

# Mathematik 2

Kapitel 5

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

---

Ulrich H. Becker

Frankfurt University of Applied Sciences

SS 2023

# Motivation: Warum Differentialgleichungen?

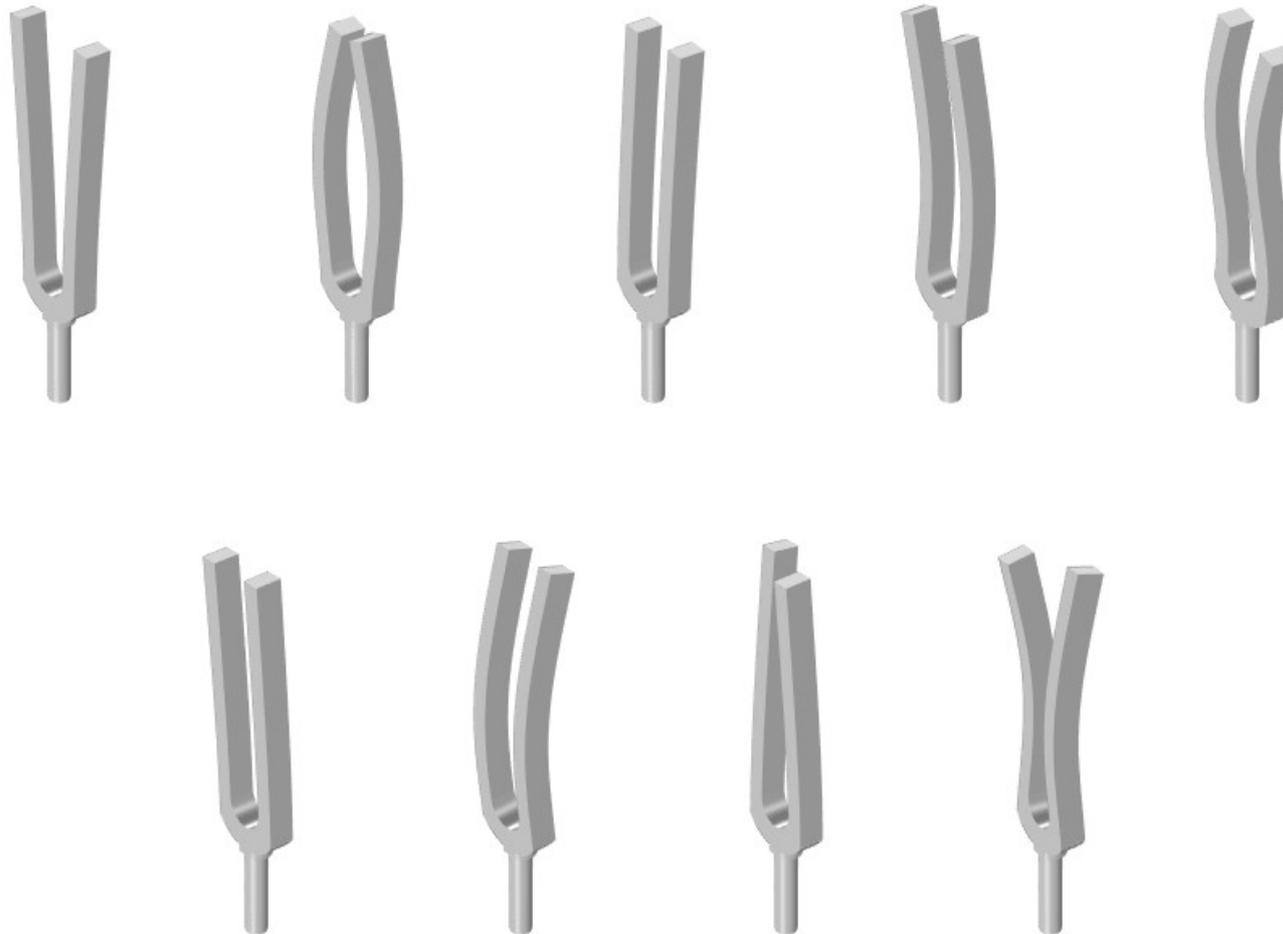
---

- ▶ Differentialgleichung            DGL  
Differentialgleichungen        DGLn
- ▶ Die Beschreibungen von physikalischen und technischen Vorgängen führt auf DGLn.
- ▶ Die Lösungen von DGLn kann man berechnen.
- ▶ Damit hat man die Möglichkeit, das Verhalten eines technischen Gegenstandes zu bestimmen bzw. kennen zu lernen, bevor man ihn baut.
  - ▷ Maschinen, Bauwerke

# Beispiel: Schwingungen einer Stimmgabel

---

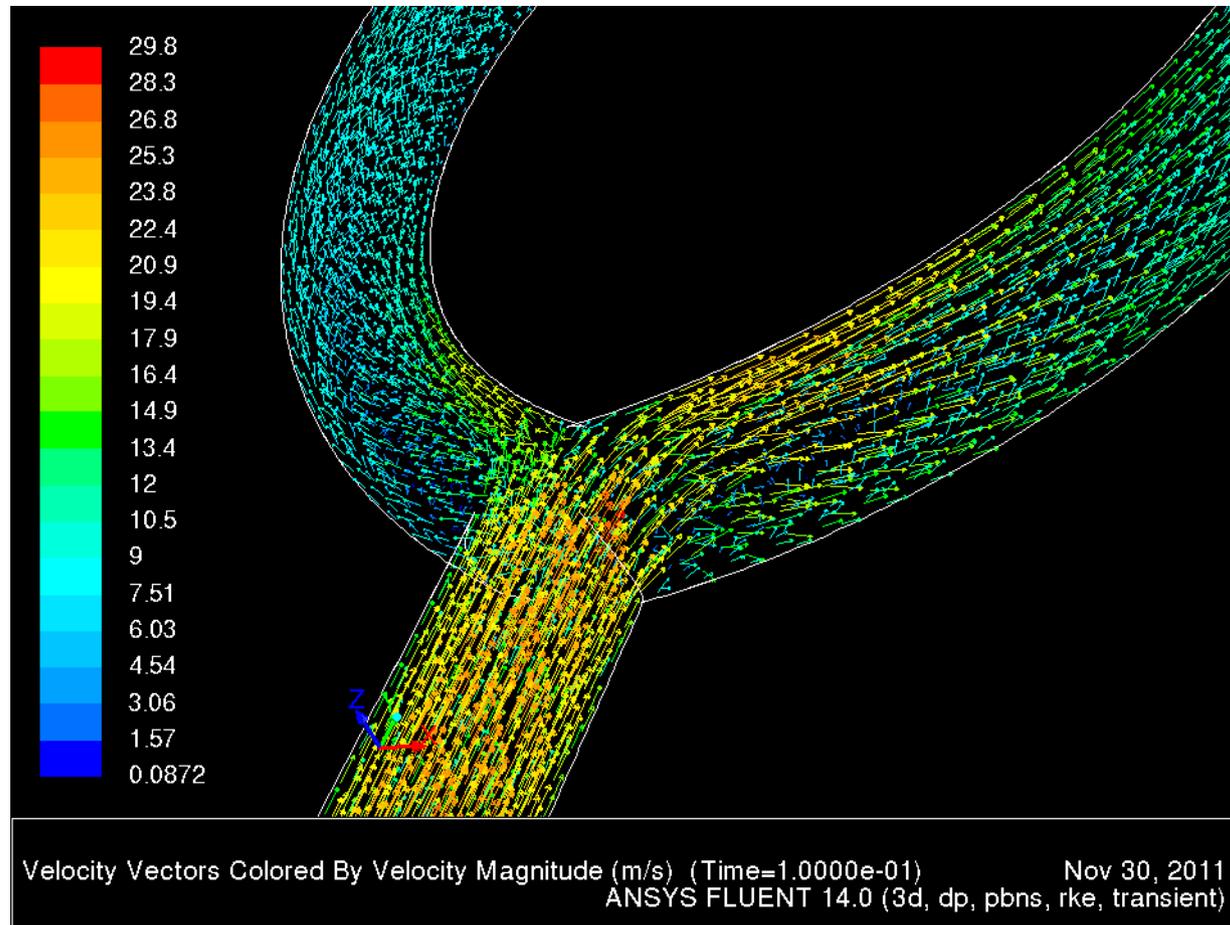
Dr. Daniel A. Russell, Pennsylvania State University



<http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/TuningFork/fork-modes.html>

# Beispiel: Computational Fluid Dynamics

---



# Beispiele Fazit

---

- ▶ Das sind schon fortgeschrittene Anwendungen, die erhebliche Vorbereitungen brauchen.
- ▶ Wir werden in dieser Vorlesung einfachere Aufgaben behandeln.
- ▶ Es wird in erster Linie um gewöhnliche Differentialgleichungen gehen.
  - ▷ ... gleich mehr dazu.
- ▶ Die Anwendungen in Simulationsprogrammen wie in den gerade gezeigten Beispielen bauen darauf auf!

# Bezeichnungen

---

- ▶ Ableitungen nach der Zeit

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}$$

- ▶ Ableitung nach einer als bekannt vorausgesetzten Variable, z.B.  $x$

$$\frac{df}{dx} = f'$$

- ▶ partielle Ableitung nach einer Variable  $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f$$

# Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung

---

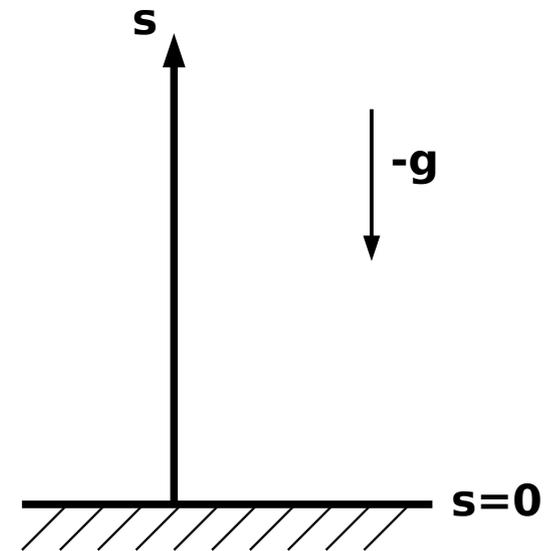
## ► Newton:

- ▷ Kraft = Masse  $m$  mal Beschleunigung  $a$ .
- ▷ Beschleunigung ist die zweite Ableitung der Ortskoordinate  $s$  eines Massenpunktes nach der Zeit  $t$ .

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{s} \quad s = s(t)$$

- ## ► Freier Fall im luftleeren Raum mit Fallbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$$F = -m \cdot g$$



# Prinzipielle Überlegungen

---

- ▶ In allen diesen Fällen geht es um Bewegungen.
- ▶ M.a.W., die Positionen, Geschwindigkeiten, usw. sind Funktionen der Zeit.
- ▶ M.a.W., die Lösung des Problems besteht darin, eine oder mehrere Funktionen zu finden.
- ▶ Beachte Satz aus der Analysis:  
Wenn zwei Funktionen dieselbe Ableitung haben, dann unterscheiden sie sich höchstens um eine Konstante.
- ▶ M.a.W., die Ableitungen einer Funktion sagen sehr viel über die Funktion selber aus.

# Prinzipielle Überlegungen

---

- ▶ Vergleiche dazu „normale Gleichungen“

$$\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

- ▶ Sie stellen Bedingungen an die Werte der Variablen. Indem man die Gleichungen löst, erhält man die Werte.
- ▶ In analoger Weise stellen DGLn Bedingungen an die Funktion und ihre Ableitungen. Indem man nun die DGLn löst, erhält man die gesuchte Funktion.

# Grundbegriffe, Klassifikation

---

## ▶ Abhängige und unabhängige Variablen

▷ Gesucht  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  mit  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ .

▷ M.a.W.: Gesucht ist

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}$$

▷ Es sind  $f_1, f_2, \dots, f_n$  die *abhängigen Variablen*.

▷ Es sind  $x_1, x_2, \dots, x_m$  die *unabhängigen Variablen*.

# Grundbegriffe, Klassifikation

---

- ▶ Beispiel Stimmgabel.
- ▶ Gesucht ist die Auslenkung aus der Ruhelage.
- ▶ Die Auslenkung kann in drei Raumrichtungen erfolgen:
  - ▷ a: Auslenkung in x-Richtung
  - ▷ b: Auslenkung in y-Richtung
  - ▷ c: Auslenkung in z-Richtung
- ▶ Diese Auslenkungen hängen ab von der Position auf der Stimmgabel mit den Koordinaten  $(x,y,z)$  und der Zeit  $t$ .

# Grundbegriffe, Klassifikation

---

- ▶ Beispiel Stimmgabel (Fortsetzung)
- ▶ Gesucht ist also

$$\begin{pmatrix} a(x, y, z, t) \\ b(x, y, z, t) \\ c(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

- ▶ Abhängige Variablen sind  $a, b, c$
- ▶ Unabhängige Variablen sind  $x, y, z, t$
- ▶ Beachte:  
Die Anzahl der abhängigen und unabhängigen Variablen muss *nicht* gleich sein!

# Grundbegriffe, Klassifikation

---

- ▶ **Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen**
  - ▷ *Gewöhnliche DGLn* haben eine unabhängige Variable.
  - ▷ *Partielle DGLn* haben mehr als eine unabhängige Variable.
- ▶ **Beispiele:**
  - ▷  $\ddot{s} = -g$  hat eine unabhängige Variable: die Zeit  $t$  und eine abhängige Variable  $s(t)$ : gewönl. DGL
  - ▷  $\partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0$  hat zwei unabhängige Variablen: die Zeit  $t$  und den Ort  $x$ ; und eine abhängige Variable  $u(x, t)$ : partielle DGL

# Grundbegriffe, Klassifikation

---

## ► Beispiele (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}\triangleright \quad \dot{x} &= x - y + t \\ \dot{y} &= 2x + y - t\end{aligned}$$

hat eine unabhängige Variable: die Zeit  $t$ ; und zwei abhängige Variablen, die Koordinaten  $x(t)$  und  $y(t)$ : gewönl. DGL

◆ Hier: System von gewönl. DGLn .

# Grundbegriffe, Klassifikation

---

- ▶ Die *Ordnung einer Differentialgleichung* ist der Grad der höchsten Ableitung in der DGL.
- ▶ Beispiele:
  - ▷  $\ddot{s} = -g$  ist DGL 2. Ordnung
  - ▷  $(\dot{x})^2 + x = 0$  ist DGL 1. Ordnung

# Grundbegriffe, Klassifikation

---

## ▶ Lineare und nicht-lineare Differentialgleichungen

- ▷ In einer *linearen DGL* treten die abhängigen Variablen nur linear auf.
- ▷ In einer *nicht-linearen DGL* eben nicht.

## ▶ Beispiele

- ▷  $\ddot{s} = -g$  lineare DGL
- ▷  $(\dot{x})^2 + x = 0$  nicht-lineare DGL
- ▷  $f'' - 4x f' = \cos 2x$  lineare DGL

# Grundbegriffe, Klassifikation

---

## ► Beispiele (Fortsetzung)

$$\triangleright 4 \dot{x} + 3 \dot{y} - x + 2 y = \cos t$$

$$6 \dot{x} - 2 \dot{y} - 2 x + y = 2 \sin t$$

ist in System linearer, gewöhnl. DGL

$$\triangleright \ddot{x} + x \dot{x} = 4 \sin t$$

$$4 \dot{x} + \sin x = 0$$

sind zwei nicht-lineare, gewöhnl. DGL

# Grundbegriffe, Klassifikation

---

## ▶ Homogene und inhomogene DGLn

- ▷ Eine lineare DGL heißt *homogen*, wenn in jedem Term eine abhängige Variable auftritt.
  - ◆ ... und sie tritt dort n.V. linear auf.
- ▷ Eine lineare DGL heißt *inhomogen*, wenn es mind. einen Term gibt, in dem keine abhängige Variable auftritt.

## ▶ Beispiele

▷  $\ddot{s} = -g$                       inhomogene, lineare DGL

▷  $\dot{x} + 4x = 0$                       homogene, lineare DGL

# Lösen von DGL

---

▶ per Computer:

- ▷ WolframAlpha
- ▷ MATLAB
- ▷ MATHEMATICA
- ▷ MAPLE
- ▷ MuPAD
- ▷ usw.

▶ Beispiele WolframAlpha:

$$\dot{x} + 2x = 0$$

$$\dot{x} + 2x = t^2$$

$$\ddot{x} + \dot{x} - 4 * x = \cos t + e^t$$

# Lösen von DGL

---

- ▶ Diese Programme, so wie sie hier vorgestellt wurden, berechnen eine analytische Lösung.
- ▶ Die kann man nicht immer angeben!  
Diese Programme zeigen dies an.  
Dann muss man sich zu helfen wissen.
- ▶ Numerische Lösung von DGLn ist nicht mehr so einfach. Man muss die passenden Algorithmen für die gegebene DGL verwenden.
- ▶ Man muss einiges über DGLn gelernt haben, um das richtig zu machen.

# Einfache DGL: Lösen durch „Draufschauchen“

---

- ▶ Wie gesehen: Die Lösung einer DGL ist eine Funktion.
- ▶ In einfachen Fällen, kann man eine solche Funktion schnell angeben.

## ▶ Beispiele

- ▷  $\dot{f} = -4f$

- ▷  $\ddot{f} + \lambda^2 f = 0$

- ▶ Idee: DGL sprechen.
  - ▷ Welche Funktion ist bis auf einen Faktor ihre eigene Ableitung?
  - ▷ Bei welcher Funktion ist die zweite Ableitung bis auf einen Faktor das negative der Funktion?

$$\begin{array}{l} 1: f(t) = e^{-4t} \\ 2: f(t) = \sin(\lambda t) \end{array}$$

# Allgemeine und spezielle Lösung einer DGL

---

- ▶ Selbst wenn man eine Lösung ggf. schnell angeben kann, bedeutet es nicht, dass das Problem generell gelöst ist.

- ▶ Beispiele

- ▷  $\dot{f} = -4f$

- ▷  $\ddot{f} + \lambda^2 f = 0$

1:  $f(t) = Ae^{-4t}$   
2:  $f(t) = A\sin(\lambda t) + B\cos(\lambda t)$

- ▶ I.d.R. gibt es eine *allgemeine Lösung*, die unbekannte Konstanten enthält.
- ▶ Deren Anzahl ist gleich der Ordnung der DGL.
- ▶ Für feste Werte dieser Konstanten erhält man eine *spezielle Lösung* der DGL.

# Aufgaben

---

- Wie viele freie Konstanten erwarten Sie für die allg. Lösungen folgender DGLn? Bestimmen Sie dann die allg. Lösung.

1)  $\dot{x} = 4t^2$

3)  $\dot{x} = -6x$

2)  $\ddot{x} = t^3 - 2t$

4)  $\ddot{x} = -6x$

1.  $x(t) = \frac{3}{4}t^3 + C$  2.  $x(t) = C_0 + C_1t + \frac{20}{t^5} - \frac{3}{t^3} e^{-6t}$  3.  $x(t) = C e^{-6t}$  4.  $x(t) = C_0 \sin(\sqrt{6}t) + C_1 \cos(\sqrt{6}t)$

# Randbedingungen, Anfangswerte

---

- ▶ Werte für die freien Konstanten der allg. Lösung lassen sich nur durch weitere Bedingungen bestimmen.
- ▶ Dies sind i.d.R. *Randbedingungen*, also Bedingungen an die Lösung an den Grenzen des Intervalls, auf dem die Lösung gesucht wird.
- ▶ Bei zeitabhängigen Problemen kann man diese Bedingung i.d.R. nur am Anfang stellen. Dann heißen die Randbedingungen *Anfangswerte*.
  - ▷ Bemerkung: Genau genommen ist das eine Eigenschaft der DGL, ob nur an einem oder an mehreren Rändern des Lösungsintervalls Werte vorgegeben werden können.

# Randbedingungen, Anfangswerte

## ► Beispiele

$$\triangleright \dot{f} = -4f \quad f(0) = 2$$

$$\triangleright \ddot{f} + \lambda^2 f = 0 \quad f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = 1$$

$$\triangleright \ddot{f} + \lambda^2 f = 0 \quad f(0) = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} 3: f(t) &= 1 + 2 \cos(\lambda t) \\ 2: f(t) &= \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) \\ 1: f(t) &= 2e^{-4t} \end{aligned}$$

► Kann/muss man Randbedingungen an mehr als einem Rand stellen, spricht man von einem Randwertproblem.

► Bei Bedingungen an nur einem Rand spricht man von einem Anfangswertproblem.

► Oft sind Anfangswertprobleme einfacher zu lösen.

# Aufgaben

---

- DGLn wie zuvor. Bestimmen Sie nun die spezielle Lösung zu den gegebenen Randbedingungen

$$1) \quad \dot{x} = 4t^2 \\ x(0) = 1$$

$$3) \quad \dot{x} = -6x \\ x(0) = 3$$

$$2) \quad \ddot{x} = t^3 - 2t \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$$

$$4) \quad \ddot{x} = -6x \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2$$

$$1. \quad x(t) = \frac{4}{3}t^3 + 1 \quad 2. \quad x(t) = 0 + t + \frac{20}{t^5} - \frac{3}{t^3} \quad 3. \quad x(t) = 3e^{-6t} \\ 4. \quad x(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin(\sqrt{6}t) + \cos(\sqrt{6}t)$$

# Separable DGLn 1.Ordnung

---

- ▶ Sei eine DGL von der Form

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

- ▶ Sie heißt separabel, wenn man sie durch Umstellen in folgende Form bringen kann:

$$g(x) \frac{dx}{dt} = h(t)$$

- ▶ Man nennt das „Trennung der Variablen“.
- ▶ Dann kann man eine Lösung berechnen aus

$$\int g(x) dx = \int h(t) dt$$

... wenn man das Ergebnis nach x auflösen kann.

# Separable DGLn 1.Ordnung

---

## ► Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = 4 x t \quad x > 0$$

## ► Aufgaben:

$$\frac{dx}{dt} = k x \quad x > 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b x}{t} \quad x > 0$$

$$t^2 \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x} \quad x > 0, \quad x(4) = 9$$

# Separable DGLn 1.Ordnung: Lösungen

---

## ► Beispiel

$$x(t) = C e^{2t^2}$$

## ► Aufgaben:

$$x(t) = C e^{kt}$$

$$x(t) = C t^b$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{163}{2} - \frac{2}{t}}$$

# Exakte DGLn 1. Ordnung

---

- ▶ Betrachte folgende Anwendung der Kettenregel für Ableitungen:

$$\frac{d}{dt} h(t, x(t)) = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

- ▶ Sei eine DGL von der Form

$$p(t, x) \frac{dx}{dt} + q(t, x) = 0$$

- ▶ Kann man eine Funktion  $h(t, x)$  finden mit

$$\frac{\partial h}{\partial x} = p(t, x) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = q(t, x)$$

dann heißt die DGL *exakt* und es folgt:

$$p(t, x) \frac{dx}{dt} + q(t, x) = \frac{dh}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad h(t, x) = C$$

**Nach x  
auflösen!**

# Exakte DGLn 1. Ordnung

---

## ▶ Beispiel

$$2xt \frac{dx}{dt} + x^2 - 2t = 0$$

## ▶ Frage:

- ▷ Woher weiß man, dass es so eine Funktion h gibt?
- ▷ Und wie findet man sie, wenn man sie nicht erraten kann?

$$\frac{1}{2} + 1 \int \frac{1}{x} dx$$

# Exakte DGLn 1. Ordnung

---

- ▶ Woher weiß man, dass es so eine Funktion  $h$  gibt?
- ▶ Falls es  $h$  gibt mit

$$p(t, x) = \frac{\partial h}{\partial x} \quad q(t, x) = \frac{\partial h}{\partial t}$$

dann gilt auch

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

- ▶ Für unsere Praxis gilt das auch umgekehrt: Aus

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

folgt dann, dass es auch die Funktion  $h$  gibt.

# Exakte DGLn 1. Ordnung

---

- ▶ Und wie findet man die Funktion  $h$ , wenn man sie nicht erraten kann?
- ▶ Ein allgemeines Rezept ist aufwendig. Aber folgendes ist i.d.R. ausreichend:

- ▷ Man berechnet  $h_1$  und  $h_2$  aus folgenden Bedingungen

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = p(t, x) \qquad \frac{\partial h_2}{\partial t} = q(t, x)$$

- ▷ ... und versucht dann, durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten  $h_1 = h_2 = h$  zu erhalten.

# Exakte DGLn 1. Ordnung

---

## ► Beispiel

$$\frac{t}{x+t} \frac{dx}{dt} + \frac{t}{x+t} + \ln(x+t) = 0$$

- Aufgaben: Sind diese DGLn exakt?  
Wenn ja, bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

$$x \frac{dx}{dt} + t = 0$$

$$x \frac{dx}{dt} - t = 0$$

$$(x - t^2) \frac{dx}{dt} - 2xt = 0$$

# Exakte DGLn 1. Ordnung: Lösungen

---

## ► Beispiel

$$t \ln(x+t) = C \Rightarrow x(t) = e^{C/t} - t$$

- Aufgaben: Sind diese DGLn exakt?  
Wenn ja, bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

$$x(t) = \pm \sqrt{C - t^2} \quad x(t) = \pm \sqrt{C + t^2} \quad x(t) = t^2 \pm \sqrt{C + t^4}$$

# Lineare DGLn 1. Ordnung

---

- ▶ Spezialfall: homogene, lineare DGL 1.Ordnung

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0$$

- ▶ Trick: Mit  $g(t)$  multiplizieren.

$$g(t) \frac{dx}{dt} + g(t)p(t)x = 0$$

- ▶ Diese DGL ist exakt, wenn gilt

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial (gp x)}{\partial x} = gp$$

- ▶ M.a.W., Wenn wir ein  $g(t)$  finden, dass diese Bedingung erfüllt, dann können wir damit ein  $x(t)$  finden, das die urspr. DGL erfüllt.

# Lineare DGLn 1. Ordnung

---

- ▶ Also erst einmal  $g(t)$  finden.  
Trennung der Variablen:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = gp \Rightarrow \frac{dg}{g} = p dt \Rightarrow \int \frac{dg}{g} = \int p dt = P(t)$$

$$\Rightarrow \ln g = P(t) \Rightarrow g(t) = e^{P(t)} \quad \text{mit } P(t) = \int p dt$$

„Groß-P ist Stammfunktion zu Klein-p.“

- ▶ Damit folgt

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 \Rightarrow e^{P(t)} \frac{dx}{dt} + e^{P(t)} p(t)x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{P(t)} x) = 0$$

und es ist deshalb  $h(x, t) = e^{P(t)} x$

# Lineare DGLn 1. Ordnung

---

- ▶ Damit können wir eine allgemeine Lösung für eine homogene, lineare DGL 1.Ordnung angeben:

$$h(x, t) = e^{P(t)} x = C \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = C e^{-P(t)}} \quad P(t) = \int p dt$$

- ▶ Bemerkung:  $g = e^{P(t)}$  bezeichnet man auch als *integrierenden Faktor*, weil es die DGL zu einer exakten DGL macht.

# Lineare DGLn 1. Ordnung: Allg. Lösung

---

- ▶ Nun der allgemeinere Fall, die *inhomogene*, lineare DGL 1. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = r(t)$$

- ▶ Wir gehen erst einmal genauso vor:

$$e^{P(t)} \frac{dx}{dt} + e^{P(t)} p(t)x = e^{P(t)} r(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{P(t)} x) = e^{P(t)} r(t)$$

- ▶ Integration nach t liefert dann:

$$e^{P(t)} x = \int e^{P(t)} r(t) dt + C \Rightarrow x(t) = e^{-P(t)} \left[ \int e^{P(t)} r(t) dt + C \right]$$

$$P(t) = \int p dt$$

# Lineare DGLn 1.Ordnung

---

## ► Beispiele

$$\frac{dx}{dt} + tx = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = t \quad x(2) = \frac{1}{3}$$

## ► Aufgaben:

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} - 4x = t$$

$$\frac{dx}{dt} + tx = -2t$$
$$x(0) = 2$$

# Lineare DGLn 1.Ordnung: Lösungen

---

## ► Beispiele

$$x(t) = C e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$x(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{t}$$

## ► Aufgaben:

$$x(t) = C e^{-3t}$$

$$x(t) = -\frac{1}{16} - \frac{t}{4} + C e^{4t}$$

$$x(t) = 4 e^{-t^2/2} - 2$$

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

- ▶ Gesucht  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  z.B. aus Reaktionen von zwei Substanzen mit Konzentrationen  $x(t)$  und  $y(t)$ .

- ▶ Beispiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 12y \\ \dot{y} &= 3x + y \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Bei einer DGL:  $\dot{x} = \lambda x$

folgt die Lösung aus  $x(t) = C e^{\lambda t}$

- ▶ Idee: Ähnlicher Ansatz  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c} e^{\lambda t}$

- ▷ Was ist  $\lambda$ ?

- ▷ Was ist der konstante Vektor  $\mathbf{c}$ ?

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

- ▶ Ansatz  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c} e^{\lambda t}$  einsetzen in  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  ergibt

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{c} e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{c}$$

- ▶ D.h.,  $\lambda$  ist Eigenwert von  $\mathbf{A}$  und der Vektor  $\mathbf{c}$  ist der zugehörige Eigenvektor.
- ▶ Das Lösen von Systemen von DGLn führt auf die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren!
- ▶ Eigenwerte aus  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$
- ▶ Damit Eigenvektoren aus  $\mathbf{A} \mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}$
- ▶ Aber es stellen sich Fragen ...

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

## ► Fragen:

- ▷ Was ist bei mehreren Eigenwerten/Eigenvektoren?
- ▷ Wir benötigen freie Parameter (Konstanten), um Randbedingungen zu berücksichtigen. Die Vektoren  $\mathbf{c}$  sind aber fest, da sie Eigenvektoren sind.

## ► Betrachte zwei Lösungen zu zwei unterschiedlichen Eigenwerten.

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{c}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{c}_2 e^{\lambda_2 t}$$

## ► Also gilt $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ sowohl für $\mathbf{x}_1$ als auch $\mathbf{x}_2$

## ► Nun sieht man durch Einsetzen:

$D_1 \mathbf{x}_1 + D_2 \mathbf{x}_2$  ist eine Lösung!

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

- ▶ *Superpositionsprinzip* für lineare homogene DGLn:  
Sind  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  Lösungen einer homogenen, linearen DGL, so ist auch deren Linearkombination eine Lösung.
- ▶ Daraus ergibt sich das (vorläufige!) Programm:
  - ▷ Man berechnet alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $\mathbf{A}$ .
  - ▷ Man berechnet die zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{c}$ .  
(Genaueres dazu später...).
  - ▷ Die allgemeine Lösung ergibt sich dann aus der Linearkombination der einzelnen Lösungen.

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

► Beispiel von oben:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 12y \\ \dot{y} &= 3x + y \end{aligned} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

▷ Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = (1 - \lambda)^2 - 36 = (\lambda - 7)(\lambda + 5) \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 7 \quad \vee \quad \lambda_2 = -5 \end{aligned}$$

▷ Eigenvektoren

$$\mathbf{A} \mathbf{c}_1 = \lambda_1 \mathbf{c}_1 \Rightarrow \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \mathbf{c}_2 = \lambda_2 \mathbf{c}_2 \Rightarrow \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

▷ Allg. Lösung:

$$\mathbf{x}(t) = D_1 \mathbf{c}_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 \mathbf{c}_2 e^{\lambda_2 t} = D_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + D_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

- ▶ Und jetzt zum Kleingedruckten ...
- ▶ Das Beispiel bestand aus zwei Gleichungen für zwei gesuchte Lösungsfunktionen (abhängige Variablen), also einem 2x2-System.
- ▶ Aber die Vektor/Matrix-Notation gilt für beliebige NxN-Systeme.
- ▶ Die Eigenwerte berechnen sich dann aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$ .
- ▶ Dies ist ein Polynom vom Grad N und hat deshalb N Nullstellen, die ggf. komplex sind. Manche Nullstellen kommen ggf. auch mehrfach vor (z.B. doppelte Nullstellen). In diesen Fällen wird es mühsam.

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

- ▶ Der Ansatz  $x(t) = c e^{\lambda t}$  funktioniert nur für einfache, reelle Eigenwerte. In diesem Fall ist  $c$  ein Eigenvektor, den man vorab berechnen kann.
- ▶ Für einen doppelten Eigenwert (also doppelte Nullstelle des charakt. Polynoms) wählt man als Ansatz

$$x(t) = (c_0 + c_1 t) e^{\lambda t}$$

- ▶ Die Vektoren  $c_0$  und  $c_1$  sind keine Eigenvektoren mehr! Man muss dann etwas anders vorgehen.
- ▶ Die Komponenten der einzelnen Vektoren bestimmt man aus Gleichungen eines Koeffizientenvergleichs.

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

- ▶ Komplexe Eigenwerte kommen nur als Paare von komplex konjugierten Eigenwerten vor.

Sei  $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$  so ein Eigenwertpaar, dann wählt man den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{c}_0 \cos(\mu t) + \mathbf{c}_1 \sin(\mu t)) e^{\eta t}$$

- ▶ Die Vektoren  $\mathbf{c}_0$  und  $\mathbf{c}_1$  sind keine Eigenvektoren mehr! Man muss dann etwas anders vorgehen.
- ▶ Die Komponenten der einzelnen Vektoren bestimmt man aus Gleichungen eines Koeffizientenvergleichs.

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

- Zusammenfassung 2x2-Systeme  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$   $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- ▷  $\mathbf{A}$  hat 2 reelle, verschiedene EW  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

Ansatz:

$$\mathbf{x}(t) = D_1 \mathbf{c}_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 \mathbf{c}_2 e^{\lambda_2 t}$$

- ◆ Bemerkung:  $\mathbf{c}_{1,2}$  sind Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  zu  $\lambda_{1,2}$

- ▷  $\mathbf{A}$  hat einen doppelten reellen EW  $\lambda$ .

Ansatz:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t) e^{\lambda t}$$

- ▷  $\mathbf{A}$  hat 2 konjugiert komplexe EW  $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$

Ansatz:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{c}_0 \cos(\mu t) + \mathbf{c}_1 \sin(\mu t)) e^{\eta t}$$

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

## ► Zusammenfassung 2x2-Systeme (Fortsetzung)

▷ **A** hat 2 reelle, verschiedene EW  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

Vorgehen:

◆ EV  $\mathbf{c}_{1,2}$  zu den EW  $\lambda_{1,2}$  ausrechnen.

◆ Linearkombination bilden:

$$\mathbf{x}(t) = D_1 \mathbf{c}_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 \mathbf{c}_2 e^{\lambda_2 t}$$

◆  $D_1$  und  $D_2$  sind die freien Konstanten.

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

## ► Zusammenfassung 2x2-Systeme (Fortsetzung)

▷ **A** hat einen doppelten reellen EW  $\lambda$ .

Vorgehen:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t) e^{\lambda t} \quad \mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} t \right) e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= (A + Ct) e^{\lambda t} \\ y(t) &= (B + Dt) e^{\lambda t} \end{aligned}$$

... in DGL einsetzen und A,B,C,D bestimmen.  
Zwei davon sind freie Konstanten.

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

## ► Zusammenfassung 2x2-Systeme (Fortsetzung)

▷ **A** hat 2 konjugiert komplexe EW  $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$

Vorgehen:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{c}_0 \cos(\mu t) + \mathbf{c}_1 \sin(\mu t)) e^{\eta t} \quad \mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos(\mu t) + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \sin(\mu t) \right) e^{\eta t}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= (A \cos(\mu t) + C \sin(\mu t)) e^{\eta t} \\ y(t) &= (B \cos(\mu t) + D \sin(\mu t)) e^{\eta t} \end{aligned}$$

... in DGL einsetzen und A,B,C,D bestimmen.  
Zwei davon sind freie Konstanten.

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

- ▶ Beispiele aus Heuser,  
„Gewöhnliche Differentialgleichungen“,  
S. 470f

# homogene Systeme von DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

---

- ▶ Bisher Matrix **A** eine 2x2-Matrix.
- ▶ Was ist bei größeren Systemen?
  - ▷ z.B. 3 Gleichungen für 3 Funktionen?
    - ◆ Dann wäre **A** eine 3x3-Matrix.
  - ▷ Allgemein: NxN-Matrix bei N Gle
- ▶ In diesem Fall bildet man aus den Ansätzen von allen Eigenwerten eine Linearkombination. Diese bildet dann den neuen Ansatz.
  - ▷ M.a.W., man muss erst einmal alle Eigenwerte der Matrix **A** bestimmen.