Mathematik 2

Kapitel 4

Höhere Integralrechnung

Ulrich H. Becker

Frankfurt University of Applied Sciences

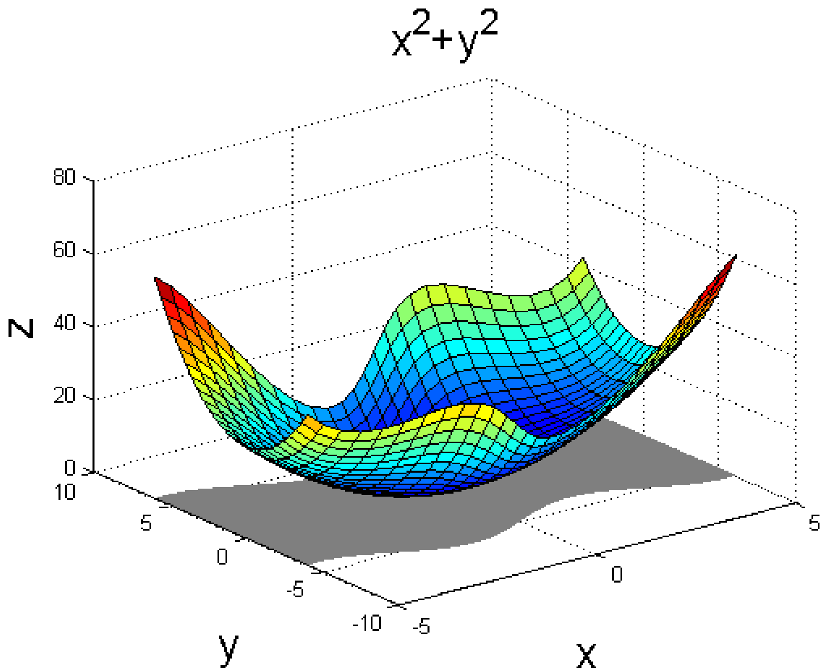
SS 2023

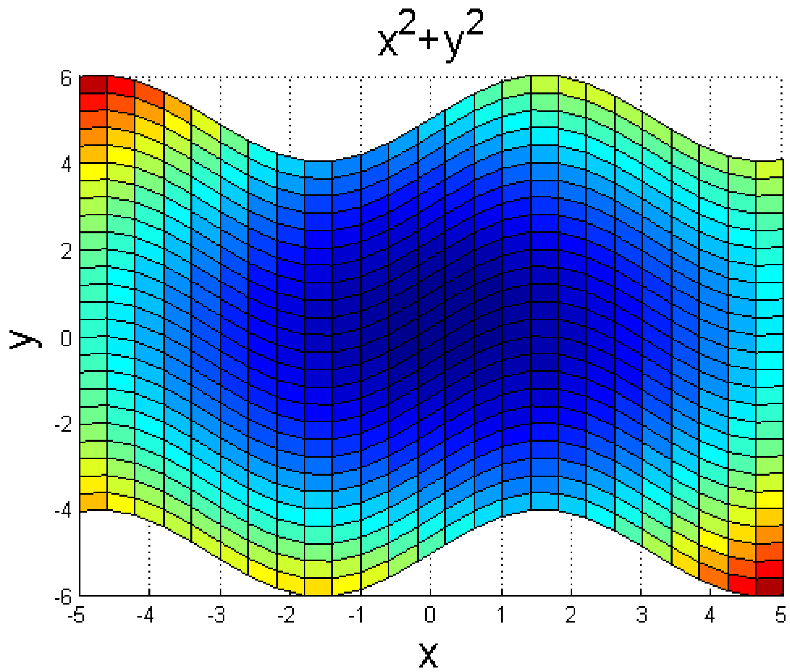
Mehrfachintegrale

- Bisher bei gewöhnlicher Integration: Intervall [a,b].
  - Automatisch entlang der Koordinatenachse.
- In höheren Dimensionen muss das Integrationsgebiet nicht mehr durch Parallelen zu den Koordinatenachsen begrenzt sein!

- Es folgen Beispiele ...

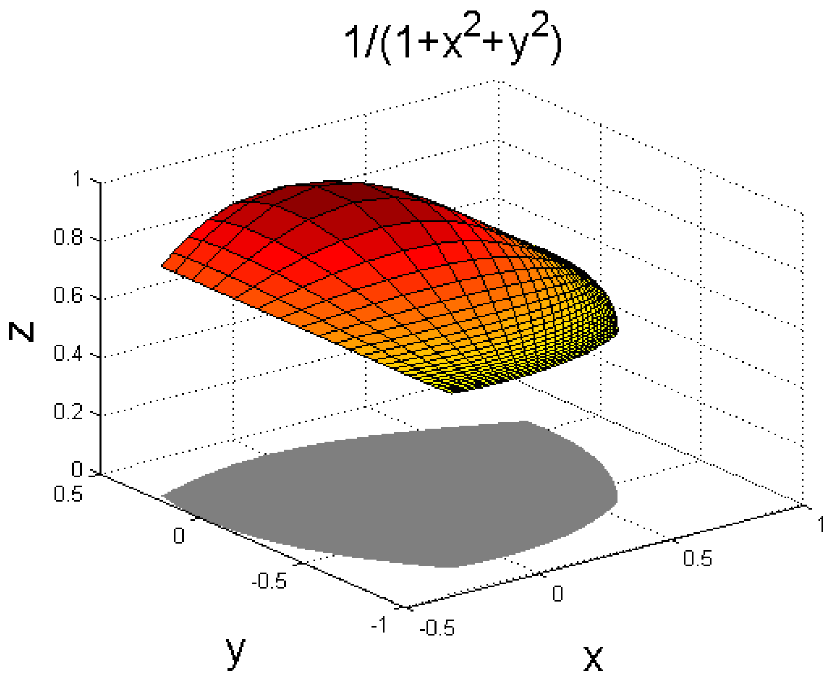
Mehrfachintegrale

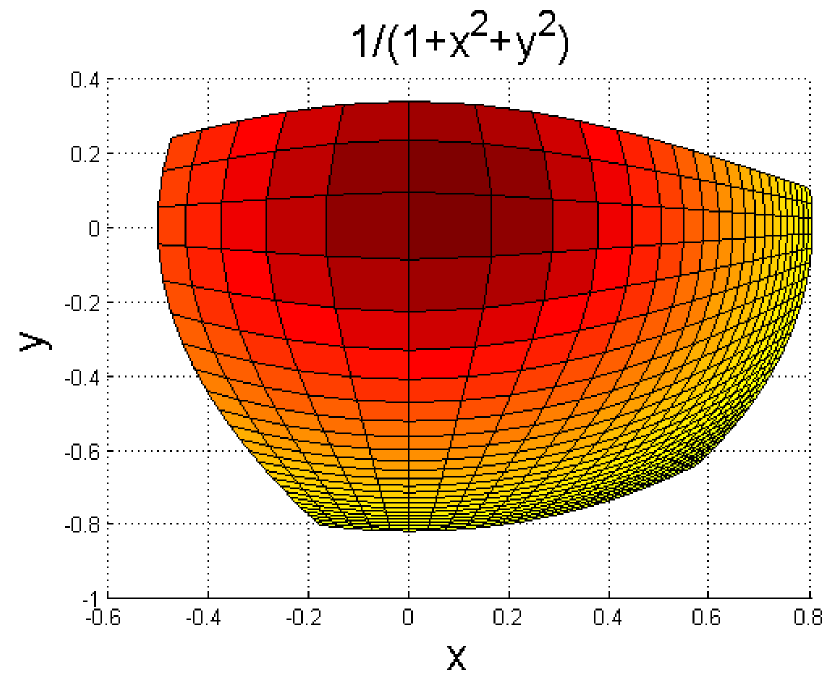




Parabolfläche wie bisher, aber auf geschwungenem Gebiet.

Mehrfachintegrale

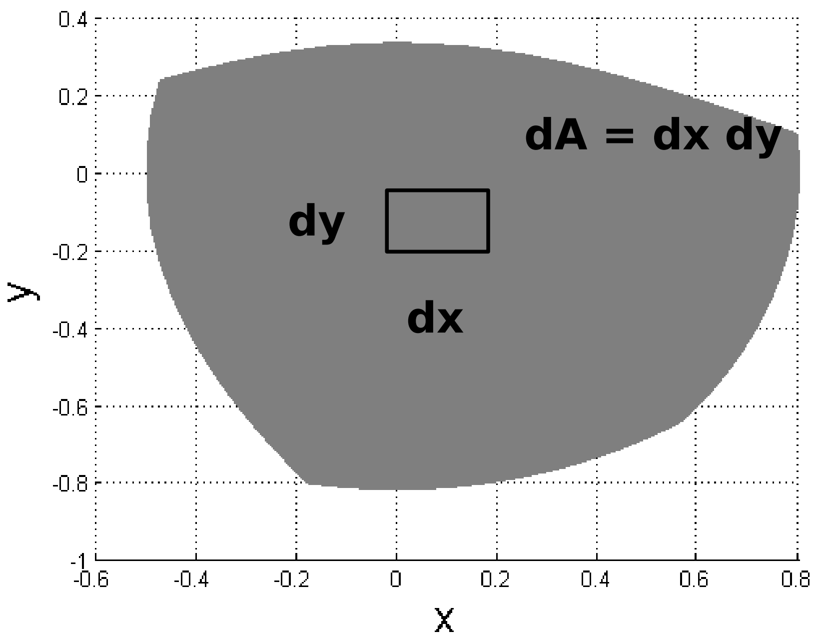


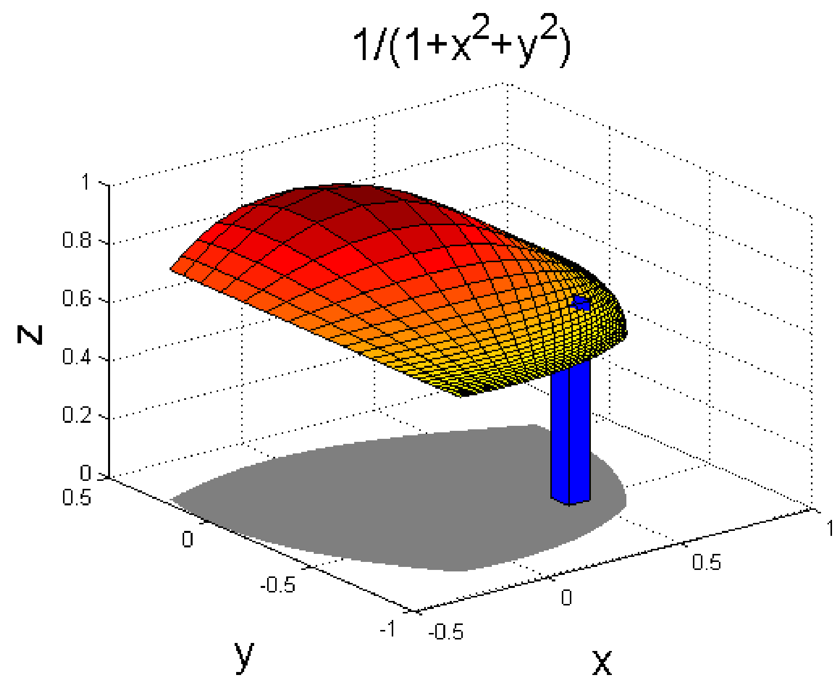


„Hut“-Fläche wie bisher, aber auf gerundetem Gebiet.

Mehrfachintegrale

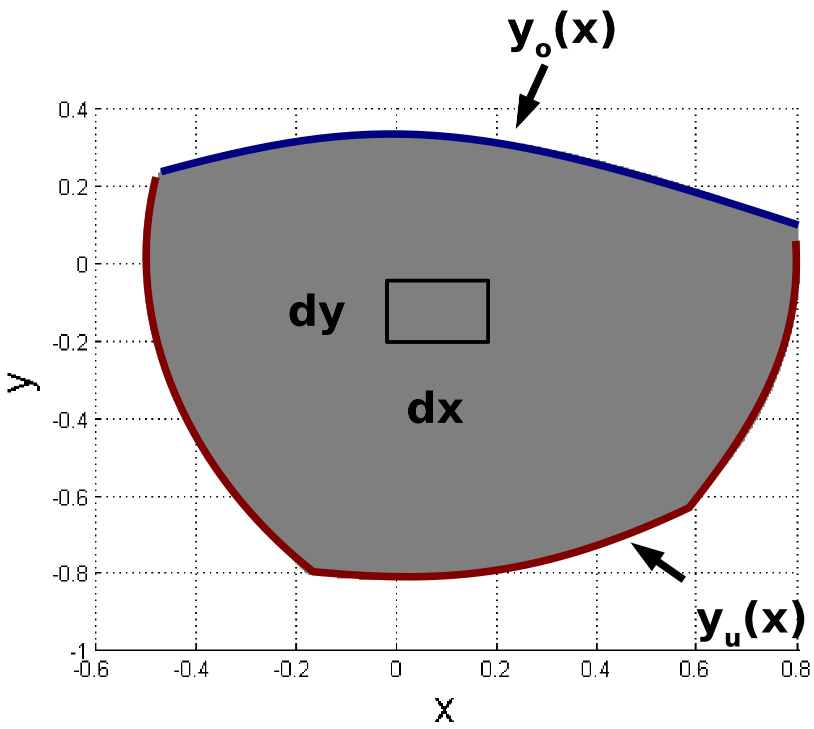
- Man kann wieder mit Ober- und Untersummen arbeiten.
- D.h. im Fall $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Säulen unter der Fläche.
- Volumen einer Säule: $dV = f(x,y)\,dA = f(x,y)\,dx\,dy$

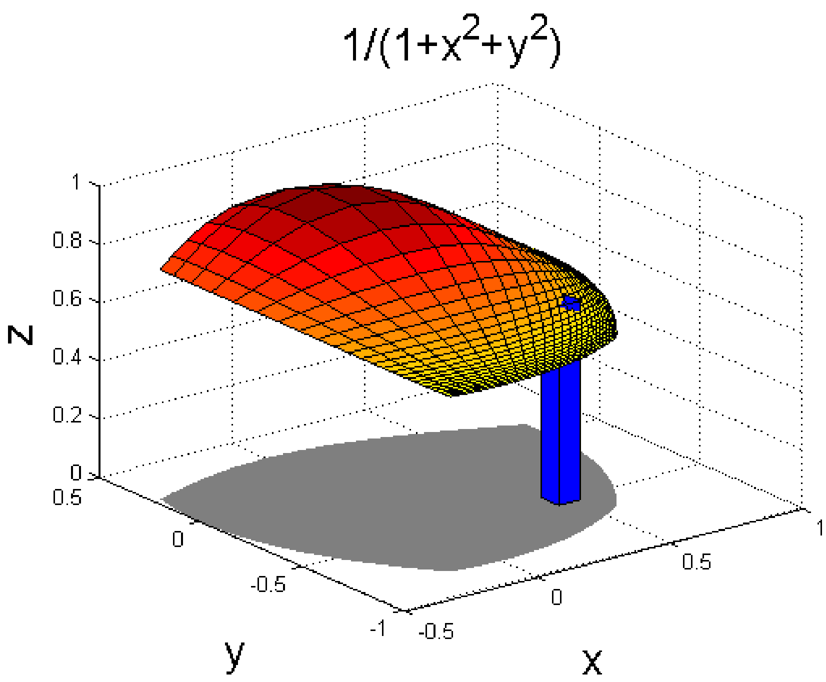




Mehrfachintegrale

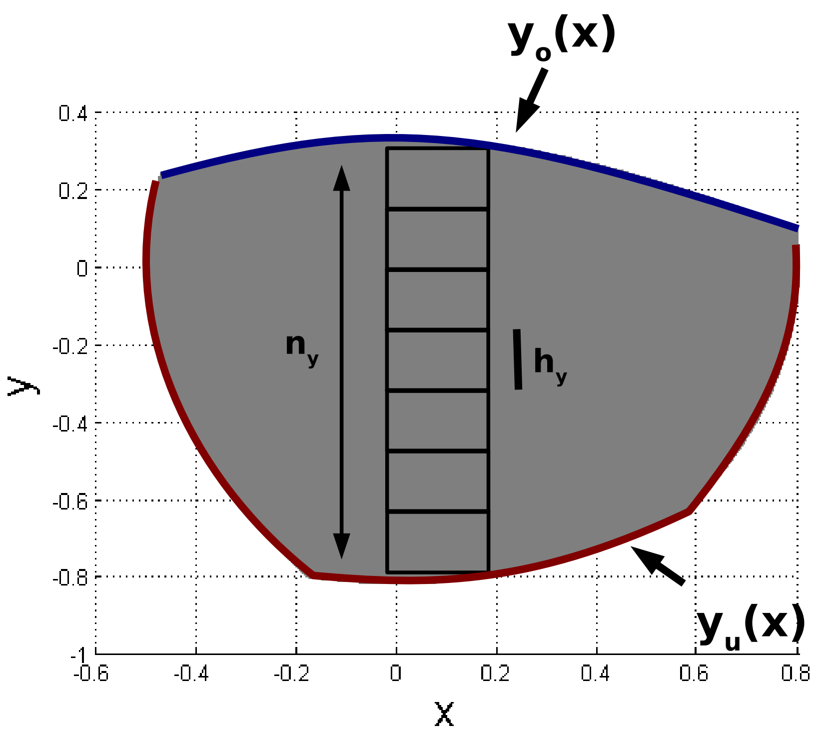
- Berandung der Fläche sei gegeben durch Funktionen $y_o(x)$ und $y_u(x)$ („oben“ und „unten“).



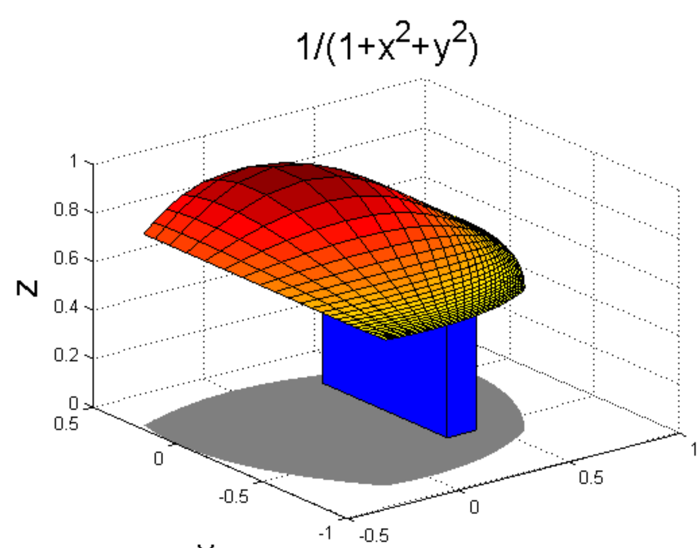


Mehrfachintegrale: 1.Integrationsschritt

- Bei einem festen x, summiere alle Säulen in y-Richtung.
- Summe geht von $y_u(x)$ bis $y_o(x)$
- Das Volumen einer (infinitesimalen) Scheibe folgt aus dem Limes $h_y \to 0$, $n_y \to \infty$ als Integral



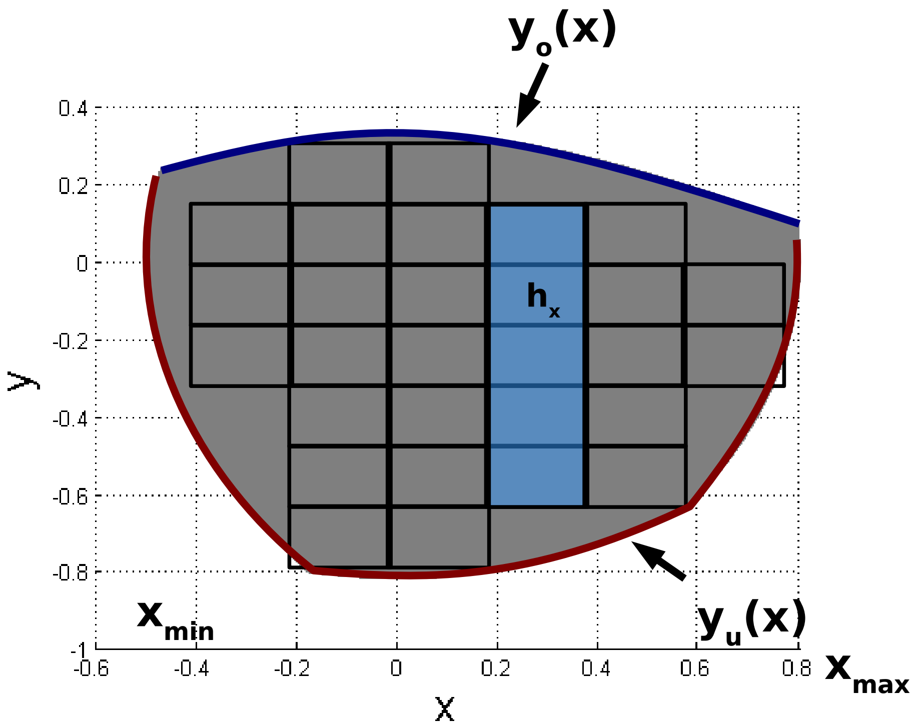
$$dV_{\text{Scheibe}} = \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$



Mehrfachintegrale: 2.Integrationsschritt

- Jetzt summiert man die Volumina der Scheiben der Breite h_x auf, von x_{min} bis x_{max}. Dann bildet den Limes $h_x \to 0$, $n_x \to \infty$ und erhält so das Integral:

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dV_{\text{Scheibe}} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$



Eine Scheibe der Breite h_x farblich hervorgehoben. Insges. gibt es n_x Scheiben, die sich aber in der Ausdehnung in y-Richtung unterscheiden können.

Mehrfachintegrale

- Zusammen:

$$V = \underbrace{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \underbrace{\left(\int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y)\, dy \right)}_{\textbf{inneres Integral}} dx}_{\textbf{äußeres Integral}}$$

- Integrieren „von innen nach außen".

$$V = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

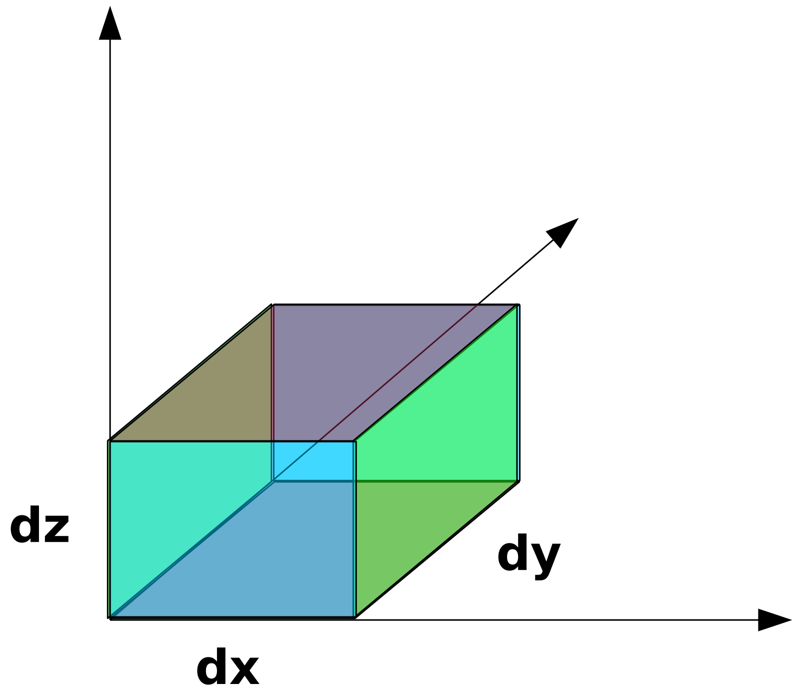
- Dementsprechend Reihenfolge von Integrationsgrenzen und Differentialen.

Mehrfachintegrale

- Die erste Schwierigkeit bei Mehrfachintegralen besteht darin, sich die Integrationsgrenzen als Funktion der anderen Variablen zu verschaffen.
- Diese müssen die gewünschte Geometrie exakt (oder eben hinreichend genau) erfassen.
  - „Funktionen basteln."
  - Und dafür gibt es keine festen Regeln ...
- Beispiele

Mehrfachintegrale 3D

- kartesische Koordinaten 3D: $dV = dx\, dy\, dz$



- Beispiele

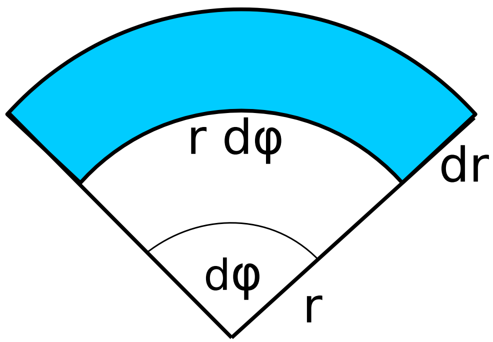
Mehrfachintegrale

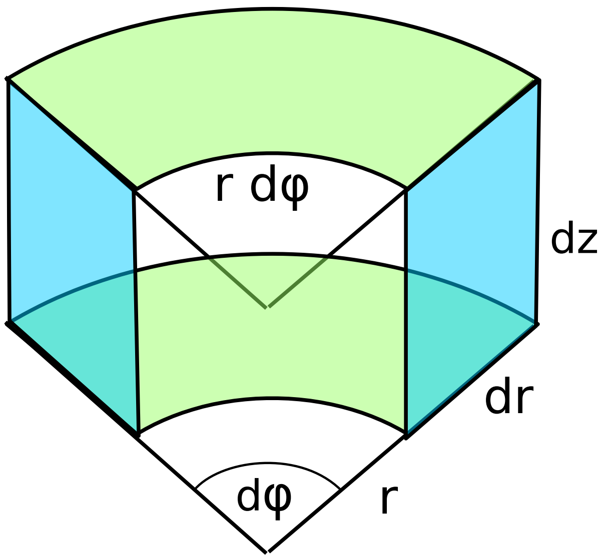
- Massenermittlung
  - Gegeben eine Dichte $\rho(x,y,z)$ oder $\rho(r,\varphi,z)$.
  - Dann ist die Masse M in einem Volumen V gegeben durch:

$$M = \int_V \rho \, dV$$

Mehrfachintegrale

- Polarkoordinaten 2D: $dA = r\, d\varphi\, dr$





- Zylinderkoordinaten 3D: $dV = r\, d\varphi\, dr\, dz$
- Beispiele