Kapitel 3, Übung 3: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 3, Seiten 42-55

3.6. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene bzw. die Linearisierung für die folgenden Funktionen.

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$ am Punkt (1,2)

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ am Punkt (1,0)

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = (x+y)^2 z^2$ am Punkt (1,2,3)

d) (freiwillig)

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3,}\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y^2+z^2 \\ x^2+y+z^2 \\ x^2+y^2+z \end{pmatrix}$$ am Punkt (-1,0,1)

3.7. Bestimmen Sie, ob und, wenn ja, welche Extrema die folgenden Funktionen haben.

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 \cdot y^2$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + y^3 - x - y$

Kapitel 3, Übung 3: Lösungen

3.6. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene bzw. die Linearisierung für die folgenden Funktionen.

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$

$g(x,y)=\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{18}(x-1)+\dfrac{1}{9}(y-2)$

b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$g(x,y)=x$

c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z)=(x+y)^2 z^2$

$g(x,y,z)=81+54(x-1)+54(y-2)+54(z-3)$

d)

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=\begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y^2+z^2 \\ x^2+y+z^2 \\ x^2+y^2+z \end{pmatrix}$$

$$g(x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

3.7. Bestimmen Sie, ob und wenn ja welche, Extrema die folgenden Funktionen haben.

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y)=x^2\cdot y^2$

Mögl. Extremum bei (0,0). Aber Hesse-Matrix bei (0,0) ist Nullmatrix. Kein Extremum.

b) grad f = 0 hat 4 Nullstellen: $x=\pm\sqrt{1/3}$ und $y=\pm\sqrt{1/3}$ sind jeweils zu kombinieren.

Bezeichnung: $(+,-)$ entspricht $x=+\sqrt{1/3}$ und $y=-\sqrt{1/3}$, usw.

$$\text{Hess}(f)_{(+,+)}=\begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$ ist positiv definit. Dort ist ein Minimum.

$$\text{Hess}(f)_{(+,-)}=\begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$ ist indefinit. Kein Extremum.

$$\text{Hess}(f)_{(-,+)}=\begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$ ist indefinit. Kein Extremum.

$$\text{Hess}(f)_{(-,-)}=\begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$ ist negativ definit. Dort ist ein Maximum.