Mechanik und Tragkonstruktion

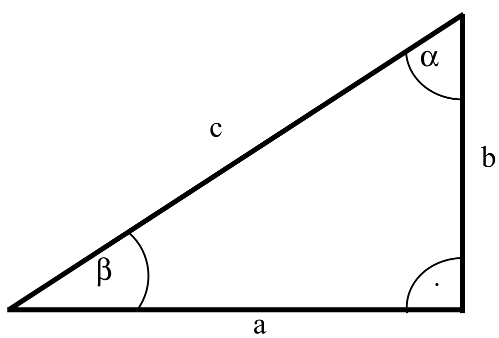
Formelsammlung

Prof. Dr.-Ing. Agnes Weilandt;Prof. Dr.-Ing. Daniel Pfanner

Stand: 10.02.26

1. Geometrie

1.1. Rechtwinkliges Dreieck



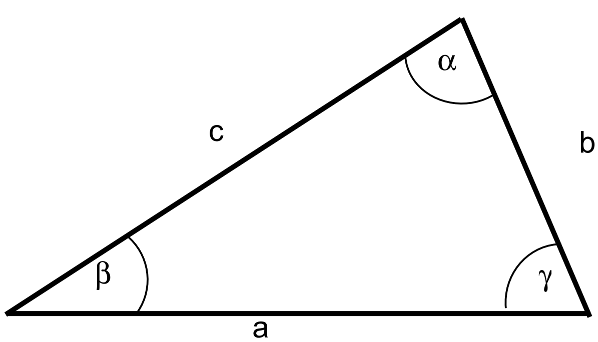
$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$$

Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

1.2. Allgemeines Dreieck



Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Sinussatz: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

2. Zentrales Kraftsystem

2.1. Bestimmung der Resultierenden

Kräfte, die auf verschiedenen Wirkungslinien liegen, können durch das *Parallelogramm der Kräfte* zur *Resultierenden R* zusammengefasst werden.

– Die geometrische Konstruktion entspricht der Vektoraddition.

– Die Reihenfolge der Addition ist beliebig.

Rechnerisches Verfahren:

Vorgehen:

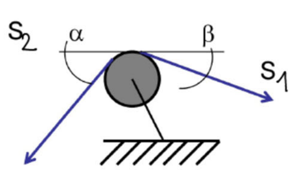
– *Lageplan* der Kräfte zeichnen.

– Ermittlung der Komponenten der Kräfte durch Berücksichtigung der Winkelbeziehungen in x-Richtung.

– Ermittlung der Komponenten durch Berücksichtigung der Winkelbeziehungen in z-Richtung.

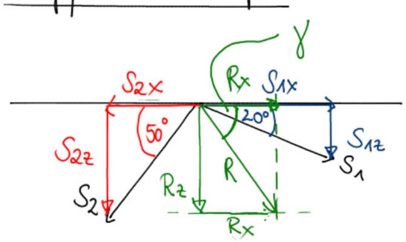
– Addition der jeweiligen Komponenten.

– Bestimmung der Resultierenden durch den Pythagoras.



$\alpha = 50°$
$\beta = 20°$
$S = 30$ kN

Lageplan der Kräfte



$$\Sigma \vec{F}_x = R_x = S_{1x} - S_{2x}$$
$$= \cos 20° \cdot S_1 - \cos 50° \cdot S_2 = 8{,}9\,\text{kN}$$

$$\Sigma F_z \downarrow = R_z = S_{1z} + S_{2z}$$
$$= \sin 20° \cdot S_1 + \sin 50° \cdot S_2 = 33{,}2\,\text{kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = 34{,}4\,\text{kN} \qquad \tan\gamma = \frac{R_z}{R_x} = \frac{33{,}2}{8{,}9}$$
$$\gamma = 75°$$

2.2. Gleichgewicht im zentralen Kraftsystem

Drei oder mehr Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sich ihre Wirkungslinien in einem Punkt schneiden und der Kräfteplan geschlossen ist (Einbahnverkehr).

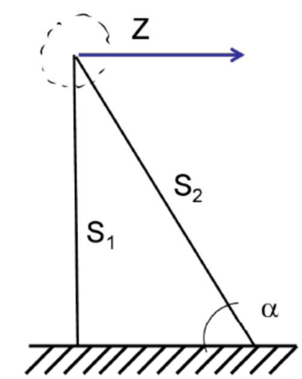
Der Umfahrungssinn muss stetig sein.

Das heißt, dass die Resultierende Null sein muss:

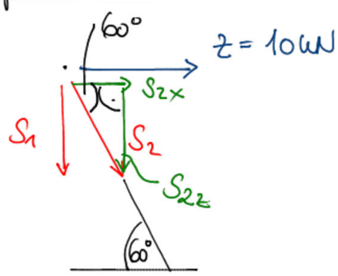
$R = \sum F_i = 0$ $\qquad \sum F_{i,x} = 0 \quad \sum F_{i,y} = 0$

gesucht: S_1 und S_2 damit Gleichgewicht herrscht.

1. Lageplan der Kräfte



$\alpha = 60°$
Z = 10 kN



$\sum \vec{F}_x = 0: \quad 10\,kN + S_{2x} = 0 \qquad S_{2x} = -10\,kN$

$S_{2x} = \cos 60° \cdot S_2 \qquad S_2 = \frac{S_{2x}}{\cos 60°} = -20\,kN$

$\sum F_{z\downarrow} = 0: \quad S_{2z} + S_1 = 0$

$S_{2z} = \sin 60° \cdot S_2 = -17{,}32\,kN$

$S_1 = 17{,}32\,kN$

3. Allgemeines Kraftsystem

3.1. Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kraftsystem

Die Resultierende im allgemeinen Kraftsystem kann mit

$$R_x = \sum F_{ix} \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2}$$

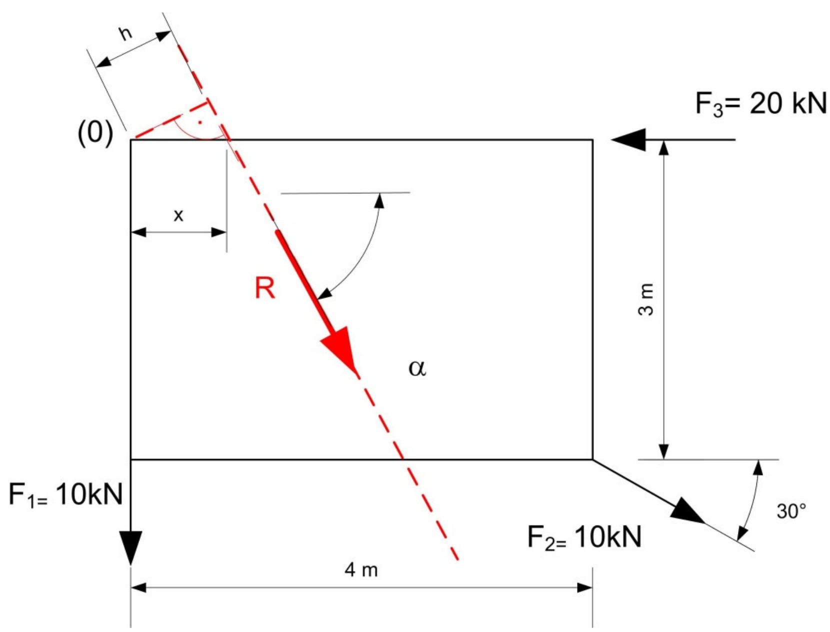
$$R_z = \sum F_{iz}$$

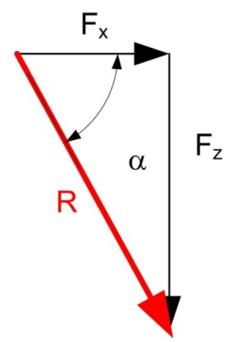
ermittelt werden.

Die Richtung der Resultierenden ergibt sich aus. $\tan\alpha = \frac{R_z}{R_x}$

Die Lage der Resultierenden Kraft ergibt sich nach der Ermittlung des resultierenden Momentes um einen beliebigen Punkt mit

$$M_R = \sum M_i \qquad h = \frac{M_R}{R} \; oder \quad x = \frac{M_R}{R_z}$$





$$\sum F_Z = 0 \downarrow: \ 10kN + \sin 30° \cdot 30\ kN = 25kN$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow: \ cos\, 30° \cdot 30kN - 20kN = 5{,}98\ kN$$

$R = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 25{,}70\ kN$ und α = arctan (25 kN/ 5,98 kN) 76,55°

Resultierendes Moment um (0) infolge der äußeren Kräfte

$$M_{r\,(0)} = \sum M_{(0)} \circlearrowleft$$
$$= F_1 \cdot 0 + F_3 \cdot 0 - \sin 30° \cdot 30\ kN \cdot 4\ m + \cos 30° \cdot 30\ kN \cdot 3\ m = 17{,}94\ kN$$

Lage der Wirkungslinie von R:

$$h = \frac{M_R}{R} = 0{,}696\ m \ \ bzw.\, x = \frac{M_R}{R_Z} = 0{,}718\ m$$

3.2. Gleichgewicht im allgemeinen Kraftsystem

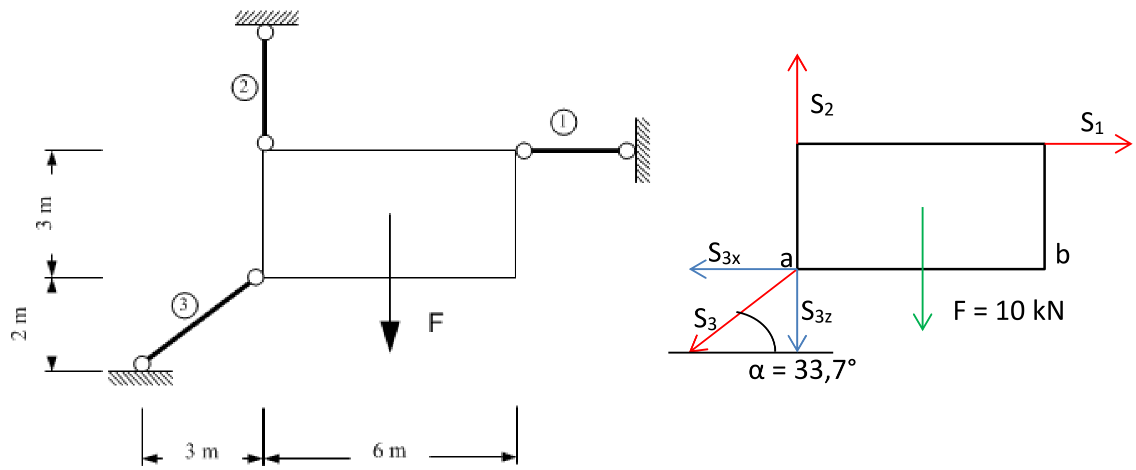
Im allgemeinen Kraftsystem kann das Gleichgewicht über die drei Gleichungen

$$\sum F_{ix} = 0 \qquad \sum F_{iz} = 0 \qquad \sum M_i = 0$$

bestimmt werden.

Statt der Kräftegleichgewichte können weitere Momentengleichgewichte um andere Punkte aufgestellt werden.

Die Berechnung kann durch eine unabhängige Kontrolle, zum Beispiel Momentengleichgewicht um einen weiteren Punkt, kontrolliert werden.



$$\sum M_a \circlearrowleft = 0: -10\,kN \cdot 3\,m - S_1 \cdot 3\,m = 0 \qquad S_1 = -10\,kN$$

$$\sum F_x \rightarrow = 0: S_1 - S_{3x} = 0 \qquad S_{3x} = -10\,kN$$

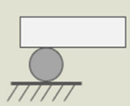
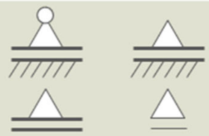
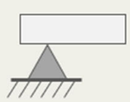
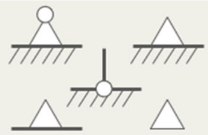
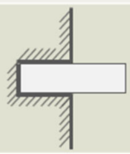
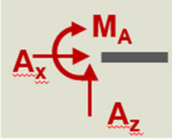
$$S_3 = S_{3x}/\cos 33{,}7° = -12{,}0\,kN \qquad S_{3z} = \sin 33{,}7° \cdot S_3 = -6{,}67\,kN$$

$$\sum F_z \downarrow = 0: 10\,kN + S_{3z} - S_2 = 0 \qquad S_2 = 3{,}33\,kN$$

Unabhängige Kontrolle:

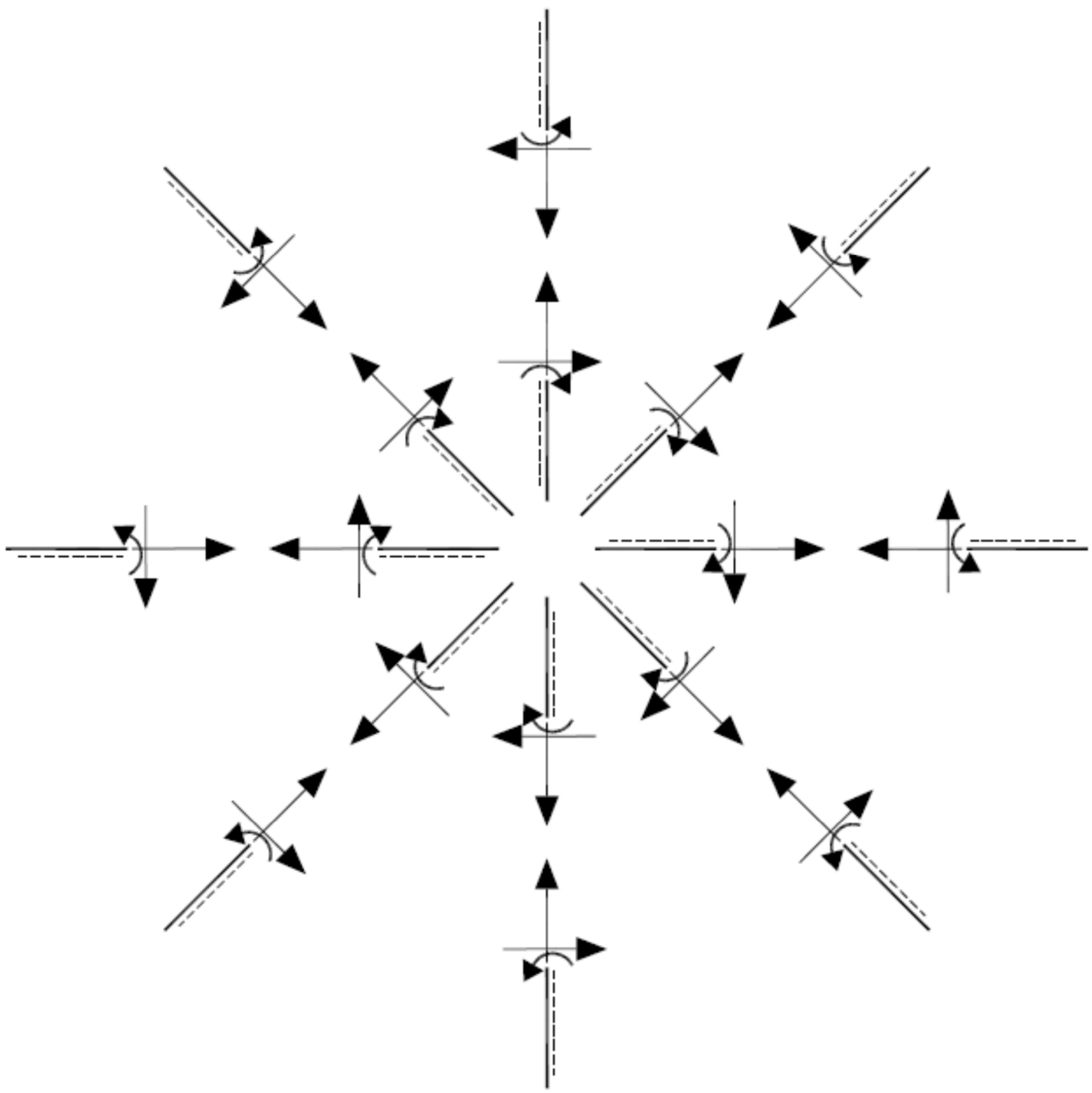
$$\sum M_b \circlearrowleft = 0: 10\,kN \cdot 3\,m + (-6{,}67\,kN) \cdot 6\,m - 3{,}33\,kN \cdot 6\,m - (-10\,kN) \cdot 3\,m = 0 \quad \surd$$

4. Auflager

Prinzip	Bezeichnung	Symbole	Bewegungs-möglichkeit	Auflagerkraft-Freischnitt	Anzahl Reaktionen
	Loslager, Gleitlager		Verschiebung in 1 Achse und 1 Verdrehung		1 („1-wertiges Lager“)
	Festlager		1 Verdrehung		2 („2-wertiges Lager“)
	Einspannung		keine		3 („3-wertiges Lager“)

5. Biegeträger

5.1. Vorzeichenkonvention für Schnittkräfte – Positive Schnittgrößen für verschiedene Stabdrehwinkel



5.2. Schnittkraftermittlung an einzelnen Schnitten

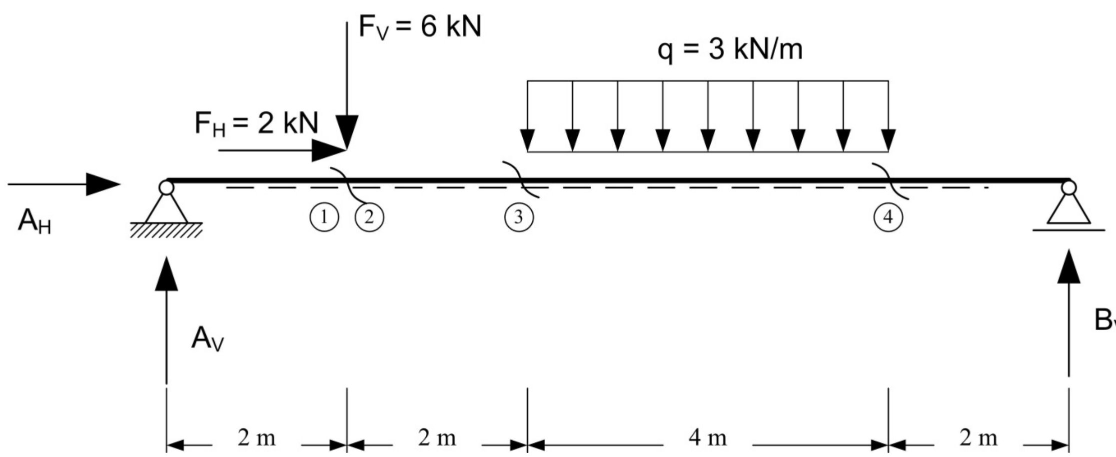
Vorgehen:

- Ermittlung der Auflagerkräfte mit dem äußeren Gleichgewicht
- Ermittlung der Schnittkräfte an markanten Stellen
- Die Schnittkräfte werden als **positive** Schnittkräfte gem. der Vorzeichenkonvention an der Schnittstelle eingetragen.
- Mit den drei Gleichgewichtsbedingungen werden die unbekannten Schnittgrößen *N, V, M* ermittelt.

$$\sum F_x = 0\ ;\ \sum F_z = 0\ ;\ \sum M = 0$$

- Am freien Ende ohne äußere Lasten sind die Schnittkräfte = 0.

Beispiel



Auflagerkräfte

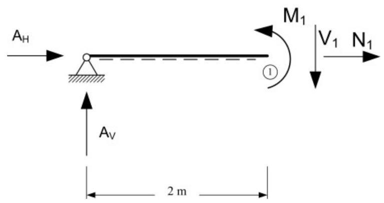
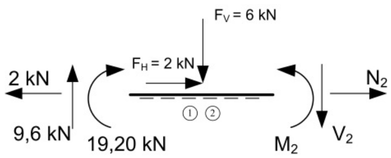
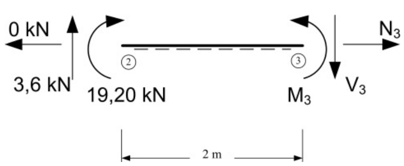
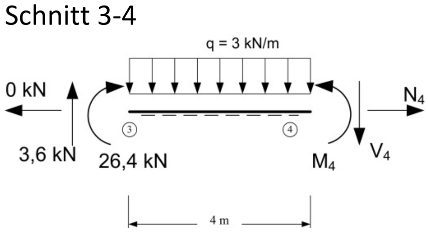
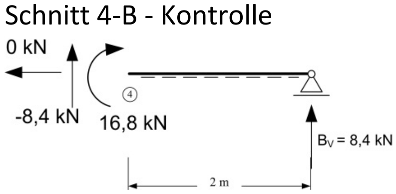
Σ ↺**M$_A$ = 0** = -6,00 kN * 2,00 m + V$_B$ * 10,00 m - 3,00 kN/m * 4,00 m * 6,00 m ⇔ **V$_B$ = 8,40 kN**

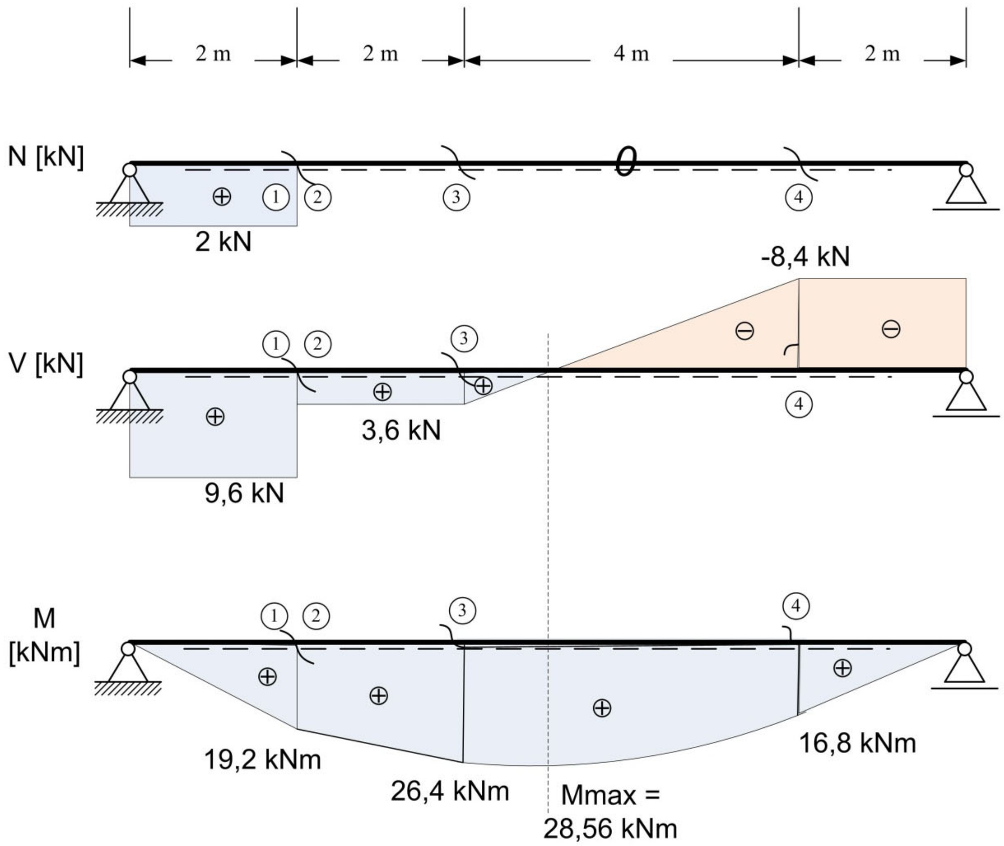
Σ ↺**M$_B$ = 0** = -V$_A$ * 10,00 m + 6,00 kN * 8,00 m + 3,00 kN/m * 4,00 m * 4,00 m ⇔ **V$_A$ = 9,60 kN**

Σ → **H = 0** = H$_A$ + 2,00 kN ⇔ **H$_A$ = - 2,00 kN**

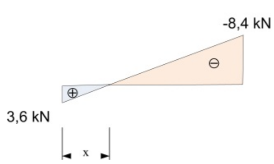
Kontrolle der vertikalen Auflagerkräfte:

Σ ↓**V = 0** = -9,60 kN - 8,40 kN + 6,00 kN + 3,00 kN/m * 4,00 m ⇔ **0 = 0**

Schnitt A-1 	$\Sigma\rightarrow$ **H = 0** = N_1 – 2,00 kN ⇔ **N_1 = 2,00 kN** $\Sigma\downarrow$**V = 0** = V_1 – 9,60 kN ⇔ **V_1 = 9,60 kN** $\Sigma\circlearrowleft$**M = 0** = M_1 – 9,60 kN/m * 2,00 m ⇔ **M_1 = 19,20 kNm**
Schnitt 1-2 	$\Sigma\rightarrow$ **H = 0** = N_2 + 2,00 kN – 2,00 kN ⇔ **N_2 = 0,00 kN** $\Sigma\downarrow$**V = 0** = V_2 + 6,00 kN – 9,60 kN ⇔ **V_2 = 3,60 kN** $\Sigma\circlearrowleft$**M = 0** = M_2 – 19,20 kNm ⇔ **M_2 = 19,20 kNm**
Schnitt 2-3 	$\Sigma\rightarrow$**H = 0** = N_3 – 0,00 kN ⇔ **N_3 = 0,00 kN** $\Sigma\downarrow$**V = 0** = V_3 – 3,60 kN ⇔ **V_3 = 3,60 kN** $\Sigma\circlearrowleft$**M = 0** = M_3 – 3,60 kN * 2,00 m - 19,20 kNm ⇔ **M_3 = 26,40 kNm**
Schnitt 3-4 	$\Sigma\rightarrow$**H = 0** = N_4 – 0,00 kN ⇔ **N_4 = 0,00 kN** $\Sigma\downarrow$**V = 0** = V_4 + 3,00 kN/m * 4,00 m – 3,60 kN ⇔ **V_4 = - 8,40 kN** $\Sigma\circlearrowleft$**M = 0** = M_4 + 3,00 kN/m * 4,00 m * 2,00 m – 26,40 kNm – 3,60 kN * 4,00 m ⇔ **M_4 = 16,80 kNm**
Schnitt 4-B - Kontrolle 	$\Sigma\rightarrow$**H = 0** = 0,00 kN ⇔ **0,00 kN = 0,00 kN** $\Sigma\downarrow$**V = 0** = 8,40 kN + (- 8,40 kN) ⇔ **0,00 kN = 0,00 kN** $\Sigma\circlearrowleft$**M = 0** = 16,80 kNm + (- 8,40 kN) * 2,00 m ⇔ **0,00 kNm = 0,00 kNm**



Berechnung des maximalen Moments



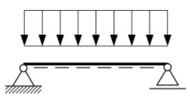
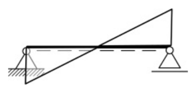
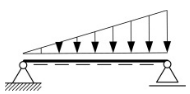
Nulldurchgang der Querkraftlinie:
X_0 = 3,60 kN * 3 kN/m ⇔ $\mathbf{X_0 = 1{,}20\ m}$

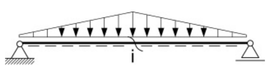
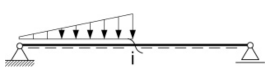
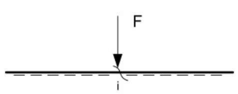
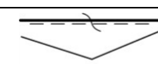
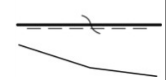
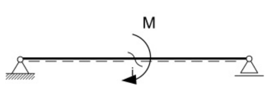
Maximales Moment:
M_{max} = 26,40 kNm - 3,00 kN/m * 1,20 m * 0,60 m
+ 3,6 kN * 1,20 m

⇔ $\mathbf{M_{max} = 28{,}56\ kNm}$

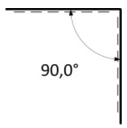
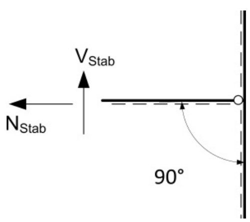
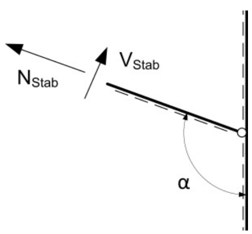
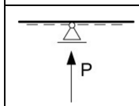
5.3. Schnittkräfte – Zusammenhänge

Zusammenhang zwischen Querkraft und Moment

Einwirkung	V(x)-Funktion		M(x)- Funktion	Bemerkungen
 q(x) konstant		Linearfunktion in pos. x-Richtung abnehmend V(x) = 0 bei x = V_a/q		PII(quadratische Parabel) Extremum bei x mit V(x)= 0
 q(x) Linearfunktion		PII in pos. x-Richtung abnehmend		Kubische Parabel Extremum bei x mit V(x)= 0

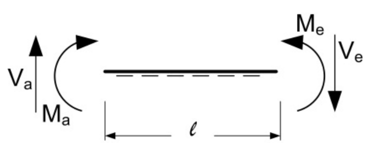
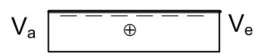
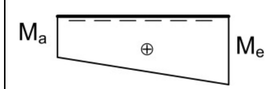
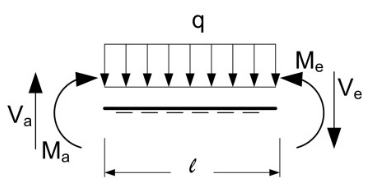
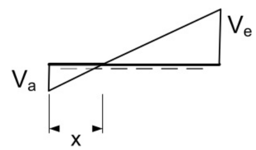
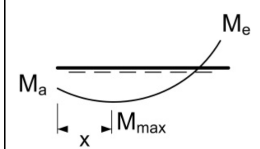
Änderung der Lastfunktion	Einwirkung	V(x)-Funktion	M(x)- Funktion	Bemerkungen
	q(x) mit Knick in (i)	Tangentialer Übergang in (i)	Tangentialer Übergang in (i)	
	q(x) mit Sprung in (i)	Knick in (i)	Tangentialer Übergang in (i)	
	Einzelkraft in (i)	Sprung in (i) um F $V_{i,\ rechts} = V_{i,\ links} - F$	Knick in (i)  	bei Vorzeichen-Wechsel von V ohne Vorzeichen-Wechsel von V
	Einzelmoment in (i)	Durchgehend konstant	Sprung in (i) um M_L	Verlauf von M rechts und links von i abhängig von V

Geometrische Zusammenhänge

Beschreibung	Beschreibung	N(x)- Funktion/ V(x)-Funktion	M(x)- Funktion
	Ecke 90°	N → V V → N Vorzeichen abhängig von gestrichelter Linie	konstant
	Schräge Ecke	Anteiliger Wechsel von N und V Vorzeichen abhängig von gestrichelter Linie	Konstant
	Gelenkiger Stabanschluss 90°	V, N im vertikalen Stab ändern sich sprunghaft V um N_{Stab} N um V_{Stab} Vorzeichen abhängig von gestrichelter Linie	konstant mit Knick, wenn Sprung in V
	Schräger Stabanschluss	Anteilige Sprunghafte Änderung von N und V	Konstant, mit Knick, wenn Sprung in V
	Gelenkiges Lager unter durchlaufendem Träger	V ändert sich sprunghaft um P $V_{i,\ rechts} = V_{i,\ links} + P$	Knick über Lager Verlauf links und rechts vom Lager abhängig von V

Berechnung von M(x) und V(x) bei bekanntem Ma und Va

Die im Folgenden angegebenen Formel ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ($\Sigma F_z = 0$ und $\Sigma M = 0$) des betrachteten freigeschnittenen Stababschnittes. Für andere Belastungssituationen können die Schnittgrößen am Stabende entsprechend berechnet werden.

Belastungssituation	V(x)-Fläche		M(x)	
		$V_e = V_a$		$M_e = M_a + V_a \cdot \ell$ bei $V > 0$ positiv steigend bei $V < 0$ negativ steigend
		$V_e = V_a - q \cdot \ell$ $V(x) = 0$ bei $x = V_a/q$		$M_e = M_a + V_a \cdot \ell - q \cdot \ell^2/2$ M_{max} bei $x = V_a/q$ Ermittlung über Gleichgewicht: $M_{max} = M_a + V_a \cdot x - q \cdot x^2/2$

5.5. Schnittkraftermittlung mit Tabellenwerken

1.1 Einzelstab, Vereinbarung: Lager überträgt nur Vertikalkraft

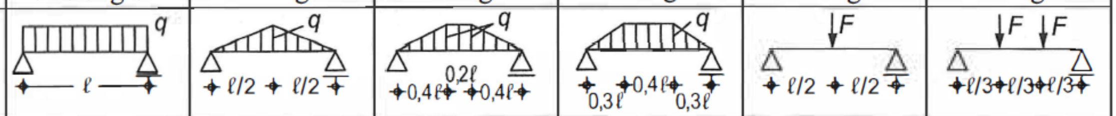
1.1.1 Träger auf zwei Stützen, $\alpha = a/l,\ \beta = b/l$

Nr.	EI = konst. (i, k, l)	Auflagerkräfte A	Auflagerkräfte B	M-Linie ($x_0=\xi_0 l$) max M	Biegelinie ($l/2$, $l/2$) w_{Mitte}
1	q	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$ bei $\xi_0=0{,}5$	$\frac{ql^4}{76{,}8\,EI}$
2	q	$\frac{ql}{6}$	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{15{,}59}$ bei $\xi_0=0{,}577$	$\frac{ql^4}{153{,}6\,EI}$
3	q	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql}{6}$	$\frac{ql^2}{15{,}59}$ bei $\xi_0=0{,}423$	$\frac{ql^4}{153{,}6\,EI}$
4	q_i, q_k	$\frac{2q_i+q_k}{6}l$	$\frac{q_i+2q_k}{6}l$	$\left(\frac{q_i}{2}+\frac{q_k-q_i}{3}\xi_0\right)\xi_0^2 l^2$ bei $\xi_0=\frac{(2q_i+q_k)/\sqrt{3}}{q_i\sqrt{3}+\sqrt{q_i^2+q_iq_k+q_k^2}}$	$\frac{q_i+q_k}{153{,}6\,EI}l^4$
5	q, quadr. Parabel	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{9{,}6}$ bei $\xi_0=0{,}5$	$\frac{61\,ql^4}{5760\,EI}$
6	F; $l/2$, $l/2$	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{Fl}{4}$ bei $\xi_0=0{,}5$	$\frac{Fl^3}{48EI}$
7	F; a, b	βF	αF	$\alpha\beta F l$ bei $\xi_0=\alpha$	$\alpha\le\frac{1}{2}$: $\frac{3-4\alpha^2}{48EI}\alpha F l^3$
8	$n-1$ Lasten F; a, a, a, a; $a=l/n$	$\frac{n-1}{2}F$	$\frac{n-1}{2}F$	n gerade: $\frac{n}{8}Fl$ n ungerade: $\frac{n}{8}Fl\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$	$\frac{nFl^3}{76{,}8\,EI}\left(1-\frac{0{,}8}{n^2}\right)$ $\frac{nFl^3}{76{,}8\,EI}\left(1-\frac{0{,}8}{n^2}-\frac{0{,}2}{n^4}\right)$
9	n Lasten F; $a/2$, a, a, a, $a/2$; $a=l/n$	$\frac{n}{2}F$	$\frac{n}{2}F$	n gerade: $\frac{n}{8}Fl$ n ungerade: $\frac{n}{8}Fl\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$	$\frac{nFl^3}{76{,}8\,EI}\left(1+\frac{0{,}4}{n^2}\right)$ $\frac{nFl^3}{76{,}8\,EI}\left(1+\frac{0{,}4}{n^2}+\frac{0{,}2}{n^4}\right)$
9a	F_1, c, $F_2\le F_1$; x_0			$\frac{x_0^2}{l}(F_1+F_2)$ bei $x_0=\frac{1}{2}\left(l-\frac{F_2}{F_1+F_2}c\right)$ wenn $x_0+c\le l$	
10	M^e; a, b	$-\frac{M^e}{l}$	$\frac{M^e}{l}$	$\alpha\le\frac{1}{2}$: βM^e bei $\xi_0=\alpha$ $\alpha\ge\frac{1}{2}$: $-\alpha M^e$ bei $\xi_0=\alpha$	$\alpha\le\frac{1}{2}$: $\frac{1-4\alpha^2}{16EI}M^e l^2$ $\alpha\ge\frac{1}{2}$: $\frac{4\beta^2-1}{16EI}M^e l^2$
11	M_i, M_k	$\frac{M_k-M_i}{l}$	$-\frac{M_k-M_i}{l}$	M_i oder M_k	$\frac{M_i+M_k}{16EI}l^2$
12	Temp. T_o, T_u, h; $\kappa^e=\alpha_T(T_u-T_o)/h$	0	0	0	$\frac{\kappa^e l^2}{8}$
13	w_i, w_k	0	0	0	$\frac{w_i+w_k}{2}$

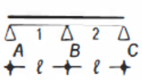
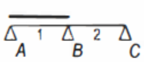
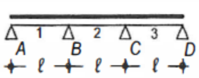
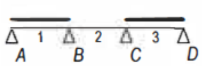
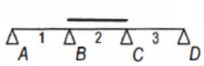
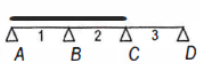
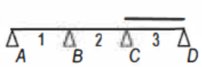
Quelle: Schneider Bautabellen

1.4 Durchlaufträger[1]

1.4.1 Durchlaufträger mit gleichen Stützweiten über 2 bis 5 Felder[2]

	Belastung 1	Belastung 2	Belastung 3	Belastung 4	Belastung 5	Belastung 6
						
Momente	Tafelwert · ql^2				Tafelwert · Fl	
Kräfte	Tafelwert · ql				Tafelwert · F	

Die Feldmomente M_1, M_2 usw. sind die Größtwerte der Feldmomente in den Feldern 1, 2 usw.

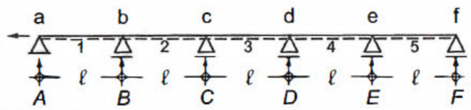
Lastfall	Kraftgrößen	Belastung 1	Belastung 2	Belastung 3	Belastung 4	Belastung 5	Belastung 6
	M_1	0,070	0,048	0,056	0,062	0,156	0,222
	M_b	–0,125	–0,078	–0,093	–0,106	–0,188	–0,333
	A	0,375	0,172	0,207	0,244	0,313	0,667
	B	1,250	0,656	0,786	0,911	1,375	2,667
	V_{bl}	–0,625	–0,328	–0,393	–0,456	–0,688	–1,333
	M_1	0,096	0,065	0,076	0,085	0,203	0,278
	M_b	–0,063	–0,039	–0,047	–0,053	–0,094	–0,167
	A	0,438	0,211	0,253	0,297	0,406	0,833
	C	–0,063	–0,039	–0,047	–0,053	–0,094	–0,167
	M_1	0,080	0,054	0,064	0,071	0,175	0,244
	M_2	0,025	0,021	0,024	0,025	0,100	0,067
	M_b	–0,100	–0,063	–0,074	–0,085	–0,150	–0,267
	A	0,400	0,188	0,226	0,265	0,350	0,733
	B	1,100	0,563	0,674	0,785	1,150	2,267
	V_{bl}	–0,600	–0,313	–0,374	–0,435	–0,650	–1,267
	V_{br}	0,500	0,250	0,300	0,350	0,500	1,000
	M_1	0,101	0,068	0,080	0,090	0,213	0,289
	M_2	–0,050	–0,032	–0,037	–0,043	–0,075	–0,133
	M_b	–0,050	–0,032	–0,037	–0,043	–0,075	–0,133
	A	0,450	0,219	0,263	0,307	0,425	0,867
	M_2	0,075	0,052	0,061	0,067	0,175	0,200
	M_b	–0,050	–0,032	–0,037	–0,043	–0,075	–0,133
	A	–0,050	–0,032	–0,037	–0,043	–0,075	–0,133
	M_b	–0,117	–0,073	–0,087	–0,099	–0,175	–0,311
	M_c	–0,033	–0,021	–0,025	–0,029	–0,050	–0,089
	B	1,200	0,626	0,749	0,871	1,300	2,533
	V_{bl}	–0,617	–0,323	–0,387	–0,449	–0,675	–1,311
	V_{br}	0,583	0,303	0,362	0,421	0,625	1,222
	M_b	0,017	0,011	0,013	0,015	0,025	0,044
	M_c	–0,067	–0,042	–0,050	–0,057	–0,100	–0,178
	V_{bl}	0,017	0,011	0,013	0,015	0,025	0,044
	V_{br}	–0,083	–0,053	–0,062	–0,071	–0,125	–0,222

Quelle: Schneider Bautabellen

Größtwerte der Biegemomente unter Berücksichtigung ungünstiger Lastanordnung der veränderlichen Lasten

1.4.2 Durchlaufträger mit gleichen Stützweiten und Gleichstreckenlast (EI = const) [1)]

Größtwerte der Biegemomente, Auflager- und Querkräfte



g = const
q = const
$r = g + q$

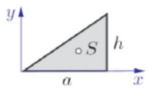
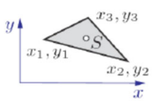
Momente = Tafelwert · rl^2
Kräfte = Tafelwert · rl

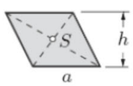
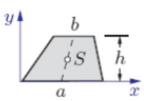
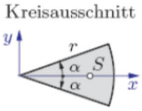
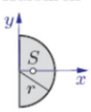
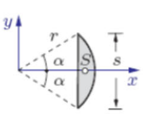
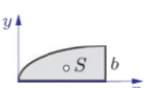
Felder	Kraftgrößen	$q:r$										
		0,0 nur g	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2	M_1	0,070	0,073	0,075	0,078	0,080	0,083	0,085	0,088	0,090	0,093	0,096
	M_b	−0,125	−0,125	−0,125	−0,125	−0,125	−0,125	−0,125	−0,125	−0,125	−0,125	−0,125
	A	0,375	0,382	0,388	0,394	0,400	0,407	0,413	0,418	0,426	0,431	0,437
	B	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250	1,250
	V_{bl}	−0,625	−0,625	−0,625	−0,625	−0,625	−0,625	−0,625	−0,625	−0,625	−0,625	−0,625
3	M_1	0,080	0,082	0,084	0,086	0,088	0,090	0,092	0,095	0,097	0,099	0,101
	M_2	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075
	M_b	−0,100	−0,102	−0,103	−0,105	−0,107	−0,108	−0,110	−0,112	−0,113	−0,115	−0,117
	A	0,400	0,405	0,410	0,415	0,420	0,426	0,429	0,435	0,441	0,444	0,450
	B	1,099	1,110	1,117	1,132	1,141	1,151	1,159	1,172	1,181	1,188	1,202
	V_{bl}	−0,599	−0,602	−0,602	−0,606	−0,606	−0,610	−0,610	−0,613	−0,613	−0613	−0,617
	V_{br}	0,500	0,508	0,515	0,526	0,535	0,541	0,549	0,559	0,568	0,575	0,585
4	M_1	0,077	0,079	0,081	0,084	0,086	0,088	0,090	0,093	0,095	0,097	0,100
	M_2	0,036	0,041	0,045	0,050	0,054	0,058	0,063	0,067	0,072	0,076	0,081
	M_b	−0,107	−0,108	−0,110	−0,111	−0,113	−0,114	−0,115	−0,117	−0,118	−0,119	−0,121
	M_c	−0,071	−0,075	−0,079	−0,082	−0,086	−0,089	−0,093	−0,096	−0,100	−0,104	−0,107
	A	0,392	0,398	0,403	0,408	0,415	0,420	0,426	0,431	0,435	0,441	0,446
	B	1,141	1,153	1,159	1,166	1,175	1,181	1,188	1,198	1,205	1,216	1,223
	C	0,930	0,948	0,970	0,996	1,016	1,036	1,058	1,082	1,098	1,124	1,142
	V_{bl}	−0,606	−0,610	−0,610	−0,613	−0,613	−0,613	−0,613	−0,617	−0,617	−0,621	−0,621
	V_{br}	0,535	0,544	0,549	0,556	0,562	0,568	0,575	0,581	0,588	0,595	0,602
	V_{cl}	−0,465	−0,474	−0,485	−0,498	−0,508	−0,518	−0,529	−0,541	−0,549	−0,562	−0,571
5	M_1	0,078	0,080	0,082	0,084	0,086	0,089	0,091	0,093	0,095	0,098	0,100
	M_2	0,033	0,038	0,042	0,047	0,052	0,056	0,061	0,065	0,070	0,075	0,079
	M_3	0,046	0,050	0,054	0,058	0,062	0,066	0,070	0,074	0,078	0,082	0,086
	M_b	−0,105	−0,107	−0,108	−0,110	−0,111	−0,112	−0,114	−0,115	−0,117	−0,118	−0,120
	M_c	−0,079	−0,082	−0,085	−0,089	−0,092	−0,095	−0,098	−0,102	−0,105	−0,108	−0,111
	A	0,395	0,400	0,405	0,410	0,415	0,422	0,426	0,431	0,437	0,442	0,447
	B	1,132	1,141	1,151	1,156	1,166	1,175	1,181	1,191	1,202	1,209	1,220
	C	0,974	0,993	1,013	1,031	1,053	1,072	1,091	1,111	1,127	1,146	1,170
	V_{bl}	−0,606	−0,606	−0,610	−0,610	−0,610	−0,613	−0,613	−0,613	−0,617	−0,617	−0,621
	V_{br}	0,526	0,535	0,541	0,546	0,556	0,562	0,568	0,578	0,585	0,592	0,599
	V_{cl}	−0,474	−0,483	−0,495	−0,505	−0,515	−0,526	−0,535	−0,546	−0,556	−0,565	−0,578
	V_{cr}	0,500	0,510	0,518	0,526	0,538	0,546	0,556	0,565	0,571	0,581	0,592

Quelle: Schneider Bautabellen

Festigkeitslehre

5.6. Bekannte Schwerpunkte

Fläche	Flächeninhalt	Schwerpunktslage
rechtwinkliges Dreieck 	$A = \frac{1}{2}\,ah$	$x_s = \frac{2}{3}\,a, \quad y_s = \frac{h}{3}$
beliebiges Dreieck 	$A = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$	$x_s = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ $y_s = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$

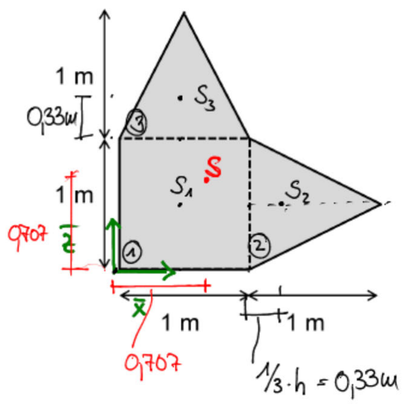
Fläche	Flächeninhalt	Schwerpunktslage
Parallelogramm 	$A = a\,h$	S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen
Trapez 	$A = \frac{h}{2}(a + b)$	S liegt auf der Seitenhalbierenden $y_s = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2\,b}{a + b}$
Kreisausschnitt 	$A = \alpha\,r^2$	$x_s = \frac{2}{3}\,r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
Halbkreis 	$A = \frac{\pi}{2}\,r^2$	$x_s = \frac{4\,r}{3\,\pi}$
Kreisabschnitt 	$A = \frac{1}{2}\,r^2(2\,\alpha - \sin 2\,\alpha)$	$x_s = \frac{s^3}{12\,A} = \frac{4}{3}\,r\,\frac{\sin^3\alpha}{2\,\alpha - \sin 2\,\alpha}$
quadratische Parabel 	$A = \frac{2}{3}\,a\,b$	$x_s = \frac{3}{5}\,a$ $y_s = \frac{3}{8}\,b$

5.7. Bestimmung des Schwerpunktes beliebiger zusammengesetzter Flächen

Vorgehen:

- Aufteilen der Fläche in bekannte Teilflächen
- Ursprung und Koordinatensystem $\bar{y}$ und $\bar{z}$ wählen
- Ermitteln der Teilflächen A_i und der Teilflächenschwerpunkte $\bar{z}_i$ und $\bar{y}_i$
- Berechnung der Schwerpunktkoordinaten

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \bar{z}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$



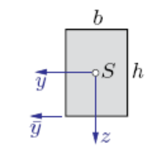
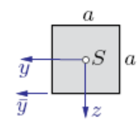
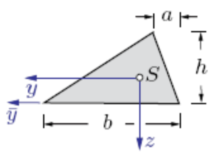
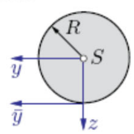
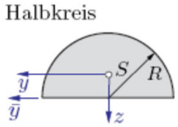
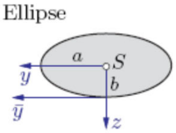
Nr	A [m²]	$\bar{x}_i$	$\bar{z}_i$
1	1	0,5	0,5
2	0,5	1,33	0,5
3	0,5m	0,5	1,33

$$\bar{x}_s = \frac{1 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 1{,}33 + 0{,}5 \cdot 0{,}5}{2m^2} = \frac{\Sigma A_i \bar{x}_i}{\Sigma A_i}$$

$$= 0{,}707\,m$$

$$\bar{z}_s = \frac{\Sigma A_i \bar{z}_i}{\Sigma A_i} = \frac{1 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 1{,}33}{2m^2} = 0{,}707\,m$$

5.8. Bekannte Flächenträgheitsmomente

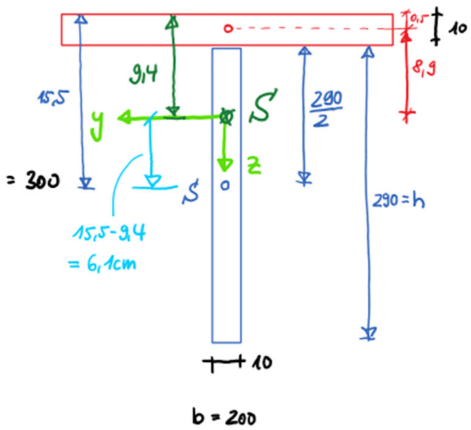
Fläche	I_y	I_z	I_{yz}	I_p	$I_{\bar{y}}$
Rechteck 	$\frac{b\,h^3}{12}$	$\frac{h\,b^3}{12}$	0	$\frac{b\,h}{12}(h^2+b^2)$	$\frac{b\,h^3}{3}$
Quadrat 	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	0	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{a^4}{3}$
Dreieck 	$\frac{b\,h^3}{36}$	$\frac{b\,h}{36}(b^2-b\,a+a^2)$	$-\frac{b\,h^2}{72}(b-2\,a)$	$\frac{b\,h}{36}(h^2+b^2-b\,a+a^2)$	$\frac{b\,h^3}{12}$
Kreis 	$\frac{\pi\,R^4}{4}$	$\frac{\pi\,R^4}{4}$	0	$\frac{\pi\,R^4}{2}$	$\frac{5\pi}{4}R^4$
dünner Kreisring $t \ll R_m$ 	$\pi\,R_m^3\,t$	$\pi\,R_m^3\,t$	0	$2\,\pi\,R_m^3\,t$	$3\,\pi\,R_m^3\,t$
Halbkreis 	$\frac{R^4}{72\,\pi}(9\,\pi^2-64)$	$\frac{\pi\,R^4}{8}$	0	$\frac{R^4}{36\,\pi}(9\,\pi^2-32)$	$\frac{\pi\,R^4}{8}$
Ellipse 	$\frac{\pi}{4}a\,b^3$	$\frac{\pi}{4}b\,a^3$	0	$\frac{\pi\,a\,b}{4}(a^2+b^2)$	$\frac{5\pi}{4}a\,b^3$

Weitere Querschnittswerte können z.B. im Stahlbau Profiltabellen entnommen werden.

5.9. Bestimmung des Flächenträgheitsmoments bei symmetrischen Querschnitten

$$I_y = \sum \left(I_{yi} + A_i \cdot z_i^2\right)$$

$$I_z = \sum (I_{zi} + A_i \cdot y_i^2)$$



$$I_y = \sum \left(I_{yi} + A_i \cdot z_i^2\right)$$

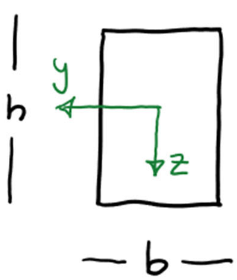
$$= \frac{1^3 \cdot 20}{12} + 1 \cdot 20 \cdot (-8{,}9)^2$$

$$+ \frac{1 \cdot 29^3}{12} + 1 \cdot 29 \cdot (+6{,}1)^2 \quad = 4697\,cm^4$$

$$I_z = \sum \left(I_{zi} + A_i \cdot y_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{12} + 29^3 \cdot 20 \cdot (0)^2$$

$$+ \frac{1^3 \cdot 29}{12} + 1 \cdot 29 \cdot (0)^2 \quad = 669\,cm^4$$

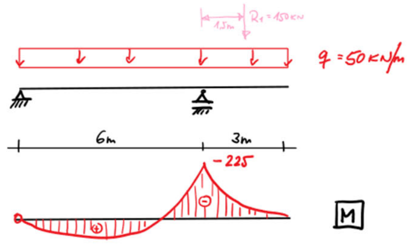


$$\left.\begin{aligned} I_{y,\square} &= \frac{b \cdot h^3}{12} \\ I_{z,\square} &= \frac{b^3 \cdot h}{12} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &h \;\hat{=}\; y\text{-Achse} \\ &b \;\hat{=}\; z\text{-Achse} \end{aligned}$$

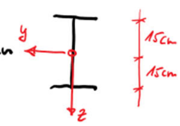
5.10. Normalspannung infolge Biegung und Normalkraft bei symmetrischen Querschnitten

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{N}{A}$$

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{N}{A} \; mit \; W_y = \; I_y/|z_{max}|$$



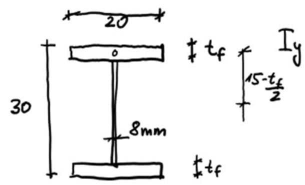
Ges.: I mit max h = 300 mm, max b = 200 mm $\Big\}$ $z_{max} = 15\,cm$



$\sigma_{zul} = f_{y,d} = 21{,}8\,\frac{kN}{cm^2}$

$$W_y \overset{!}{=} \frac{M_y}{\sigma_{zul}} = \frac{225\,kNm}{21{,}8\,\frac{kN}{cm^2}} = \frac{22500\,\cancel{kN}cm}{21{,}8\,\frac{\cancel{kN}}{cm^2}} = 1032\,cm^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} \Rightarrow I_y = W_y \cdot z_{max} = 1032 \cdot 15 = 15480\,cm^4$$



$$I_y = \text{Flansch: } 2 \cdot \left(\cancel{I_{y,flansch}} + 20cm \cdot t_f \cdot \left(15 - \frac{t_f}{2}\right)^2\right) + \frac{(30-2t_f)^3 \cdot 0{,}8}{12}$$

$$t_f = 1{,}5\,cm \Rightarrow I_y = 14112{,}8\,cm^4$$

6. Stahlbeton-Vorbemessung

6.1. Stahlbeton-Vollplatten und Elementdecken

Systemskizze

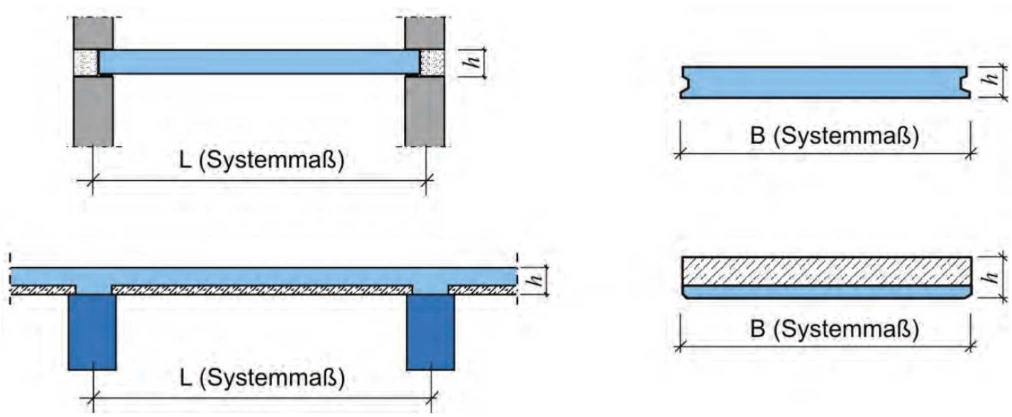


Tabelle 16: Deckendicke h [mm] in Abhängigkeit von den Einwirkungen $g_{k,i} + q_{k,i}$ für Durchlaufsysteme[1)]

Systemmaß L	**Deckendicke h [mm] bei Einwirkungen $g_{k,i} + q_{k,i}$ [kN/m²] für Durchlaufsysteme[1)]**													
[m]	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**	**4,0**	**4,5**	**5,0**	**7,5**	**10,0**	**15,0**	**20,0**	**25,0**
3,0	**120**						**120**				**140**		**160**	
4,0	**140**						**140**				**160**		**180**	
5,0[2)]	**180**										**200**		**220**	
6,0[2)]	**220**										**240**			
7,5[2)]	**240**						**260**				**280**		**300**	

1) Bei einfeldrigen Platten ist die Deckendicke h um ca. 15% zu erhöhen.

2) Bei aufstehenden Trennwänden können zusätzliche Maßnahmen erforderlich sein (z. B. risssichere Trennwände, größere Deckendicke)

Beispiel

Belag und Ausbaulasten $g_{k,2}$ = 1,50 kN/m²

Nutzlasten q_k = 2,00 kN/m²

Lasten $g_{k,i} + q_k$ = 3,50 kN/m²

Systemmaß L = 5,00 m

abgelesen h **= 180 mm**

Bei einfeldrigen Platten h = 200 mm

6.2. Bewehrung

Betonstabstahl B500A (Quelle: Schneider Bautabellen)

Abmessungen und Gewichte

Nenndurchmesser $\varnothing_s$ in mm	6	8	10	12	14	16	20	25	28
Nennquerschnitt A_s in cm²	0,283	0,503	0,785	1,13	1,54	2,01	3,14	4,91	6,16
Nenngewicht G in kg/m	0,222	0,395	0,617	0,888	1,21	1,58	2,47	3,85	4,83

Betonstahlmatten B500A (Quelle: Schneider Bautabellen)

Lagermatten Lieferprogramm
(ab 01.01.2008)

Länge / Breite	Randeinsparung (Längsrichtung)	Matten-bezeichnung	Mattenaufbau in Längsrichtung / Querrichtung: Stab-abstände	Stabdurchmesser Innen-bereich	Stabdurchmesser Rand-bereich	Anzahl der Längsrandstäbe links	Anzahl der Längsrandstäbe rechts	Quer-schnitte längs / quer	Gewicht je Matte	Gewicht je m²
m			mm	mm	mm			cm²/m	kg	kg
6,00 / 2,30	ohne	**Q188 A**	150 150	6,0 6,0				1,88 1,88	41,7	3,02
6,00 / 2,30	ohne	**Q257 A**	150 150	7,0 7,0				2,57 2,57	56,8	4,12
6,00 / 2,30	ohne	**Q335 A**	150 150	8,0 8,0				3,35 3,35	74,3	5,38
6,00 / 2,30	mit	**Q424 A**	150 150	9,0 9,0	7,0	4	4	4,24 4,24	84,4	6,12
6,00 / 2,30	mit	**Q524 A**	150 150	10,0 10,0	7,0	4	4	5,24 5,24	100,9	7,31
6,00 / 2,35	mit	**Q636 A**	100 125	9,0 10,0	7,0	4	4	6,36 6,28	132,0	9,36
6,00 / 2,30	ohne	**R188 A**	150 250	6,0 6,0				1,88 1,13	33,6	2,43
6,00 / 2,30	ohne	**R257 A**	150 250	7,0 6,0				2,57 1,13	41,2	2,99
6,00 / 2,30	ohne	**R335 A**	150 250	8,0 6,0				3,35 1,13	50,2	3,64
6,00 / 2,30	mit	**R424 A**	150 250	9,0 8,0	8,0	2	2	4,24 2,01	67,2	4,87
6,00 / 2,30	mit	**R524 A**	150 250	10,0 8,0	8,0	2	2	5,24 2,01	75,7	5,49

Der Gewichtsermittlung der Lagermatten liegen folgende Überstände zugrunde:

Q188 A bis Q524 A: Überstände längs: 75,0/75,0 mm Überstände quer: 25/25 mm
Q636A: Überstände längs: 62,5/62,5 mm Überstände quer: 25/25 mm
R188A bis R524A: Überstände längs: 125/125 mm Überstände quer: 25/25 mm

6.3. Vorbemessung Stahlbetonträger

① Einwirkendes Moment: M_{sd} bestimmen $= M_g \cdot 1{,}35 + M_q \cdot 1{,}5$
(Eigengewicht; Verkehr, Wind, Schnee)

Sicherheitsbeiwerte Lastseite: $\gamma_G = 1{,}35$ $\quad \gamma_Q = 1{,}5$

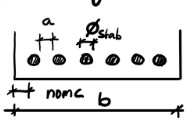
zusätzlich berücksichtigen

② Querschnitt als □ vorgeben: $b = \ldots \quad h = \ldots \quad g_{Träger} = b \cdot h \cdot 25 \frac{kN}{m^3}$

③ Innerer Hebelarm: $z = 0{,}8 \cdot d = 0{,}8 \cdot (h - \text{Betondeckung})$
(Betondeckung wird vorgegeben)

④ Bewehrung auf Zugseite vorgeben

8 mm	10 mm	12 mm	14 mm	16 mm	20 mm	25 mm	28 mm
0,50 cm²	0,79 cm²	1,13 cm²	1,54 cm²	2,01 cm²	3,14 cm²	4,91 cm²	6,16 cm²



mit Mindestabstand: $[\, a > 20\,mm$ oder $a > \varnothing_{Stab} \,]$ überprüfen, wie viele Stäbe hineinpassen

$$n = \frac{(b - 2 \cdot nom\,c)}{2 \cdot \varnothing_{Stab}} \Rightarrow A_s = n \cdot \underbrace{A_{\varnothing Stab}}_{\text{Tabelle}}$$

mit nom c = Betondeckung

⑤ F_{sd} berechnen: $F_{sd} = A_s \cdot f_{yd} = A_s \cdot \frac{50\,kN/cm^2}{1{,}15}$

⑥ $M_{Rd} = F_{sd} \cdot z$

$100\,\% \geq \frac{M_{sd}}{M_{Rd}} \geq 80\,\%$ ✓ → ⑦

$\frac{M_{sd}}{M_{Rd}} < 80\,\%$ unwirtschaftlich → ② Querschnitt verkleinern

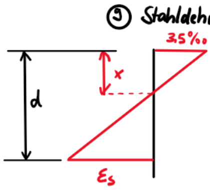
$\frac{M_{sd}}{M_{Rd}} > 100\,\%$ unsicher → ② Querschnitt vergrößern

⑦ Vorgabe Betonfestigkeit f_{ck}

⑧ Betondruckzone berechnen

$f_{cd} = 0{,}85 \cdot \frac{f_{ck}}{1{,}5} \qquad F_{cd} = 0{,}95 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h_b \quad$ mit $F_{cd} \overset{!}{=} F_{sd} \Rightarrow h_b = \frac{F_{sd}}{0{,}95 \cdot f_{cd} \cdot b}$ Höhe der Betondruckzone: $x = \frac{h_b}{0{,}8}$

⑨ Stahldehnung bestimmen



[rechnerisch Strahlensatz, zeichnerisch maßstäblich]

⑨.1 $\boxed{d = h - nom\,c - \frac{1}{2}\varnothing_{Stab}}$

⑨.2 Vorgabe $\varepsilon_c = -3{,}5\,‰$ (Betondruckstauchung)

⑨.3 Dreisatz: $\frac{3{,}5\,‰}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d - x}$

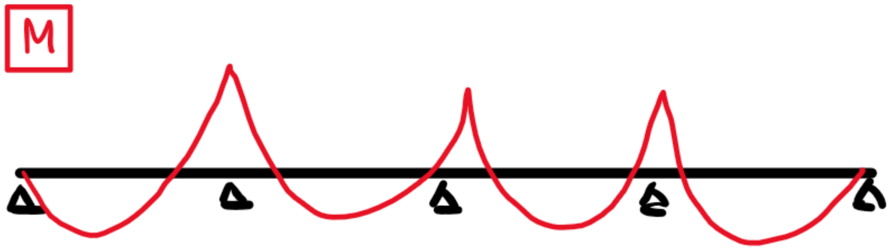
$2{,}18\,‰ \leq \varepsilon_s \leq 25\,‰$ ✓ → ⑩

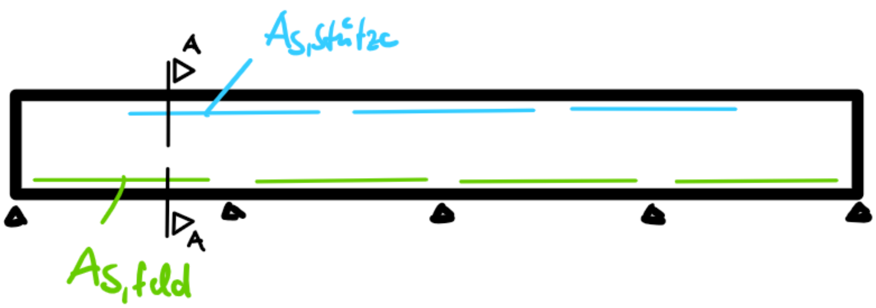
$2{,}18\,‰ > \varepsilon_s$ unwirtschaftlich → ② Querschnitt verkleinern oder → ④ Stahl reduzieren

$\varepsilon_s > 25\,‰$ unsicher → ② Querschnitt vergrößern oder → ④ Stahl erhöhen

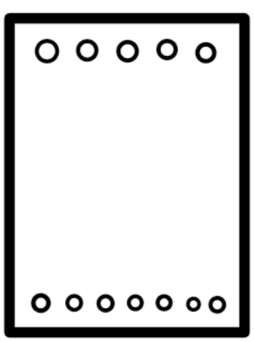
⑩ Innerer Hebelarm:

$z = d - \frac{1}{2} h_b \quad \begin{cases} z \geq 0{,}95 \cdot z_{aus ③} \; ✓ \\ z < 0{,}95 \cdot z_{aus ③} \rightarrow ② \text{ Querschnitt vergrößern} \end{cases}$





SCHNITT A-A (Bewehrungsskizze):



$A_{s,\text{stütze}}$; $n\,\varnothing_{\text{stab}}$, z.B. $5\,\varnothing 28$

$A_{s,\text{feld}}$: $n\,\varnothing_{\text{stab}}$, z.B. $7\,\varnothing 20$

7. Eigene Notizen