Kapitel 2, Übung 1: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 2, Seiten 1-29

2.1. Berechnen Sie das Taylor-Polynom zu folgenden Funktionen:

a) $f(x)=x^3$ bei $x_0=3$.

b) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ bei $x_0=0$.

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$ bei $x_0=0$.

d) $f(x)=\ln((1+x)^2)$ bei $x_0=0$.

e) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ bei $x_0=0$.

f) $f(x)=\sinh(x)$ bei $x_0=0$. (Sprich: Sinus hyperbolicus)

Hinweis: $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

g) $f(x)=\cosh(x)$ bei $x_0=0$. (Sprich: Cosinus hyperbolicus)

Hinweis: $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Hinweis zu f) und g): $(\sinh(x))'=\cosh(x)$ und $(\cosh(x))'=\sinh(x)$

2.2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Funktionen in Aufgabe 1.
Hinweis: Für das kubische Polynom gibt es nichts zu rechnen, nur zu überlegen.

2.3. Für die Funktionen in Aufgabe 1, wie groß wird der Betrag des Restglieds der Ordnung 4 höchstens im Intervall $[x_0-1/2, x_0+1/2]$?
Hinweis: Dies braucht man für Fehlerabschätzungen. Wenn ein Term 4.Ordnung nicht vorhanden ist, wie verfährt man dann sinnvollerweise?

2.4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Einmal mit der Regel von l'Hospital und einmal mit einer Reihenentwicklung.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{e^x-1-x-x^2/2}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4}-1}{(1-\cos(x))^2}$

Kapitel 2, Übung 1: Lösungen

2.1.

a) $T(x)=27+27(x-3)+9(x-3)^2+(x-3)^3$

b) $T(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{-1}{i}x^i=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\pm\ldots$

c) $T(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{1/2}{i}x^i=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5\pm\ldots$

d) $T(x)=2\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}x^i=2x-\frac{2}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{4}x^4+\frac{2}{5}x^5\mp\ldots$

e) $T(x)=2\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1}x^{2i+1}=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\ldots$

f) $T(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots$

g) $T(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{2i}}{(2i)!}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots$

2.2.

a) Polynom identisch zu x^3. Reihe bricht ab! Polynom gültig für alle $x\in\mathbb{R}$.
„Konvergenzradius“ ist ∞.

b) r = 1

c) r = 1

d) r = 1

e) r = 1

f) r = ∞

g) r = ∞

2.3.

a) 0 (kein Restglied 4.Ordnung oder höher!)

b) 2

c) $5\sqrt{2} / 256 \approx 0{,}0276\ldots$

d) 1/2

e) $772/3840 \approx 0{,}2$ (vom Term 5.Ordnung)

f) $13/38400 \approx 0{,}000294$ (vom Term 5.Ordnung)

g) $13/3840 \approx 0{,}00294$ (hier wieder vom Term 4.Ordnung)

2.4.

a) 1

b) 4

c) 4