e^{2t} \sin t &= (-2A + 3C)e^{2t} \cos t + (-2B + 3D)e^{2t} \sin t
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{1.Glg., } e^{2t} \cos t: & 2A + B & = A + C \\
 \text{1.Glg., } e^{2t} \sin t: & -A + 2B & = B + D \\
 \text{2.Glg., } e^{2t} \cos t: & 2C + D & = -2A + 3C \\
 \text{2.Glg., } e^{2t} \sin t: & -C + 2D & = -2B + 3D
 \end{array}$$

Sortieren:

$$\begin{aligned}
 A + B - C &= 0 & (1) \\
 \Rightarrow -A + B - D &= 0 & (2) \\
 2A - C + D &= 0 & (3) \\
 +2B - C - D &= 0 & (4) \\
 (1)+(2) \text{ und } (3)+2*(2) \text{ und } (4)-(2): & & \\
 +2B - C - D &= 0 & (1^*) \\
 \Rightarrow -A + B - D &= 0 & (2) \\
 +2B - C - D &= 0 & (3^*) \\
 A + B - C &= 0 & (4^*)
 \end{aligned}$$

Gleichungen (1*) und (3*) sind redundant, da identisch zu (4).

(2) $\Rightarrow D = B - A$

(4*) $\Rightarrow C = A + B$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten: $u = e^{2t}(A \cos t + B \sin t)$
 $v = e^{2t}((A + B) \cos t + (B - A) \sin t)$

d)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -5u + 3v \\ \dot{v} &= -15u + 7v \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -15 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(7-\lambda) + 45 = -35 - 7\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 45 = \lambda^2 - 2\lambda + 10 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = -9 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = -9 \Rightarrow \lambda - 1 = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i \Rightarrow \lambda = \mathbf{1 \pm 3i} \end{aligned}$$

Also zwei komplex-konjugierte EW. Deshalb Ansatz:

$$u = e^{1t} (A \cos(3t) + B \sin(3t)) = e^t (A \cos 3t + B \sin 3t)$$

$$v = e^{1t} (C \cos(3t) + D \sin(3t)) = e^t (C \cos 3t + D \sin 3t)$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{d}{dt} (e^t (A \cos 3t + B \sin 3t)) = e^t (A \cos 3t + B \sin 3t) + e^t (-3A \sin 3t + 3B \cos 3t) \\ &= (A + 3B) e^t \cos 3t + (-3A + B) e^t \sin 3t \end{aligned}$$

Ebenso $\dot{v} = (C + 3D) e^t \cos 3t + (-3C + D) e^t \sin 3t$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} (A + 3B) e^t \cos 3t + (-3A + B) e^t \sin 3t &= -5 (e^t (A \cos 3t + B \sin 3t)) + 3 (e^t (C \cos 3t + D \sin 3t)) \\ (C + 3D) e^t \cos 3t + (-3C + D) e^t \sin 3t &= -15 (e^t (A \cos 3t + B \sin 3t)) + 7 (e^t (C \cos 3t + D \sin 3t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (A + 3B) e^t \cos 3t + (-3A + B) e^t \sin 3t &= (-5A + 3C) e^t \cos 3t + (-5B + 3D) e^t \sin 3t \\ (C + 3D) e^t \cos 3t + (-3C + D) e^t \sin 3t &= (-15A + 7C) e^t \cos 3t + (-15B + 7D) e^t \sin 3t \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

 \Rightarrow Koeffizientenvergleich:

$$1. \text{Glg., } e^t \cos 3t: \quad A + 3B = -5A + 3C$$

$$1. \text{Glg., } e^t \sin 3t: \quad -3A + B = -5B + 3D$$

$$2. \text{Glg., } e^t \cos 3t: \quad C + 3D = -15A + 7C$$

$$2. \text{Glg., } e^t \sin 3t: \quad -3C + D = -15B + 7D$$

b.w.

Sortieren:

$$\begin{array}{rcll} 6A & +3B & -3C & =0 & |:3 \\ \Rightarrow & -3A & +6B & & -3D =0 & |:3 \\ & 15A & & -6C & +3D =0 & |:3 \\ & & 15B & -3C & -6D =0 & |:3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} & 2A & +B & -C & =0 & (1) \\ \Rightarrow & -A & +2B & & -D =0 & (2) \\ & 5A & & -2C & +D =0 & (3) \\ & & 5B & -C & -2D =0 & (4) \end{array}$$

(2)+(3) und (4)+2*(3) und anschließend (3)-2*(1):

$$\begin{array}{rcll} & 2A & +B & -C & =0 & (1) \\ \Rightarrow & 4A & +2B & -2C & =0 & (2^*) \\ & & A & -2B & & +D =0 & (3^*) \\ & 10A & +5B & -5C & =0 & (4^*) \end{array}$$

Gleichungen (2*) und (4*) sind redundant, da identisch zu (1).

(1) $\Rightarrow C=2A+B$

(3*) $\Rightarrow D=2B-A$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten: $u=e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)$
 $v=e^t((2A+B)\cos 3t+(2B-A)\sin 3t)$

e)

$$\begin{array}{l} \dot{u}=3u-4v \\ \dot{v}=u-v \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = -3 + \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ist doppelte reelle Nullstelle.} \end{aligned}$$

Also doppelter reeller EW. Deshalb Ansatz:

$u = (A+Bt)e^{1t} = (A+Bt)e^t$

$v = (C+Dt)e^{1t} = (C+Dt)e^t$

Die Ableitungen sind: $\dot{u} = \frac{d}{dt}((A+Bt)e^t) = e^t(A+Bt) + e^t(B) = (A+B)e^t + Bte^t$ und ebenso $\dot{v} = (C+D)e^t + Dte^t$

Einsetzen liefert:

$(A+B)e^t + Bte^t = 3((A+Bt)e^t) - 4((C+Dt)e^t)$

$(C+D)e^t + Dte^t = (A+Bt)e^t - ((C+Dt)e^t)$

$\Rightarrow (A+B)e^t + Bte^t = (3A-4C)e^t + (3B-4D)te^t$

$(C+D)e^t + Dte^t = (A-C)e^t + (B-D)te^t$

Koeffizientenvergleich:

$$1.\text{Glg., } e^t: \quad A+B = 3A-4C$$

$$1.\text{Glg., } te^t: \quad B = 3B-4D$$

$$2.\text{Glg., } e^t: \quad C+D = A-C$$

$$2.\text{Glg., } te^t: \quad D = B-D$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcccc} -2A & +B & +4C & & =0 & (1) \\ & -2B & & +4D & =0 & (2) \\ -A & & +2C & +D & =0 & (3) \\ & -B & & +2D & =0 & (4) \end{array}$$

(1)+(4):

$$\Rightarrow \begin{array}{rcccc} -2A & & +4C & +2D & =0 & (1^*) \\ & -2B & & +4D & =0 & (2) \\ -A & & +2C & +D & =0 & (3) \\ & -B & & +2D & =0 & (4) \end{array}$$

(1*) und (3) sowie (2) und (4) sind jeweils gleich. Es folgt

$$(3) \Rightarrow A=2C+D$$

$$(4) \Rightarrow B=2D$$

allg. Lösung mit zwei freien Konstanten: $u=(2C+D+2Dt)e^t$
 $v=(C+Dt)e^t$

f)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x-y-z \\ \dot{y} &= x+3y+z \\ \dot{z} &= -3x+y-z \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) + (-1)(1)(-3) + (-1)(1)(1) \\ &\quad - (-3)(3-\lambda)(-1) - (1)(1)(1-\lambda) - (-1-\lambda)(1)(-1) \\ &= -(1-\lambda)(3-\lambda)(1+\lambda) + 3 - 1 - 3(3-\lambda) - 1 + \lambda - 1 - \lambda \\ &= -(1-\lambda^2)(3-\lambda) + 2 - 9 + 3\lambda - 2 \\ &= -(3-3\lambda^2 - \lambda + \lambda^3) - 9 + 3\lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 \end{aligned}$$

Eine Nullstelle durch Probieren. Z.B. $\lambda = -2$. Damit Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12) : (\lambda + 2) = -\lambda^2 + 5\lambda - 6 \\ -(-\lambda^3 - 2\lambda^2) \\ \hline 5\lambda^2 + 4\lambda \\ -(5\lambda^2 + 10\lambda) \\ \hline -6\lambda - 12 \\ -(-6\lambda^2 - 12) \\ \hline 0 \end{array}$$

Damit geht's weiter:

$$0 = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \dots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 = (\lambda + 2)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6) = -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ = -(\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Die Nullstellen und damit die EW sind also $\lambda = -2 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3$.

$$x = A e^{-2t} + B e^{2t} + C e^{3t}$$

Damit folgt für den Ansatz: $y = D e^{-2t} + E e^{2t} + F e^{3t}$.

$$z = G e^{-2t} + H e^{2t} + I e^{3t}$$

Es ist

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} (A e^{-2t} + B e^{2t} + C e^{3t}) = -2A e^{-2t} + 2B e^{2t} + 3C e^{3t}$$

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} (D e^{-2t} + E e^{2t} + F e^{3t}) = -2D e^{-2t} + 2E e^{2t} + 3F e^{3t} .$$

$$\dot{z} = \frac{d}{dt} (G e^{-2t} + H e^{2t} + I e^{3t}) = -2G e^{-2t} + 2H e^{2t} + 3I e^{3t}$$

Dies und den Ansatz einsetzen in die originale DGL:

$$-2A e^{-2t} + 2B e^{2t} + 3C e^{3t} = A e^{-2t} + B e^{2t} + C e^{3t} - (D e^{-2t} + E e^{2t} + F e^{3t}) - (G e^{-2t} + H e^{2t} + I e^{3t})$$

$$-2D e^{-2t} + 2E e^{2t} + 3F e^{3t} = A e^{-2t} + B e^{2t} + C e^{3t} + 3(D e^{-2t} + E e^{2t} + F e^{3t}) + G e^{-2t} + H e^{2t} + I e^{3t}$$

$$-2G e^{-2t} + 2H e^{2t} + 3I e^{3t} = -3(A e^{-2t} + B e^{2t} + C e^{3t}) + D e^{-2t} + E e^{2t} + F e^{3t} - (G e^{-2t} + H e^{2t} + I e^{3t})$$

Koeffizientenvergleich:

$$1. \text{Glg., } e^{-2t}: \quad -2A = A - D - G$$

$$1. \text{Glg., } e^{2t}: \quad 2B = B - E - H$$

$$1. \text{Glg., } e^{3t}: \quad 3C = C - F - I$$

$$2. \text{Glg., } e^{-2t}: \quad -2D = A + 3D + G$$

$$2. \text{Glg., } e^{2t}: \quad 2E = B + 3E + H$$

$$2. \text{Glg., } e^{3t}: \quad 3F = C + 3F + I$$

$$3. \text{Glg., } e^{-2t}: \quad -2G = -3A + D - G$$

$$3. \text{Glg., } e^{2t}: \quad 2H = -3B + E - H$$

$$3. \text{Glg., } e^{3t}: \quad 3I = -3C + F - I$$

Erst mal einen Überblick verschaffen:

$$\begin{array}{ccccccc} -3A & & +D & & +G & & =0 \\ & B & & +E & & +H & =0 \\ & & 2C & & +F & & +I =0 \\ \Rightarrow & -A & & -5D & & -G & =0 \\ & -B & & -E & & -H & =0 \\ & & -C & & +0F & & -I =0 \\ & 3A & & -D & & -G & =0 \\ & & 3B & & -E & & +3H =0 \\ & & & 3C & & -F & +4I =0 \end{array}$$

Umsortieren:

$$\begin{array}{ccccccc} -3A & & +D & & +G & & =0 \\ -A & & -5D & & -G & & =0 \\ 3A & & -D & & -G & & =0 \\ & 3B & & -E & & +3H & =0 \\ & -B & & -E & & -H & =0 \\ & & B & & +E & & +H =0 \\ & & & 2C & & +F & +I =0 \\ & & & -C & & +0F & -I =0 \\ & & & & 3C & & -F +4I =0 \end{array}$$

3 separate Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} -3A + D + G &= 0 & (1) \\ -A - 5D - G &= 0 & (2) \\ \text{I. } 3A - D - G &= 0 & (\text{redundant}) \end{aligned}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \begin{aligned} -4A - 4D &= 0 & (1^*) \\ -A - 5D - G &= 0 & (2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} D &= -A \\ G &= 4A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3B - E + 3H &= 0 & (1) \\ -B - E - H &= 0 & (\text{redundant}) \\ \text{II. } B + E + H &= 0 & (2) \end{aligned}$$

$$(2)+(1) \Rightarrow \begin{aligned} 3B - E + 3H &= 0 & (1) \\ 4B + 4H &= 0 & (2^*) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} E &= 0 \\ H &= -B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2C + F + I &= 0 & (1) \\ -C + 0F - I &= 0 & (2) \\ \text{III. } 3C - F + 4I &= 0 & (3) \end{aligned}$$

$$(1)+(3) \Rightarrow \begin{aligned} 5C + 5I &= 0 & (\text{redundant}) \\ -C - I &= 0 & (2) \\ 3C - F + 4I &= 0 & (3) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} I &= -C \\ F &= -C \end{aligned}$$

Damit folgt die allg. Lösung mit den freien Konstanten A,B,C:

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{-2t} + B e^{2t} + C e^{3t} \\ y(t) &= -A e^{-2t} - C e^{3t} \\ z(t) &= 4A e^{-2t} - B e^{2t} - C e^{3t} \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= 4x - 4y + z \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)^2(1 - \lambda) + 4 + 0 - 0 - (-4)(1)(-\lambda) - 0 \\ &= \lambda^2 - \lambda^3 + 4 - 4\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 \end{aligned}$$

Eine Nullstelle durch Probieren. Z.B. $\lambda = 1$. Damit Polynomdivision:

$$\begin{aligned} (-\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 4) : (\lambda - 1) &= -\lambda^2 - 4 \\ -(-\lambda^3 + \lambda^2) & \\ 0 - 4\lambda + 4 & \\ -(-4\lambda + 4) & \\ 0 & \end{aligned}$$

Damit geht's weiter

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \dots = -\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 4) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2i)(\lambda - 2i) \end{aligned}$$

denn die Nullstellen von $\lambda^2 + 4$ sind $\pm 2i$.

Die Nullstellen und damit die EW sind also $\lambda = 0 - 2i \vee \lambda = 0 + 2i \vee \lambda = 1$.

Damit folgt für den Ansatz:

$$x = A e^{1t} + B e^0 \cos(2t) + C e^0 \sin(2t) = A e^t + B \cos 2t + C \sin 2t$$

$$y = D e^{1t} + E e^0 \cos(2t) + F e^0 \sin(2t) = D e^t + E \cos 2t + F \sin 2t \quad .$$

$$z = G e^{1t} + H e^0 \cos(2t) + I e^0 \sin(2t) = G e^t + H \cos 2t + I \sin 2t$$

Es ist

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} (A e^t + B \cos 2t + C \sin 2t) = A e^t - 2B \sin 2t + 2C \cos 2t$$

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} (D e^t + E \cos 2t + F \sin 2t) = D e^t - 2E \sin 2t + 2F \cos 2t$$

$$\dot{z} = \frac{d}{dt} (G e^t + H \cos 2t + I \sin 2t) = G e^t - 2H \sin 2t + 2I \cos 2t$$

Dies und den Ansatz einsetzen in die originale DGL:

$$\begin{aligned} A e^t - 2B \sin 2t + 2C \cos 2t &= D e^t + E \cos 2t + F \sin 2t \\ D e^t - 2E \sin 2t + 2F \cos 2t &= G e^t + H \cos 2t + I \sin 2t \\ G e^t - 2H \sin 2t + 2I \cos 2t &= 4(A e^t + B \cos 2t + C \sin 2t) \\ &\quad - 4(D e^t + E \cos 2t + F \sin 2t) \\ &\quad + G e^t + H \cos 2t + I \sin 2t \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \text{1.Glg., } e^t: \quad A &= D & (1) \\ \text{1.Glg., } \cos 2t: \quad -2B &= F & (2) \\ \text{1.Glg., } \sin 2t: \quad 2C &= E & (3) \\ \text{2.Glg., } e^t: \quad D &= G & (4) \\ \text{2.Glg., } \cos 2t: \quad -2E &= I & (5) \\ \text{2.Glg., } \sin 2t: \quad 2F &= H & (6) \\ \text{3.Glg., } e^t: \quad G &= 4A - 4D + G & (7) \\ \text{3.Glg., } \cos 2t: \quad -2H &= 4C - 4F + I & (8) \\ \text{3.Glg., } \sin 2t: \quad 2I &= 4B - 4E + H & (9) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir durch „Draufschaun“:

Aus (1) und (4) liest man ab: $A = D = G$ und damit ist auch (7) erfüllt.

Aus (2) folgt $F = -2B$ und deshalb aus (6) $H = -4B$ und aus (3) folgt $E = 2C$ und deshalb aus (5) $I = -4C$. Und damit sind auch (8) und (9) erfüllt.

Damit folgt die allgemeine Lösung mit den drei freien Konstanten A,B,C:

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^t + B \cos 2t + C \sin 2t \\ y(t) &= A e^t + 2C \cos 2t - 2B \sin 2t \\ z(t) &= A e^t - 4B \cos 2t - 4C \sin 2t \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= 2x + y - 2z \\ \dot{z} &= 3x + 2y + z \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} 0 = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - 2(-2)(1-\lambda) - 0 \\ &= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 4 - 4\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5 \end{aligned}$$

Eine Nullstelle durch Probieren. Z.B. $\lambda = 1$. Dann mit Polynomdivision:

$$\begin{aligned} &(-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 2\lambda - 5 \\ &-(-\lambda^3 + \lambda^2) \\ &\quad 2\lambda^2 - 7\lambda \\ &\quad -(2\lambda^2 - 2\lambda) \\ &\quad\quad -5\lambda + 5 \\ &\quad\quad -(-5\lambda + 5) \\ &\quad\quad\quad 0 \end{aligned}$$

Nullstellen von $\lambda^2 - 2\lambda + 5$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 5 &= 0 & \Rightarrow & \lambda^2 - 2\lambda + 1 = -4 & \Rightarrow & (\lambda - 1)^2 = -4 \\ \Rightarrow \lambda - 1 &= \pm\sqrt{-4} = \pm 2i & \Rightarrow & \lambda = 1 \pm 2i \end{aligned}$$

Damit geht's weiter

$$\begin{aligned} 0 = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| &= \dots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda - 5) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 1 + 2i)(\lambda + 1 - 2i) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} sind also die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = 1 + 2i \vee \lambda_3 = 1 - 2i$$

Damit ergibt sich folgender Ansatz:

$$\begin{aligned} x &= A e^{1t} + B e^{1t} \cos(2t) + C e^{1t} \sin(2t) = A e^t + e^t (B \cos 2t + C \sin 2t) \\ y &= D e^{1t} + E e^{1t} \cos(2t) + F e^{1t} \sin(2t) = D e^t + e^t (E \cos 2t + F \sin 2t) \\ z &= G e^{1t} + H e^{1t} \cos(2t) + I e^{1t} \sin(2t) = G e^t + e^t (H \cos 2t + I \sin 2t) \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt} (A e^t + e^t (B \cos 2t + C \sin 2t)) \\ &= A e^t + e^t (B \cos 2t + C \sin 2t) + e^t (-2B \sin 2t + 2C \cos 2t) \\ &= A e^t + e^t ((B + 2C) \cos 2t + (C - 2B) \sin 2t) \\ \dot{y} &= \frac{d}{dt} (D e^t + e^t (E \cos 2t + F \sin 2t)) \\ &= D e^t + e^t (E \cos 2t + F \sin 2t) + e^t (-2E \sin 2t + 2F \cos 2t) \\ &= D e^t + e^t ((E + 2F) \cos 2t + (F - 2E) \sin 2t) \\ \dot{z} &= \frac{d}{dt} (G e^t + e^t (H \cos 2t + I \sin 2t)) \\ &= G e^t + e^t (H \cos 2t + I \sin 2t) + e^t (-2H \sin 2t + 2I \cos 2t) \\ &= G e^t + e^t ((H + 2I) \cos 2t + (I - 2H) \sin 2t) \end{aligned}$$

Dies und den Ansatz in die Original-DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} A e^t + e^t((B+2C) \cos 2t + (C-2B) \sin 2t) \\ = A e^t + e^t(B \cos 2t + C \sin 2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D e^t + e^t((E+2F) \cos 2t + (F-2E) \sin 2t) \\ = 2(A e^t + e^t(B \cos 2t + C \sin 2t)) \\ + D e^t + e^t(E \cos 2t + F \sin 2t) - 2(G e^t + e^t(H \cos 2t + I \sin 2t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G e^t + e^t((H+2I) \cos 2t + (I-2H) \sin 2t) \\ = 3(A e^t + e^t(B \cos 2t + C \sin 2t)) \\ + 2(D e^t + e^t(E \cos 2t + F \sin 2t)) + G e^t + e^t(H \cos 2t + I \sin 2t) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$1. \text{Glg., } e^t: \quad A = A \quad (1)$$

$$1. \text{Glg., } e^t \cos 2t: \quad B+2C = B \quad (2)$$

$$1. \text{Glg., } e^t \sin 2t: \quad C-2B = C \quad (3)$$

$$2. \text{Glg., } e^t: \quad D = 2A + D - 2G \quad (4)$$

$$2. \text{Glg., } e^t \cos 2t: \quad E+2F = 2B + E - 2H \quad (5)$$

$$2. \text{Glg., } e^t \sin 2t: \quad F-2E = 2C + F - 2I \quad (6)$$

$$3. \text{Glg., } e^t: \quad G = 3A + 2D + G \quad (7)$$

$$3. \text{Glg., } e^t \cos 2t: \quad H+2I = 3B + 2E + H \quad (8)$$

$$3. \text{Glg., } e^t \sin 2t: \quad I-2H = 3C + 2F + I \quad (9)$$

Aufräumen:

$$(1) \Rightarrow A = A$$

$$(2) \Rightarrow C = 0$$

$$(3) \Rightarrow B = 0$$

$$(4) \Rightarrow 0 = 2A - 2G \Rightarrow A = G$$

$$(5) \Rightarrow 2F = -2H \Rightarrow F = -H$$

$$(6) \Rightarrow -2E = -2I \Rightarrow E = I$$

$$(7) \Rightarrow 0 = 3A + 2D \Rightarrow D = -\frac{3}{2}G$$

$$(8) \Rightarrow 2I = 2E \Rightarrow E = I$$

$$(9) \Rightarrow -2H = 2F \Rightarrow F = -H$$

Damit folgt die allgemeine Lösung mit den drei freien Konstanten G,H,I:

$$x(t) = G e^t$$

$$y(t) = -\frac{3}{2} G e^t + e^t(I \cos 2t - H \sin 2t)$$

$$z(t) = G e^t + e^t(H \cos 2t + I \sin 2t)$$