

## Kapitel 3, Übung 2: Aufgaben

### Voraussetzung: Kapitel 3, Seiten 25-41

3.4. Bestimme die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

a)  $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

b)  $f(x, y, z) = \frac{1 + x + y + z}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$

Hinweis: Die Schwierigkeit bei b) besteht darin, die Übersicht zu behalten und die „Schreibarbeit“ (und damit die Chancen auf Fehler) zu reduzieren. Es kann helfen, wenn man sich Abkürzungen definiert. Z.B.

$$Z = 1 + x + y + z$$

$$Z_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = 1 \quad Z_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = 1 \quad Z_z = \frac{\partial Z}{\partial z} = 1$$

$$N = 1 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \quad N_y = \frac{\partial N}{\partial y} = 2y \quad N_z = \frac{\partial N}{\partial z} = 2z$$

3.5. Bestimme die erste Ableitung der Funktion h mit der Kettenregel.

a)  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad h(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2))$

mit

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

b)  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_1, x_2, x_3))$

mit

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \end{pmatrix}$$

## Kapitel 3, Übung 2: Lösungen

3.4. Bestimme die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

a)

$$f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = -2e^{-(x^2 + y^2)} - 2x(-2x)e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -2e^{-(x^2 + y^2)} - 2y(-2y)e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (-2x)(-2y)e^{-(x^2 + y^2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

b.w.

b)

$$f(x, y, z) = \frac{1+x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2} = \frac{Z}{N}$$

Bezeichnungen:

$$Z = 1+x+y+z$$

$$Z_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = 1 \quad Z_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = 1 \quad Z_z = \frac{\partial Z}{\partial z} = 1$$

$$N = 1+x^2+y^2+z^2$$

$$N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \quad N_y = \frac{\partial N}{\partial y} = 2y \quad N_z = \frac{\partial N}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{Z_x \cdot N - Z \cdot N_x}{N^2} = \frac{1}{N} - \frac{2xZ}{N^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{Z_y \cdot N - Z \cdot N_y}{N^2} = \frac{1}{N} - \frac{2yZ}{N^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{Z_z \cdot N - Z \cdot N_z}{N^2} = \frac{1}{N} - \frac{2zZ}{N^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} &= \frac{N_x}{N^2} - \frac{(2xZ_x + 2Z)N^2 - (2xZ)2NN_x}{N^4} \\ &= \frac{2x}{N^2} - \frac{(2x + 2Z)N - (2xZ)2(2x)}{N^3} \\ &= \frac{2x}{N^2} - \frac{2xN + 2ZN - 8x^2Z}{N^3} \\ &= -\frac{2xN + 2xN + 2ZN - 8x^2Z}{N^3} \\ &= -\frac{4xN + 2ZN - 8x^2Z}{N^3} \end{aligned}$$

Entsprechend:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -\frac{4yN + 2ZN - 8y^2Z}{N^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = -\frac{4zN + 2ZN - 8z^2Z}{N^3}$$

Gemischte Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{N_y}{N^2} - \frac{(2xZ_y)N^2 - (2xZ)2NN_y}{N^4} \\ &= \frac{2y}{N^2} - \frac{2xN - 8xyZ}{N^3} = -\frac{2yN + 2xN - 8xyZ}{N^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Entsprechend:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\frac{2zN + 2xN - 8xzZ}{N^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -\frac{2zN + 2yN - 8yzZ}{N^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

3.5. Bestimme die erste Ableitung der Funktion  $h$  mit der Kettenregel.

a)

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad h(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2))$$

mit

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3^2 \quad \Rightarrow \quad \text{grad } f = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^2 x_3^2 \\ 2x_1^2 x_2 x_3^2 \\ 2x_1^2 x_2^2 x_3 \end{pmatrix}^T \quad (\text{d.h., ein Zeilenvektor})$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{grad } g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } h = \text{grad } f \cdot \text{grad } g = \left( 2x_1 x_2^2 (x_1 x_2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 (x_1 x_2) x_2 \quad 2x_1^2 x_2 (x_1 x_2)^2 + 2x_1^2 x_2^2 (x_1 x_2) x_1 \right)$$

b)

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_1, x_2, x_3))$$

mit

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{grad } f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{grad } g = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } h = \text{grad } f \cdot \text{grad } g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}$$