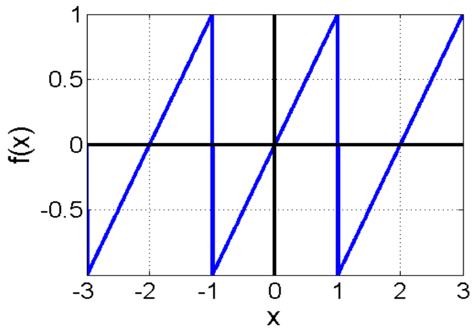
Kapitel 2, Übung 3: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 2, Seiten 30-47

2.6. Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{für } x\in(-1,1] \\ x-k & \text{für } x\in(k-1,k+1] \text{ mit } k=..,-4,-2,0,2,4,... \end{cases}$$

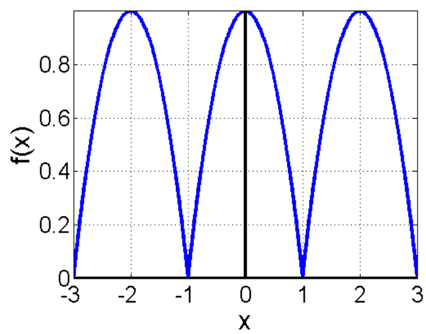
Beachten Sie: Die erste Zeile ist lediglich der Fall k=0 in expliziter Form.



a) Ist die Funktion eine ungerade Funktion?
b) Was ist die Periode dieser Funktion?
c) Berechnen Sie die ersten drei nichtverschwindenden Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihe für diese Funktion.

2.7. Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x)=1-(x-k)^2 \quad \text{für } x\in(k-1,k+1] \text{ mit } k=...,-4,-2,0,+2,+4,...$$



a) Ist die Funktion eine gerade Funktion?
b) Was ist die Periode dieser Funktion?
c) Berechnen Sie die ersten drei nichtverschwindenden Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihe für diese Funktion.

Kapitel 2, Übung 3: Lösungen

2.6. Fourier-Reihe

Funktion ungerade. Deshalb $a_0 = 0 = a_n$, also kein konstanter Term und keine Cosinus-Terme.

Periode ist T=2. Damit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Wähle als Integrationsintervall [-1,1].

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} x\sin(n\omega x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x\sin(n\pi x)\,dx = \left[x\left(\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\left(\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right)dx$$

Das verbleibende Integral verschwindet, weil cos über eine volle Periode integriert wird.
Damit:

$$b_n = \left[x\left(\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right)\right]_{-1}^{+1} = 1\left(\frac{-\cos(n\pi 1)}{n\pi}\right) - (-1)\left(\frac{-\cos(n\pi(-1))}{n\pi}\right)$$

$$= -\frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi) + \cos(-n\pi)) = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi)$$, denn cos ist eine gerade Funktion.

Damit: $b_1 = \frac{2}{\pi}$ $\quad b_2 = \frac{-1}{\pi}$ $\quad b_3 = \frac{2}{3\pi}$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{1}{\pi}\sin(2\pi x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi x) \mp \ldots$$

2.7. Fourier-Reihe

Funktion ist gerade. Deshalb $b_n = 0$; d.h., keine Sinus-Terme.

Periode ist T=2. Damit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

Wähle als Integrationsintervall [-1,1].

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos(n\omega_0 x)\,dx = -\frac{4\cos(n\pi)}{n^2\omega_0^2} = -(-1)^n\frac{4}{n^2\omega_0^2} \qquad \text{mit } \cos n\pi = (-1)^n$$

Damit $f(x) = \frac{1}{2}\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{4}{2^2\pi^2}\cos 2\pi x + \frac{4}{3^2\pi^2}\cos 3\pi x \mp \ldots$