Kapitel 1, Übung 1: Aufgaben

Voraussetzung: Kapitel 1, Seiten 1-13

1.1. Integriere mittels partieller Integration und mittels Substitution.

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx$$

a) partielle Integration: u(x) = x

b) Substitution: x = z -1

Vergleiche die Ergebnisse.

1.2. Integriere.

a) $\int \cos x \cdot e^{\sin x}\,dx$

b) $\int \sin(3x)\cos(3x)\,dx$

c) $\int \frac{dx}{(1-x)^3}$

d) $\int x^2 \ln x\,dx$

e) $\int x^3 \cos(x^2)\,dx$

f) $\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx$

g) $\int \frac{4x\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x^5}}{2x\sqrt[4]{x}}\,dx$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ (Hinweis: Substitution $z=x^2$, Integraltafel benutzen.)

1.3. Berechne die bestimmten Integrale.

a) $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cdot\cos^2 x}\,dx$

b) $\int_1^4 \frac{1-u^2}{\sqrt{u}}\,du$

1.4. Berechne den Flächeninhalt, der zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossen ist.

a) $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+4$

b) $f(x)=3(x-2)^2-5$

c) $f(x)=\sqrt{6-2x}$ (Die zweite Begrenzung ist die y-Achse.)

d) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-5}$

(Hinweis: Polynomdivision mit Rest, gibt drei Terme, die sich leicht integrieren lassen.)

Kapitel 1, Übung 1: Lösungen

1.1. Integriere mittels partieller Integration und mittels Substitution.

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx$$

a) partielle Integration: u(x) = x

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx=\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2}-\frac{2}{3}\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}$$

b) Substitution: x = z -1

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx=\int(z^{3/2}-\sqrt{z})\,dz=\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

Vergleiche die Ergebnisse: $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$ ausklammern und Rest zusammenfassen:

Ergebnisse gleich.

1.2. Integriere.

a) Substitution z=sin x: $\int\cos x\cdot e^{\sin x}\,dx=\int e^z\,dz=e^z+C=e^{\sin x}+C$

b) Erster Lösungsweg: $\sin 2a=2\sin a\cos a$ mit $a=3x$:

$$\int\sin(3x)\cos(3x)\,dx=\frac{1}{2}\int\sin(6x)\,dx=\frac{1}{2}\frac{1}{6}(-\cos 6x)+C$$

Alternative Lösung mit Substitution:

$$\int\sin(3x)\cos(3x)\,dx\qquad\text{Substitution: } z=\sin 3x\Rightarrow dz=3\cos 3x\,dx\Rightarrow\frac{1}{3}dz=\cos 3x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int z\,dz=\frac{1}{3}\frac{1}{2}z^2+C=\frac{1}{6}\sin^2 3x+C$$

Beachte: Die Konstanten C müssen nicht gleich sein. Sie hier mit dem gleichen Buchstaben zu benennen ist lediglich der Tatsache geschuldet, dass man nur ausdrücken möchte „Irgendeine Konstante, für die ich mir jetzt nicht ständig einen neuen Namen ausdenke.“

Was hat die zweite Lösung mit der ersten Lösung zu tun?

$$\frac{1}{6}\sin^2 3x=\frac{1}{6}\frac{1}{2}(\sin^2 3x+\sin^2 3x)=\frac{1}{6}\frac{1}{2}(1-\cos^2 3x+\sin^2 3x)$$

$$=\frac{1}{6}\frac{1}{2}(1-(\cos^2 3x-\sin^2 3x))=\frac{1}{6}\frac{1}{2}(1-(\cos 6x))=\frac{1}{2}\frac{1}{6}(-\cos 6x)+C$$

M.a.W.: Die beiden Lösungen unterscheiden sich nur um eine Konstante. In einer Klausur sind natürlich beide Formen (und ggf. andere ...) eine richtige Lösung! Das festzustellen ist dann Aufgabe des Korrekteurs.

c) Substitution z=1-x:

$$\int\frac{dx}{(1-x)^3}=-\int\frac{dz}{z^3}=-(\frac{1}{(-3+1)}z^{-3+1})+C=-(-\frac{1}{2}z^{-2})+C=-(-\frac{1}{2}(1-x)^{-2})+C$$

d) u=ln x, v‘=x2: $\int x^2\ln x\,dx=...=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$

e)

$$\int x^3\cos(x^2)\,dx\quad\text{mit } z=x^2\Rightarrow dz=2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int z\cos z\,dz\quad\text{mit } u=z,\ v'=\cos z$$

$$=...=\frac{1}{2}x^2\sin(x^2)+\frac{1}{2}\cos(x^2)+C$$

f) $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$

g) „Durchdividieren“: $\int \frac{4x\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x^5}}{2x\sqrt[4]{x}} dx = \ldots = \frac{24}{13} x^{\frac{13}{12}} + \frac{3}{2} x + C$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$ (Hinweis: Substitution $z = x^2$, Integraltafel benutzen.)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}} dx \quad \text{mit} \quad z = x^2 \qquad dz = 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} \text{ jetzt Integraltafel}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|z + \sqrt{z^2-1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|x^2 + \sqrt{x^4-1}\right| + C$$

1.3. Berechne die bestimmten Integrale.

a) $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2 \cdot \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{2} \tan x - \frac{x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \tan(\pi/4) - \pi/8 \approx 0.107$

b)

$$\int_1^4 \frac{1-u^2}{\sqrt{u}} dx$$

$$F(u) = 2\sqrt{u} - \frac{2}{5} u^{5/2} + C \quad \text{Wir verwenden C=0, da wir die Differenz bilden werden.}$$

$$F(1) = 2 - \frac{2}{5} = 1.6$$

$$F(4) = 2\sqrt{4} - \frac{2}{5} 4^{5/2} = -8.8$$

$$\int_1^4 \frac{1-u^2}{\sqrt{u}} dx = F(4) - F(1) = -10.4$$

1.4. Berechne den Flächeninhalt, der zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossen ist.

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+4$$

$$F(x)=-\frac{1}{4}\frac{1}{3}x^3+4x+C$$ Wir verwenden C=0, da wir die Differenz bilden werden.

a)

$$F(4)=\frac{2}{3}16$$

$$F(-4)=-\frac{2}{3}16$$

$$\int_{-4}^{4}-\frac{1}{4}x^2+4\,dx=F(4)-F(-4)=\frac{4}{3}16\approx 21.33$$

$$f(x)=3(x-2)^2-5$$

$$f(x)=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{5/3}$$

$$F(x)=(x-2)^3-5x+C$$

b)

$$F(2+\sqrt{5/3})=\frac{5}{3}\sqrt{5/3}-10-5\sqrt{5/3}$$

$$F(2-\sqrt{5/3})=-\frac{5}{3}\sqrt{5/3}-10+5\sqrt{5/3}$$

$$\left|\int_{2-\sqrt{5/3}}^{2+\sqrt{5/3}}3(x-2)^2-5\,dx\right|=\left|F(2+\sqrt{5/3})-F(2-\sqrt{5/3})\right|=\frac{2}{3}10\sqrt{5/3}\approx 8.607$$

c)

$$f(x)=\sqrt{6-2x}$$

$$F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{6-2x}^3\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^3\sqrt{6-2x}=F(3)-F(0)=0+\frac{\sqrt{6}^3}{3}=2\sqrt{6}$$

(Die zweite Begrenzung ist die y-Achse.)

d) $$f(x)=\frac{x^2-4}{x-5}$$

(Hinweis: Polynomdivision mit Rest, gibt drei Terme, die sich leicht integrieren lassen.)

$$(x^2-4):(x-5)=x+5+\text{Rest}\Rightarrow f(x)=\frac{x^2-4}{x-5}=x+5+\frac{21}{x-5}$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+5x+21\ln|x-5|+C$$

$$f(x)=0\Rightarrow x=\pm 2$$

$$\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=F(2)-F(-2)=\ldots=20+21(\ln 3-\ln 7)\approx 2.2067$$