

Mathematik 2

Kapitel 2

Funktionenreihen

Ulrich H. Becker

Frankfurt University of Applied Sciences

SS 2023

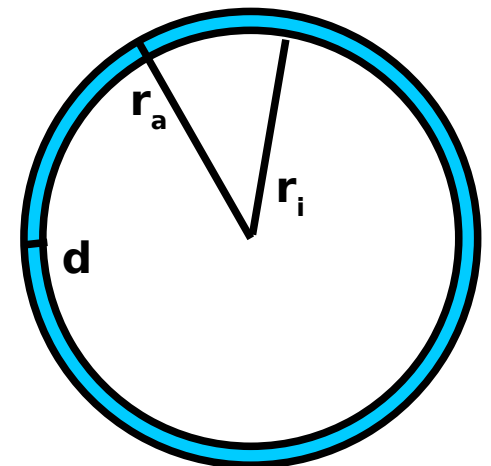
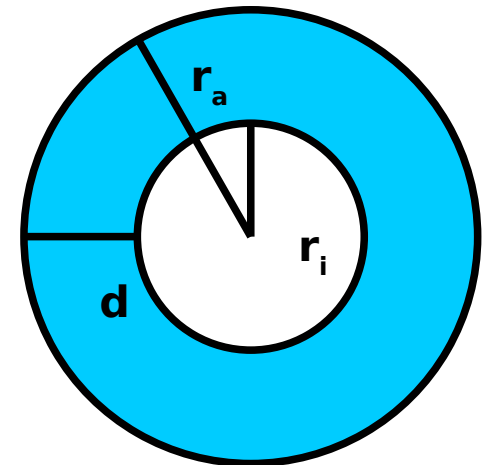
Motivation: Elektrischer Widerstand

- ▶ Elektrischer Widerstand zwischen zwei coaxialen Leitern (Hohlzylinder)

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \quad r_a > r_i$$

κ Leitfähigkeit
 l Länge des Hohlzylinders

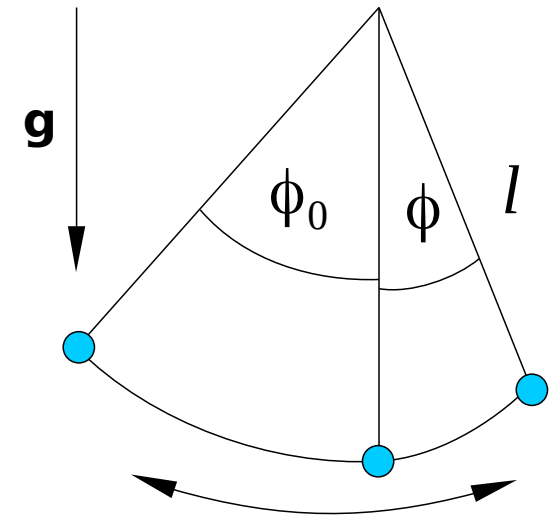
- ▶ Kann man eine Näherung angeben, so dass man für $d = r_a - r_i \ll r_i$ den Widerstand einfach abschätzen kann?



Motivation: Fadenpendel

- ▶ Schwingungsdauer bei maximalem Ausschlag ϕ_0 ist:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\phi_0/2) \sin^2 u}} du$$



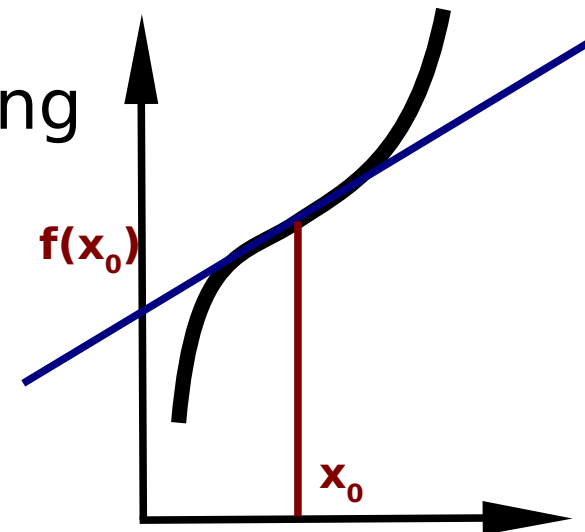
- ▶ Nicht analytisch berechenbar!
 - ▷ Keine Formel aus der Integraltafel!
 - ▷ Sog. „Elliptische Integrale“ auch nicht auf jedem Taschenrechner verfügbar!
- ▶ Wie kann man das trotzdem ausrechnen?

Approximation durch Potenzreihen

- ▶ 1. Idee: Approximation einer Funktion an einer Stelle x_0 durch ihre Tangente.

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- ▶ D.h., Funktionswert und erste Ableitung stimmen an der Stelle x_0 überein.
- ▶ Das geht auch besser!
- ▶ 2. Idee: Man fordert, dass der Funktionswert („Nullte Ableitung“) und die ersten **n** Ableitungen an der Stelle x_0 übereinstimmen.



Approximation durch Potenzreihen

- ▶ Approximation mit einer Geraden (Tangente):

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- ▶ Approximation mit einer Parabel:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

- ▶ Approximation mit einem kubischem Polynom:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

- ▶ Approximation mit Polynom n. Grades:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \end{aligned}$$

Beachte: $0! = 1$

Taylor'sche Formel

- ▶ Wie gut ist die Approximation?
- ▶ Abschätzung durch Taylor'sche Formel:
- ▶ Sei die Funktion f auf dem Intervall (x_0, x) $(n+1)$ mal stetig differenzierbar. Dann existiert ein $z \in (x_0, x)$, so dass gilt

$$\text{▶ } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{\text{Restglied}}$$

- ▶ M.a.W.: In der „Nähe“ von x_0 geht der Fehler schneller gegen Null als $(x - x_0)^n$.

Bew.: Fetzer&Fränkel, S. 396

Taylor'sche Formel

- ▶ Beachte: $z=z(x)$ ist für jedes x ein anderes!
- ▶ D.h., da man i.d.R. z nicht kennt, kann man $f(x)$ nicht exakt über die Taylor'sche Formel berechnen!
- ▶ Aber wenn man eine obere Schranke angeben kann für

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \quad ,$$

dann kann man abschätzen, wie weit man vom exakten Wert entfernt ist.

- ▶ Positiv ausgedrückt: Man kann sagen, wie genau die Approximation ist.

Taylor'sches Polynom, Taylor'sche Reihe

- ▶ Taylor'sches Polynom vom Grad n :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- ▶ Taylor'sche Reihe: $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$

- ▶ Aber:

- ▷ Manchmal ist nur die Partialsumme bis zum n . Glied gemeint, manchmal der Limes $n \rightarrow \infty$.
- ▷ Etwas verwirrend, aber aus dem Kontext heraus meist klar, was gemeint ist.

Beispiele

► Taylorsches Polynom bei $x_0=0$ für

▷ $f(x) = 1 / (1-x)$

▷ $f(x) = e^x$

▷ $f(x) = \sin x$

▷ $f(x) = \cos x$

▷ $f(x) = (1 \pm x)^n$

▷ $f(x) = \ln(1+x)$

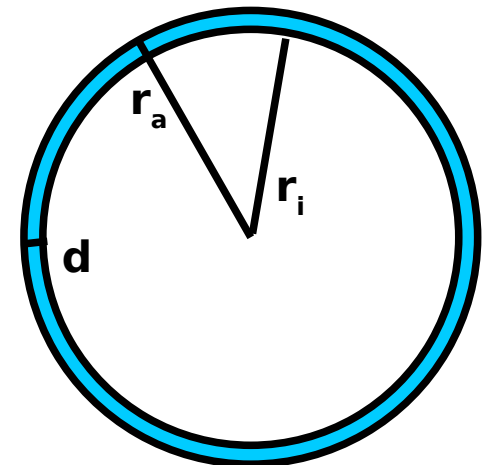
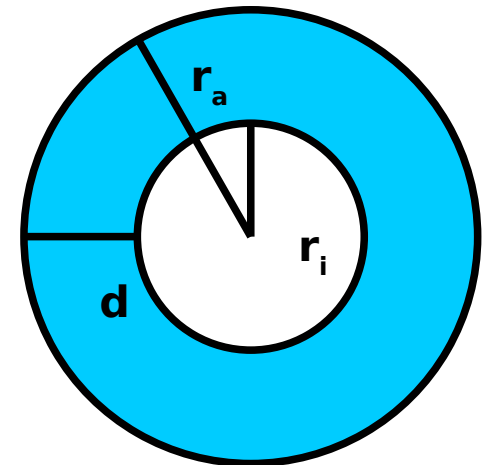
Beispiel: Elektrischer Widerstand

- ▶ Elektrischer Widerstand zwischen zwei coaxialen Leitern (Hohlzylinder)

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \quad r_a > r_i$$

κ Leitfähigkeit
 l Länge des Hohlzylinders

- ▶ Kann man eine Näherung angeben, so dass man für $d = r_a - r_i \ll r_i$ den Widerstand einfach abschätzen kann?



Beispiel: Elektrischer Widerstand

► Es ist:
$$\frac{r_a}{r_i} = \frac{r_a + (r_i - r_i)}{r_i} = \frac{r_i + (r_a - r_i)}{r_i} = 1 + \frac{d}{r_i} = 1 + x$$

► Damit folgt

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln(1+x) \quad x = \frac{d}{r_i} > 0$$

► Reihenentwicklung:
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

► Für $x \ll 1$, kann man nach der 1. bzw. 2. Ordnung abrechnen:

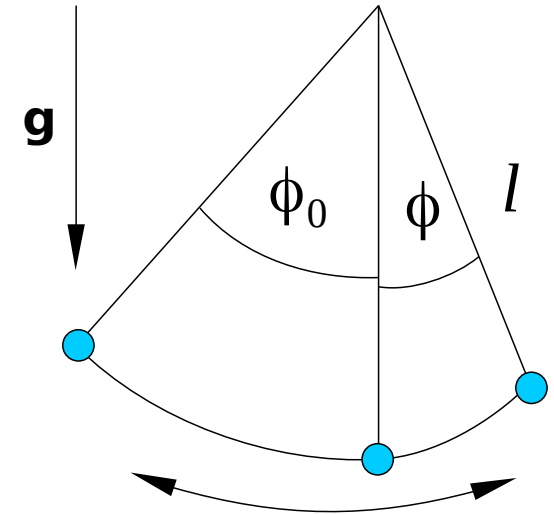
$$R \approx \frac{1}{2\pi\kappa l} \left(\frac{d}{r_i}\right)$$

$$R \approx \frac{1}{2\pi\kappa l} \left(\frac{d}{r_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{r_i}\right)^2\right)$$

Beispiel: Fadenpendel

- ▶ Schwingungsdauer bei maximalem Ausschlag ϕ_0 ist:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\phi_0/2) \sin^2 u}} du$$



- ▶ Nicht analytisch berechenbar!
 - ▷ Keine Formel aus der Integraltafel!
 - ▷ Sog. „Elliptische Integrale“ auch nicht auf jedem Taschenrechner verfügbar!
- ▶ Wie kann man das trotzdem ausrechnen?

Beispiel: Fadenpendel

► Reihenentwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$ um $x=0$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}x^5 + \dots$$

► Einsetzen: $x = \sin^2(\phi_0/2)\sin^2 u = \lambda^2 \sin^2 u$ mit $\lambda = \sin(\phi_0/2)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\lambda^2 \sin^2 u) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(\lambda^2 \sin^2 u)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}(\lambda^2 \sin^2 u)^3 \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}(\lambda^2 \sin^2 u)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}(\lambda^2 \sin^2 u)^5 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\lambda^2 \sin^2 u) + \frac{3}{8}(\lambda^4 \sin^4 u) + \frac{5}{16}(\lambda^6 \sin^6 u) + \frac{35}{128}(\lambda^8 \sin^8 u) + \frac{63}{256}(\lambda^{10} \sin^{10} u) + \dots$$

Beispiel: Fadenpendel

► Und nun in das Integral einsetzen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} du \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{1}{2}(\lambda^2 \sin^2 u) + \frac{3}{8}(\lambda^4 \sin^4 u) \right. \\ & \quad \left. + \frac{5}{16}(\lambda^6 \sin^6 u) + \frac{35}{128}(\lambda^8 \sin^8 u) + \frac{63}{256}(\lambda^{10} \sin^{10} u) + \dots \right] du \\ &= \int_0^{\pi/2} 1 du + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 u du + \frac{3}{8} \lambda^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 u du \\ & \quad + \frac{5}{16} \lambda^6 \int_0^{\pi/2} \sin^6 u du + \frac{35}{128} \lambda^8 \int_0^{\pi/2} \sin^8 u du + \frac{63}{256} \lambda^{10} \int_0^{\pi/2} \sin^{10} u du + \dots \end{aligned}$$

Beispiel: Fadenpendel

► Integrale berechnen:

$$\int_0^{\pi/2} 1 \, du = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du = \frac{1}{2} [u - \sin u \cos u]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} =: I_1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n u \, du = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} u \, du$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 u \, du = \frac{3}{4} I_1 = \frac{3}{4} \frac{\pi}{4} =: I_2$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 u \, du = \frac{5}{6} I_2 = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \frac{\pi}{4} = \frac{5}{8} \frac{\pi}{4} =: I_3$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 u \, du = \frac{7}{8} I_3 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{\pi}{4} = \frac{35}{64} \frac{\pi}{4} =: I_4$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{10} u \, du = \frac{9}{10} I_4 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{\pi}{4} = \frac{63}{128} \frac{\pi}{4} =: I_5$$

Beispiel: Fadenpendel

► Integrale berechnen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} du \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \lambda^2 I_1 + \frac{3}{8} \lambda^4 I_2 + \frac{5}{16} \lambda^6 I_3 + \frac{35}{128} \lambda^8 I_4 + \frac{63}{256} \lambda^{10} I_5 + \dots \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \lambda^4 \frac{3}{4} \frac{\pi}{4} + \frac{5}{16} \lambda^6 \frac{5}{8} \frac{\pi}{4} + \frac{35}{128} \lambda^8 \frac{35}{64} \frac{\pi}{4} + \frac{63}{256} \lambda^{10} \frac{63}{128} \frac{\pi}{4} + \dots \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\pi}{4} + \frac{9}{32} \lambda^4 \frac{\pi}{4} + \frac{25}{128} \lambda^6 \frac{\pi}{4} + \frac{1225}{8192} \lambda^8 \frac{\pi}{4} + \frac{3969}{32768} \lambda^{10} \frac{\pi}{4} + \dots \\ &= \frac{\pi}{4} \left(2 + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{9}{32} \lambda^4 + \frac{25}{128} \lambda^6 + \frac{1225}{8192} \lambda^8 + \frac{3969}{32768} \lambda^{10} + \dots \right) \end{aligned}$$

Mit $\phi_0 = 60^\circ \Rightarrow \lambda = \sin(\phi_0/2) = \sin(30^\circ) = 1/2$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{4} \left(2 + \frac{1}{8} + \frac{9}{512} + \frac{25}{8192} + \frac{1225}{2097152} + \frac{3969}{33554432} + \dots \right) \\ &\approx \frac{\pi}{4} (2 + 0.125 + 0.017578 + 0.003052 + 0.000584 + 0.000118) = \frac{\pi}{4} 2.146332 \approx \underline{\underline{1.686}} \end{aligned}$$

Beispiel: Fadenpendel

- ▶ Für die Schwingungsdauer T folgt damit bei einem Maximalausschlag von 60° :

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 1.686 = 6.744 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- ▶ Vergleiche mit Formel für kleine Auslenkungen:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 6.283 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

- ▶ M.a.W.: Die Approximation für kleine Auslenkungen ist für eine Schwingung um ca. 10% falsch.
- ▶ Das bedeutet: Nach ca. 10 Schwingungen stimmt nichts mehr.

Taylorische Reihe für $n \rightarrow \infty$

- ▶ Restglied ist

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

- ▶ Wir hatten gesehen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

- ▶ Wenn f unendlich oft differenzierbar ist, existiert $f^{(n+1)}$ für $n \rightarrow \infty$.
- ▶ Fragen:
 - ▷ Konvergiert die Taylorische Reihe einer Funktion $f(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$?
 - ▷ Und wenn ja, für welche x ?

Potenzreihen

- ▶ Allgemein:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

- ▶ Jetzt:

$$S_n = \sum_{i=1}^n b_i(x_0)(x - x_0)^i$$

bzw. $S_n = \sum_{i=1}^n b_i x^i$ für $x_0 = 0$

- ▶ Frage:

Kann man den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ für alle x bilden?

- ▶ Antwort:

Manchmal ja (insbes. in wichtigen Fällen),
aber ganz oft nicht.

- ▶ Wie bestimmt man die Konvergenz von Potenzreihen?

Unendliche Reihen: Absolute Konvergenz

- ▶ Eine Reihe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist *absolut* konvergent, wenn auch $s = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.
- ▶ Ist die Reihe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $a_n > 0$ für alle n , so ist sie auch absolut konvergent.
- ▶ Absolut konvergente Reihen erlauben es, bestimmte Rechenoperationen gliedweise auszuführen.

Konvergenz von unendlichen Reihen: Quotientenkriterium

- ▶ Eine Reihe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \neq 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

- ▶ Ist $q > 1$, so ist die Reihe divergent.
- ▶ Ist $q = 1$, versagt das Quotientenkriterium. Dann muss man andere Kriterien verwenden.

Quotientenkriterium: Beispiele

$$\blacktriangleright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{(2n+2)!} + \dots$$

$$\blacktriangleright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

$$\blacktriangleright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$
$$+ \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

Konvergenz von unendlichen Reihen: Wurzelkriterium

- ▶ Eine Reihe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$$

- ▶ Ist $q > 1$, so ist die Reihe divergent.
- ▶ Ist $q = 1$, versagt das Wurzelkriterium. Dann muss man andere Kriterien verwenden.

Konvergenz von unendlichen Reihen: Majorantenkriterium

► Eine Reihe $s_a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent,

wenn es eine konvergente Reihe $s_b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gibt
und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$b_n \geq 0 \quad , \quad |a_n| \leq b_n$$

► s_b ist dann die Majorante zu s_a .

► Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Konvergenz von unendlichen Reihen: Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen

► Eine Reihe $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ist konvergent,

wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n > 0$$

$$a_n > a_{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

► D.h., eine alternierende Reihe ist konvergent, wenn die Glieder der entsprechenden Folge a_n eine streng monoton fallende Nullfolge bilden.

► Beispiel:

▷ harmonische Reihe

▷ alternierende harmonische Reihe

Potenzreihen: Konvergenzbereich

- ▶ Betrachte: $s_n = \sum_{i=1}^n b_i(x_0)(x - x_0)^i$
- ▶ Für $x=x_0$ konvergiert jede Potenzreihe und ihr Wert ist b_0 .
- ▶ Es gibt Potenzreihen, die nur für $x=x_0$ konvergieren, und solche, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.
- ▶ Der Konvergenzbereich ist symmetrisch zu x_0 . D.h., es gibt ein $r > 0$, so dass die Potenzreihe konvergiert für $|x - x_0| < r$. Man bezeichnet r dann als *Konvergenzradius*.
- ▶ Für $|x - x_0| > r$ divergiert dann die Potenzreihe.
- ▶ An den Randpunkten $|x - x_0| = r$ kann man keine allgemeingültigen Aussagen machen.

Potenzreihen: Konvergenzradius

- ▶ Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe

$$s_n = \sum_{i=1}^n b_i(x_0)(x-x_0)^i$$

lässt sich berechnen aus

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|$$

unter der Voraussetzung, dass $b_n \neq 0$ für alle n und dass der Grenzwert existiert.

- ▶ Beweis mit Quotientenkriterium: $a_n = b_n (x-x_0)^n$.

Potenzreihen: Konvergenzradius

Beispiele:

▶ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

▶ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

▶ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

▶ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

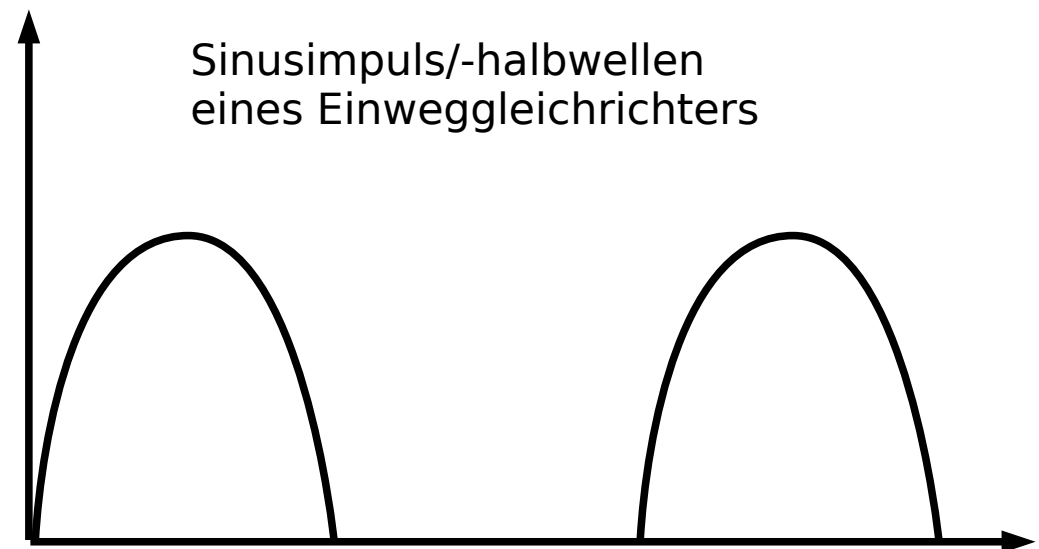
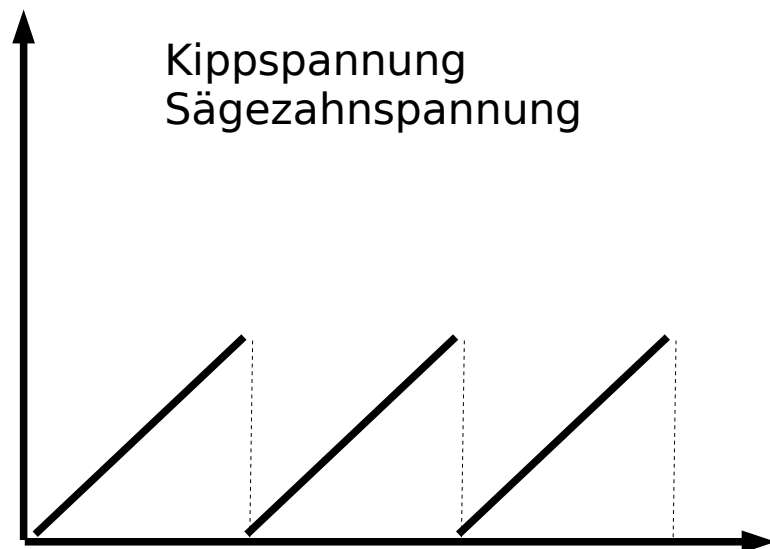
Taylorische Reihe als Potenzreihe

- ▶ Innerhalb des Konvergenzradius konvergiert die Taylorische Reihe gegen die urspr. Funktion.
 - ▷ Beachte Voraussetzungen!
- ▶ Man kann das Taylorische Polynom (endl. viele Terme!) immer berechnen. Aber ob es eine gute Approximation der urspr. Funktion ist, hängt davon ab, ob man innerhalb des Konvergenzradius bleibt!
 - ▷ Der Konvergenzradius ist eine Eigenschaft der unendlichen Reihe!

Approximation von periodischen Funktionen

Fourier-Reihen

- ▶ Fourier: „Man kann jede periodische Funktion als Summe von Sinus- und Cosinus-Termen schreiben.“
 - ▷ „jede periodische Funktion“: Das sind viele!
 - ▷ Voraussetzungen folgen...



Fourier-Reihen: Voraussetzungen

- ▶ Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele Intervalle zerlegen, in denen die Funktion stetig und monoton ist.
- ▶ An den Unstetigkeitsstellen existieren der links- und der rechtsseitige Limes.
 - ▷ Als Unstetigkeiten kommen nur endliche Sprünge in Frage.

Fourier-Reihe: Periode $P = 2\pi$

▶ Gegeben sei $f(x)$ mit Periode 2π und gemäß den obigen Voraussetzungen

▶ Dann gilt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

▶ Man liest: *Fourier-Reihe von f*

▶ a_n und b_n sind die *Fourier-Koeffizienten*.

▷ Alles steht und fällt mit deren Berechnung.

Grundintegrale

- Bestimmte Integrale über die volle Periode 2π für $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(n x) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n x) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n x) \cos(m x) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n x) \sin(m x) dx = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n x) \cos(m x) dx = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m x) \sin(m x) dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m x) \cos(m x) dx = \pi$$

Fourier-Koeffizienten: Berechnung von a_0

- Integriere die Fourier-Reihe über eine volle Periode:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} dx + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx}_{= 0} + \underbrace{b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} 2\pi$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

Fourier-Koeffizienten: Berechnung von a_m

- ▶ Multipliziere die Fourier-Reihe mit $\cos(mx)$ und integriere über eine volle Periode:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx =$$

$$\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(mx) dx = 0$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx$$

$= 0$ für $m \neq n$ $= 0$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m \pi$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

Fourier-Koeffizienten: Berechnung von b_m

- ▶ Multipliziere die Fourier-Reihe mit $\sin(m x)$ und integriere über eine volle Periode:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(m x) dx =$$

$$\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin(m x) dx = 0$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos(n x) \sin(m x) dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(n x) \sin(m x) dx$$

$= 0$ $= 0$ für $m \neq n$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) \sin(m x) dx = b_m \pi$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(m x) dx$$

Fourier-Reihe: Periode $P = 2\pi$

Zusammenfassung:

- ▶ Funktion mit Periode 2π hat Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

mit Fourier-Koeffizienten aus:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

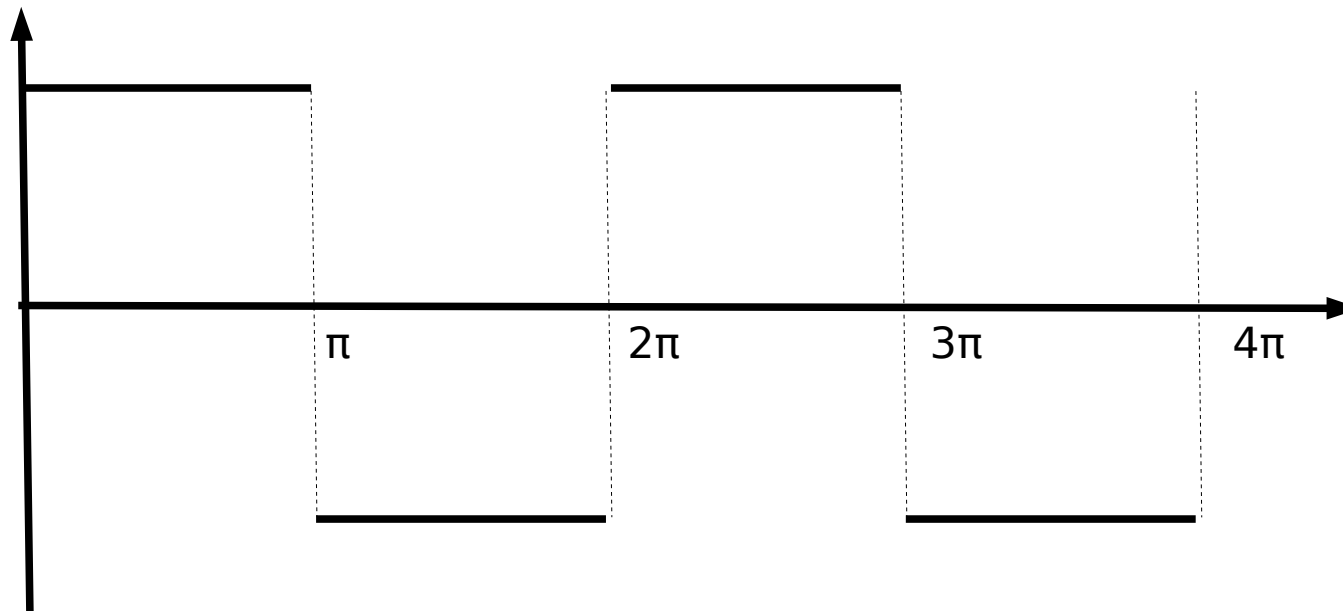
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx \quad m=1,2,3,\dots$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx) dx \quad m=1,2,3,\dots$$

Fourier-Reihe: Periode $P = 2\pi$

► Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 \leq x < \pi \\ -1 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$



Fourier-Reihe: Periode $P = T$

- ▶ Betrachte allg. periodische Bewegung mit Periode T .
 - ▷ Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ (... der Grundschiwingung)
 - ▷ ersetze in der vorherigen Darstellung: $x \rightarrow \omega_0 t$
 - ▷ Integration für die Koeffizienten erfolgt nun über ein (beliebiges) Periodenintervall T .
- ▶ Damit erhält man diese Darstellung der Fourier-Reihe

$$g(t) = f(\omega_0 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

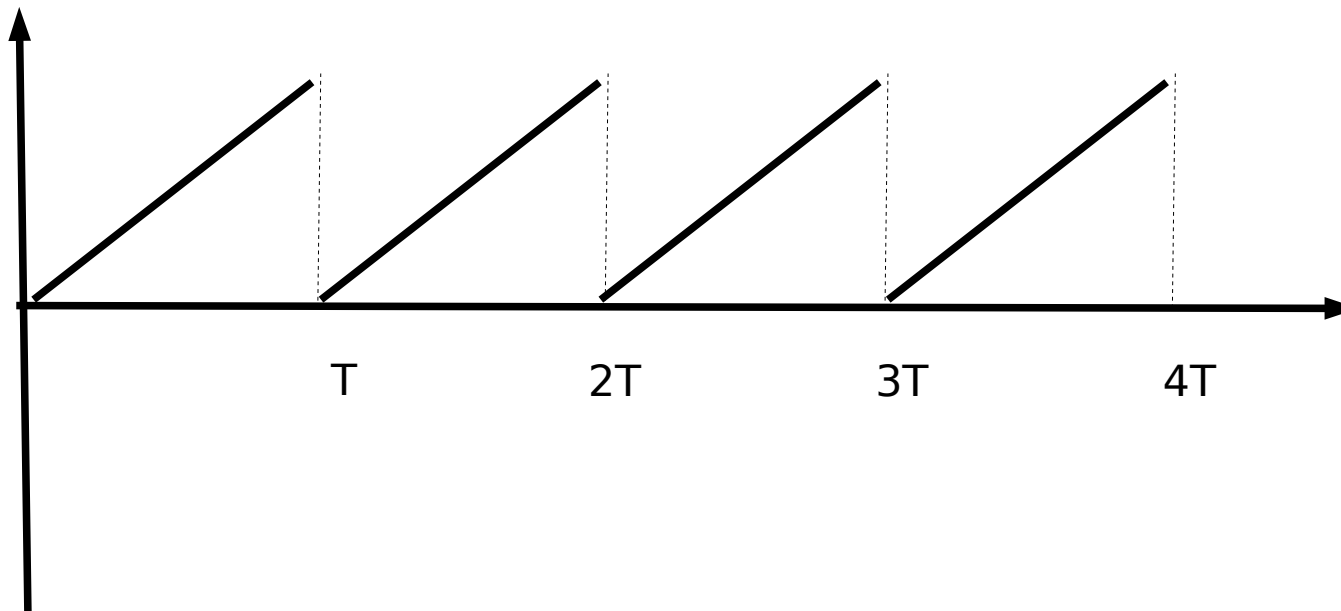
$$a_m = \frac{2}{T} \int_{(T)} g(t) \cos(m\omega_0 t) dt \quad m=0,1,2,3,\dots$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{(T)} g(t) \sin(m\omega_0 t) dt \quad m=1,2,3,\dots$$

Fourier-Reihe: Periode $P = T$

► Beispiel:

$$g(t) = \frac{G}{T} t \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{G ist Amplitude})$$



Fourier-Reihe: Approximation von $g(t)$

► An Beispielen gesehen:

▷ An Sprüngen haben Fourier-Reihen den Wert

$$\frac{g^+(t_0) + g^-(t_0)}{2}$$

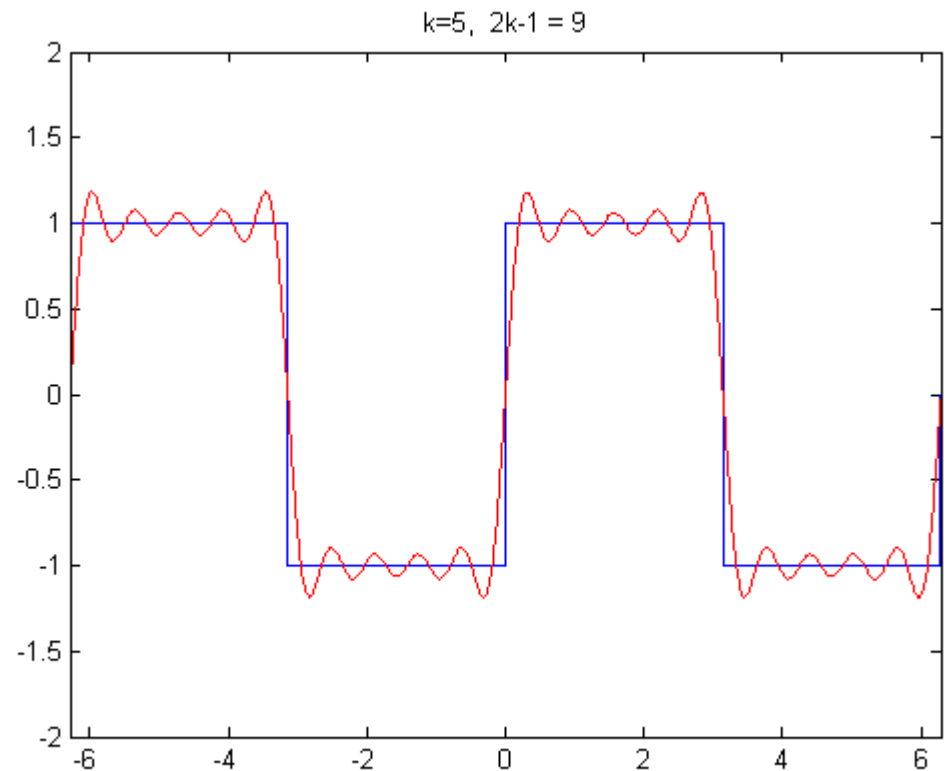
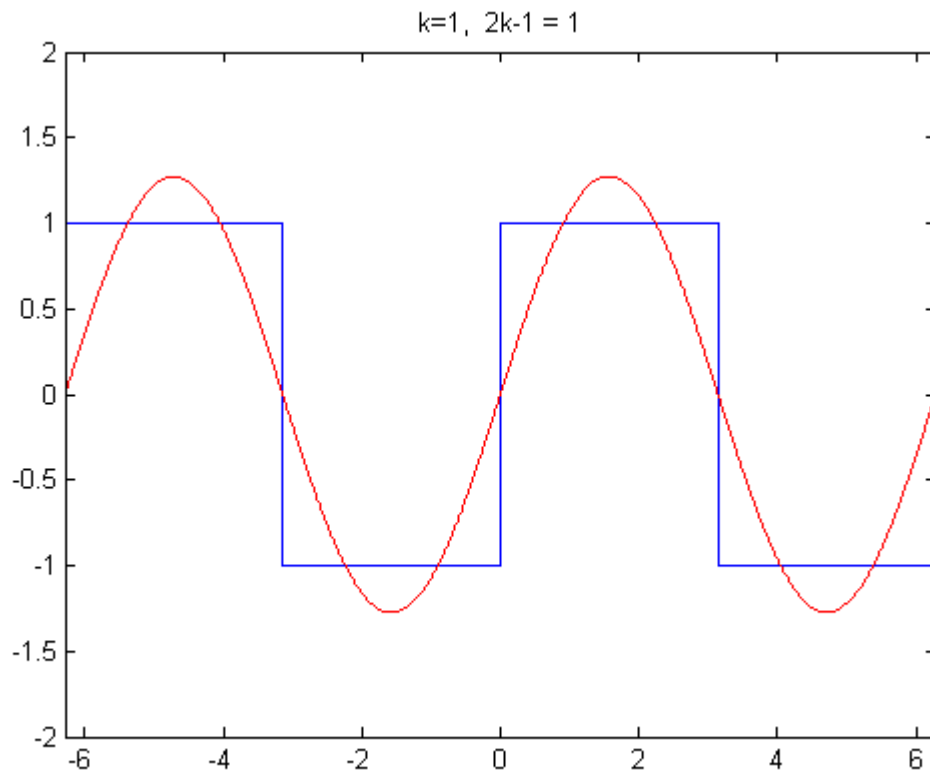
mit $g^+(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} g(t)$ $g^-(t_0) = \lim_{t \uparrow t_0} g(t)$

▷ Fourier-Reihen produzieren „Überschwinger“ links und rechts dieser Unstetigkeitsstellen.

▷ Sind (endliche) Fourier-Reihen eigentlich eine gute Approximation?

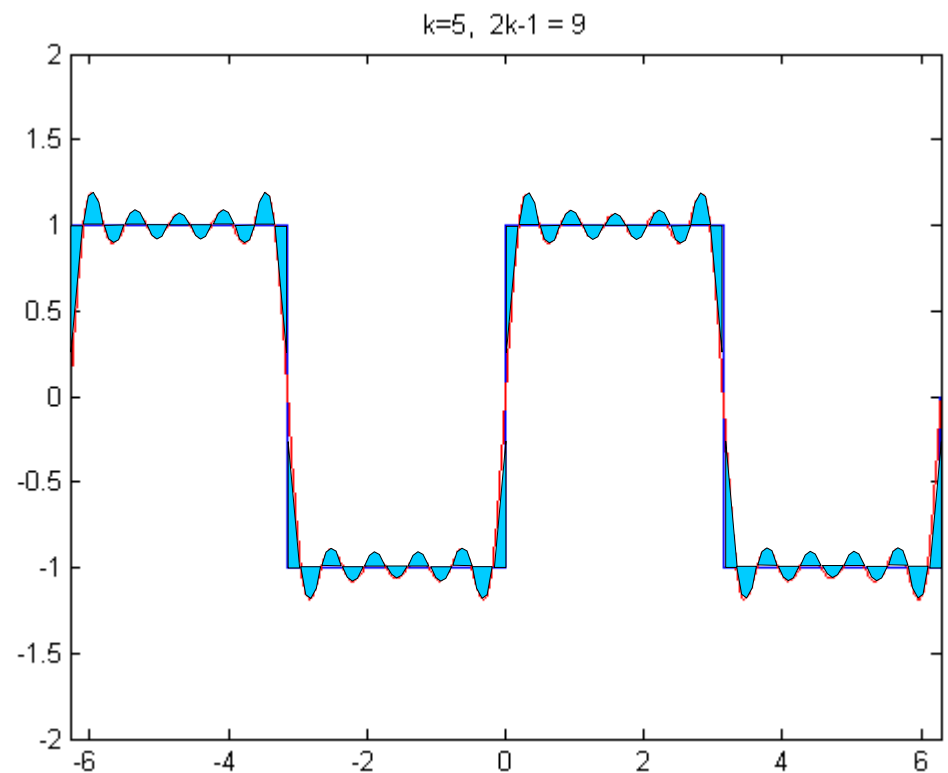
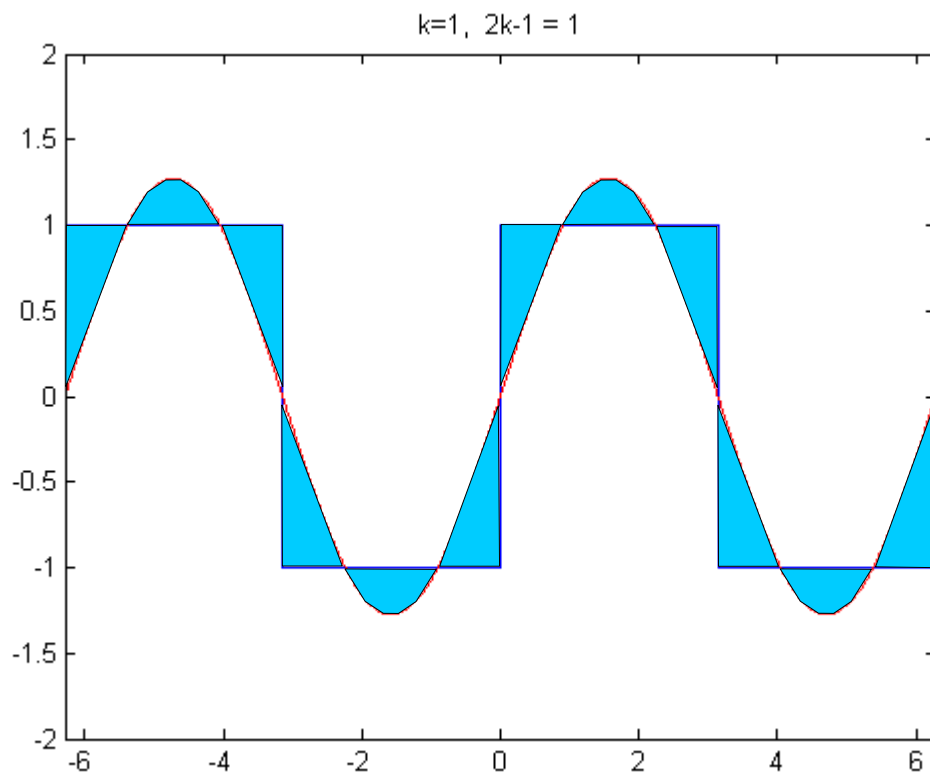
Fourier-Reihe: Approximation von $g(t)$

- ▶ Punktweise Konvergenz nicht überall gut!
 - ▷ An manchen Stellen gar nicht! (Sprungstellen)
- ▶ Trotzdem approximieren sie die urspr. Kurve!



Fourier-Reihe: Approximation von $g(t)$

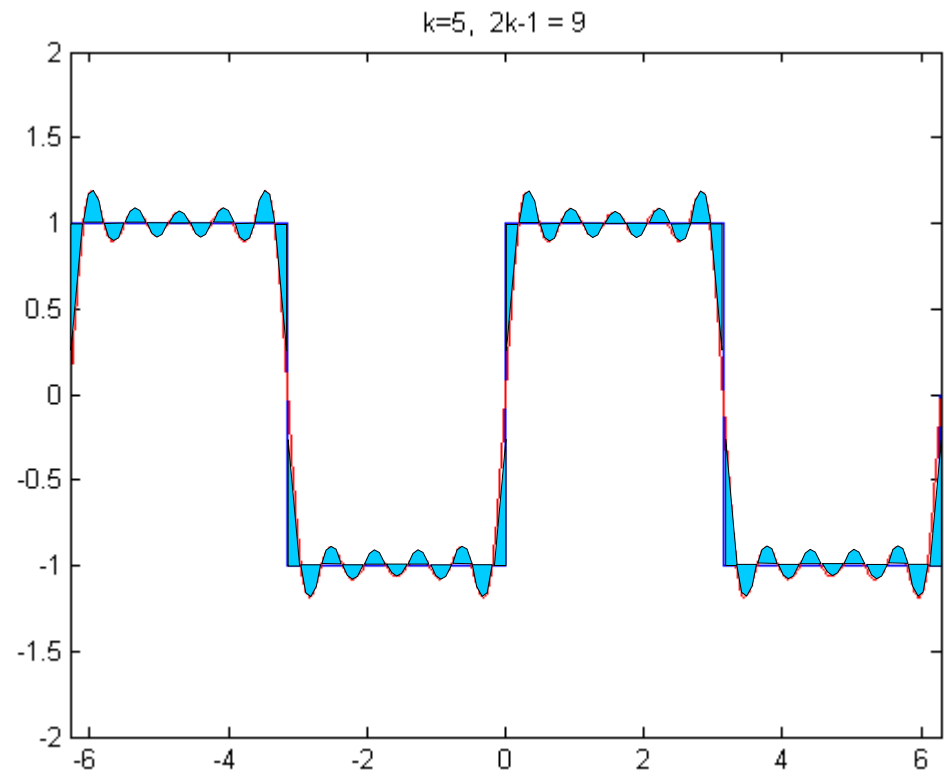
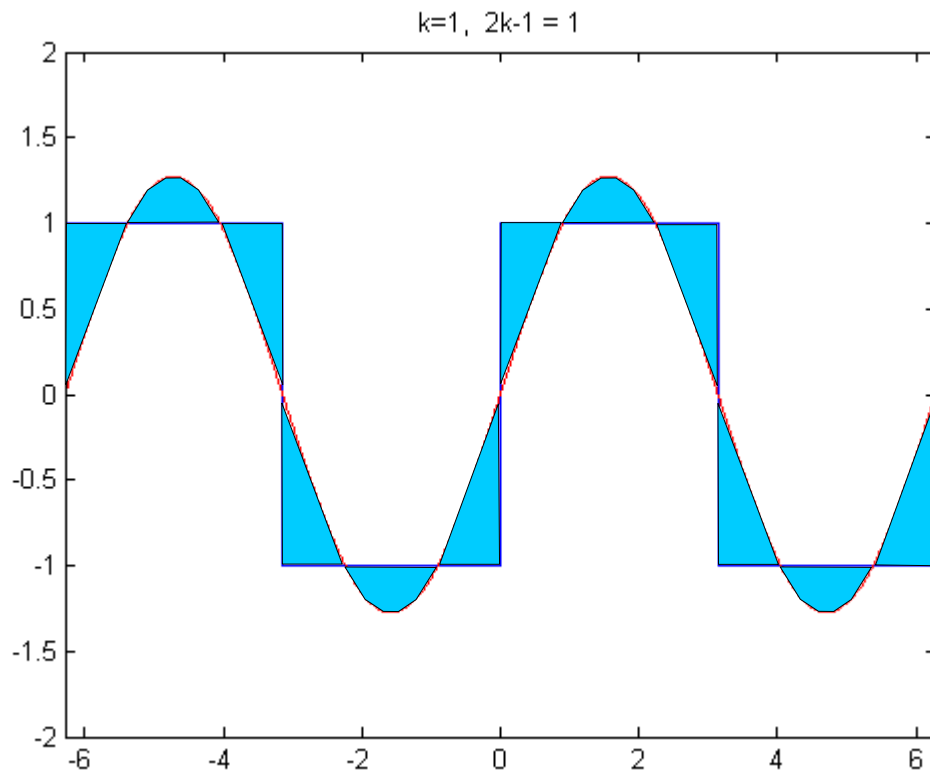
- ▶ Wie kann man die Approximation messen?
- ▶ Die Fläche zw. den Kurven wird kleiner!



Fourier-Reihe: Approximation von $g(t)$

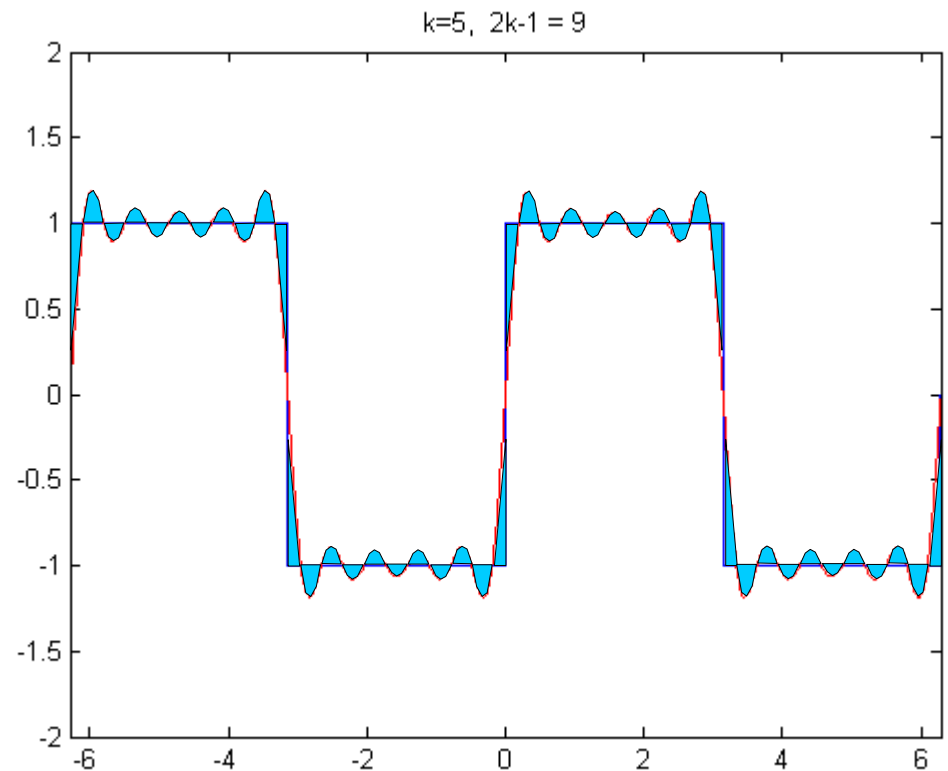
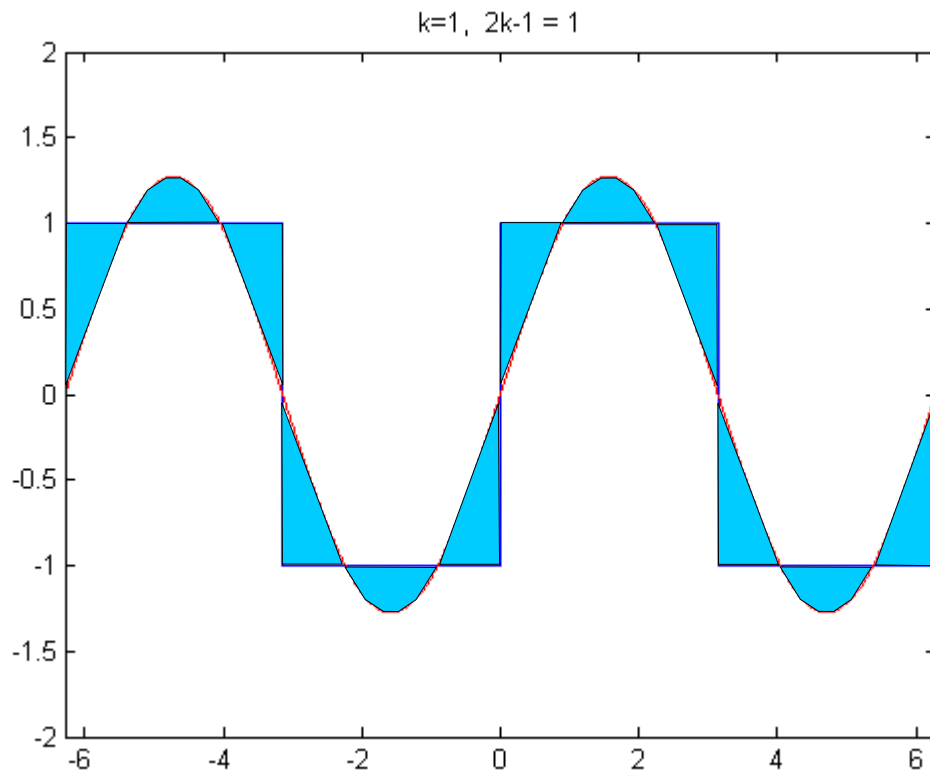
► Statt der Fläche betrachtet man $\int_{(T)} (g(t) - g_n(t))^2 dx$

mit $g_n(t)$: Fourier-Reihe bis Term n



Fourier-Reihe: Approximation von $g(t)$

- ▶ Man nennt dies *Konvergenz im quadratischen Mittel*.



Fourier-Reihe: Differenzieren

- ▶ Betrachte Fourier-Reihe zu einer Funktion:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{(T)} g(t) \cos(m\omega_0 t) dt \quad m=0,1,2,3,\dots$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{(T)} g(t) \sin(m\omega_0 t) dt \quad m=1,2,3,\dots$$

- ▶ **Dann ist die Ableitung nach t ...**

$$g'(t) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \omega_0 (-\sin(n\omega_0 t)) + b_n n \omega_0 \cos(n\omega_0 t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 t) + \beta_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$\alpha_n = b_n n \omega_0 \quad \beta_n = -a_n n \omega_0$$

wieder eine Fourier-Reihe.

Fourier-Reihe: Differenzieren

- ▶ Ausblick:
Man kann eine Fourier-Reihe in eine Differential-Gleichung einsetzen und erhält dann ein rein algebraisches Problem für die Fourier-Koeffizienten.
- ▶ Bei bestimmten Typen von Differentialgleichungen ist dann die Lösung sehr einfach!
 - ▷ z.B. Gleichungen, die Schwingungen beschreiben.