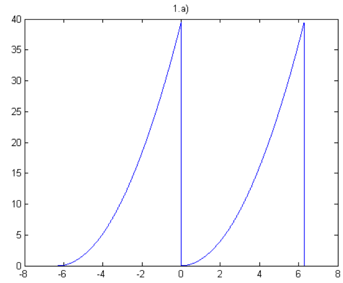
Kapitel 2, Übung 2: Aufgaben

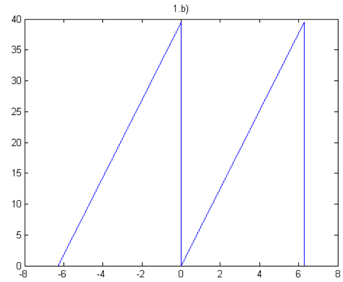
Voraussetzung: Kapitel 2, Seiten 30-47

2.5. Berechnen Sie die Fourier-Reihen zu folgenden Funktionen.

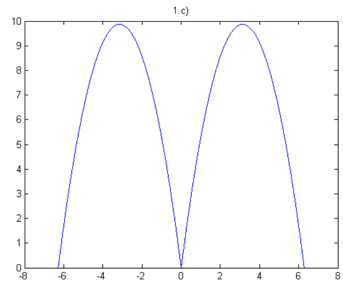
a) $f(x)=x^2$ für $0<x<2\pi$



b) $f(x)=2\pi x$ für $0<x<2\pi$

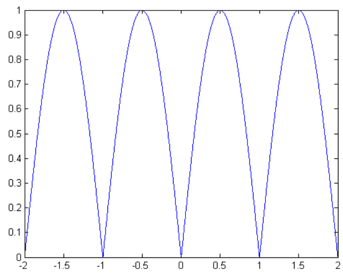


c) $f(x)=x(2\pi-x)$ für $0<x<2\pi$
Hinweis: Hinschauen!



d) $f(t)=|\sin(\omega_0 t)|$

für $0\leq t\leq T$, $\omega_0=2\pi/T$



Hinweise zu d):

1. Aufwändig! Die ersten 3 nicht verschwindenden Terme reichen.

2. Es treten Integrale der Form $\int \sin(\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,dt$ auf.
   Trick:
   $$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad \text{Sinus-Additionstheorem}$$
   $$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$
   $$\text{Summe: } \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y \quad \text{mit } x=\omega_0 t \text{ und } y=m\omega_0 t\ .$$

3. Ist die Funktion gerade oder ungerade? Braucht man Integrale der Form
   $\int \sin(\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,dt$?
   Falls ja, kann man das Cosinus-Additionstheorem in ähnlicher Weise verwenden.

Kapitel 2, Übung 2: Lösungen

2.5. Fourier-Reihen

a) $f(x)=x^2 \quad \text{für} \quad 0< x< 2\pi$

$$f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)$$

b) $f(x)=2\pi x \quad \text{für} \quad 0< x< 2\pi$

$$f(x)=2\pi^2-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

c) $f(x)=x(2\pi-x) \quad \text{für} \quad 0< x< 2\pi$

$$f(x)=\frac{2\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

d) $f(t)=|\sin(\omega_0 t)| \quad \text{für} \quad 0\le t\le T \;, \; \omega_0=2\pi/T$

$$g(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos(2\omega_0 t)+\frac{1}{3\cdot 5}\cos(4\omega_0 t)+\frac{1}{5\cdot 7}\cos(6\omega_0 t)+\ldots\right)$$