Kapitel 3, Übung 1: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 3, Seiten 1-31

3.1. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen nach den Variablen.

a) $f(x,y)=e^x \cdot e^y$

b) $f(x,y)=e^{x \cdot y}$

c) $f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$

d) $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{1}{2x_1^2+\sqrt{x_2^2+x_3^2}}$

3.2. Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen nach den Variablen. Verifizieren Sie, dass das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationsschritte ist.

a) $f(x,y)=x^3+y^3+x^2y^2+xy+1$

b) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

3.3. Berechnen Sie alle dritten partiellen Ableitungen. Nutzen Sie aus, dass das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationsschritte ist.

$f(x,y,z)=x^2y^2z^2+x^3+y^3+z^3$

Hinweis: Wie viele partielle Ableitungen 3.Ordnung gibt es bei 3 Variablen? Wie viele muss man nur explizit ausrechnen?

Kapitel 3, Übung 1: Lösungen

3.1. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen nach den Variablen.

a) $f(x,y)=e^x \cdot e^y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=e^x \cdot e^y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=e^x \cdot e^y$

b) $f(x,y)=e^{x \cdot y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=y\,e^{x \cdot y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x\,e^{x \cdot y}$

c) $f(x,y)=\sin(x)\cos(y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\cos(x)\cos(y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\sin(x)(-\sin(y))$

d)
$$f(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{2x_1^2+\sqrt{x_2^2+x_3^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}=-\frac{1}{\left(2x_1^2+\sqrt{x_2^2+x_3^2}\right)^2}\cdot 4x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=-\frac{1}{\left(2x_1^2+\sqrt{x_2^2+x_3^2}\right)^2}\cdot\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}=-\frac{1}{\left(2x_1^2+\sqrt{x_2^2+x_3^2}\right)^2}\cdot\frac{x_3}{\sqrt{x_2^2+x_3^2}}$$

3.2. Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen nach den Variablen. Verifizieren Sie, dass das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationsschritte ist.

a)
$$f(x,y)=x^3+y^3+x^2y^2+xy+1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+2xy^2+y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2+2x^2y+x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}=6x+2y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}=6y+2x^2$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=4xy+1 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=4xy+1$$

b) $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}=-\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}+3\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}=-\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}+3\frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z}=-\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}+3\frac{z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{3xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}=\frac{3xz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}=\frac{3yz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}$$

3.3. Berechnen Sie alle dritten partiellen Ableitungen. Nutzen Sie aus, dass das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationsschritte ist.

$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 + x^3 + y^3 + z^3$

Hinweis:
Wie viele partielle Ableitungen 3.Ordnung gibt es bei 3 Variablen?
Es gibt insges. 27 Ableitungen 3. Ordnung.

Wie viele muss man nur explizit ausrechnen?
Es sind 10 Ableitungen zu bilden, z.B. nach den Variablen (Reihenfolge der Differentiation von rechts nach links):

xxx, yxx, zxx, yyy, xyy, zyy, zzz, xzz, yzz, xyz

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2z^2 + 3x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2y^2z^2 + 6x \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x} = 6$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} = 4yz^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial x} = 4y^2 z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2yz^2 + 3y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 2x^2z^2 + 6y \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y} = 6$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} = 4xz^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial y} = 4x^2 z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2y^2z + 3z^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = 2x^2y^2 + 6z \quad \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial z \partial z} = 6$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial z} = 4xy^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial z} = 4x^2 y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = 8xyz$$