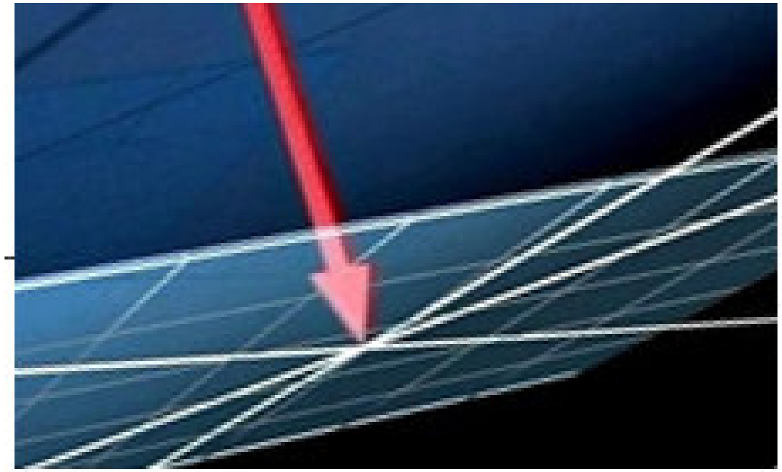


Lineare Algebra

VI. Lineare Algebra

Determinanten

Dr. Peter Lambé

Online rechnen

Determinanten

http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/determinanten.htm
http://matheroboter.de/determinante.php?cat=5

https://rechneronline.de/lineare-algebra/determinanten.php

https://matrixcalc.org/de/

Online üben

…. zufällig gewählte quadratische Matrizen aus den der vorhergehenden Seiten nutzen !

Determinante

Die Determinante

- … ist eine Kennzahl, $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| \in \mathbb{R}$,
- … ist ausschließlich für quadratische Matrizen definiert, die
  die Eigenschaften einer Matrix A ***in einer Zahl*** zusammenfasst.

- Schreibweise

Gegeben ist eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist dann

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

- Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Determinante

Die Determinante

… ist eine Kennzahl, $\det(A) \in \mathbb{R}$, die die Eigenschaften einer quadratischen Matrix A zusammenfasst.

Bevor wir uns überlegen, wie die Determinante berechnet werden kann, vorab ein paar Eigenschaften, die diese Kennzahl erfüllen soll:

$E0$ Für die Nullmatrix $\mathbf{0}_n$ gilt $\det(\mathbf{0}_n) = 0$.

$E1$ Die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$ hat Determinante $= 1$: $\det(\mathbf{1}_n) = 1$

Seien A und B zwei $[n \times n]$ −Matrizen, dann gilt

$E2$ **Multiplikativität** $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

reguläre Matrizen

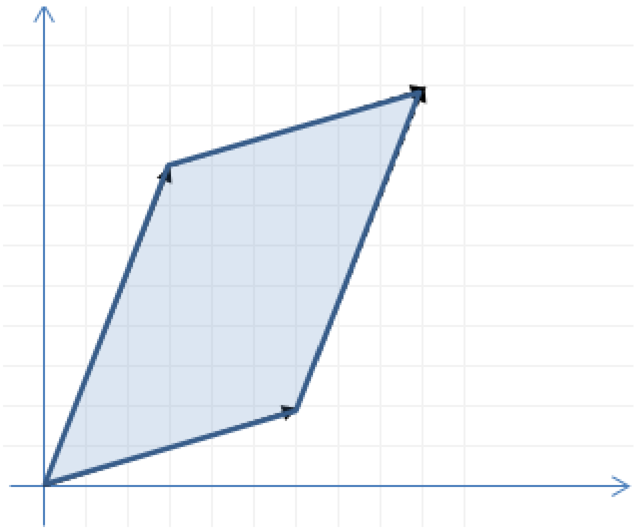
$E3$ $\det(A) \neq 0$ **genau** dann, wenn die Matrix A vollen Rang hat d.h. für alle regulären Matrizen ist $\det(A) \neq 0$.
Für alle anderen ist $\det(A) = 0$. Insbesondere gilt:
Wenn $rang(A) < n$, dann $\det(A) = 0$.

Determinante

Motivation / 2x2 Matrizen

Geometrie: „ *Fläche* “

Betrachten wir die beiden Zeilen einer quadratischen Matrix als Vektoren im kartesischen Koordinatensystems, dann ist die Determinante das Volumen (die Fläche) des von diesen Vektoren auf- gespannten „Parallelogramms“:



Aufgabe D1:

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Lösung: $F = 6 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 36$

$$F = Hauptdiagonale - Nebendiagonale$$

Achtung: für $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ erhalten wir $3 \cdot 2 - 6 \cdot 7 = -36.$

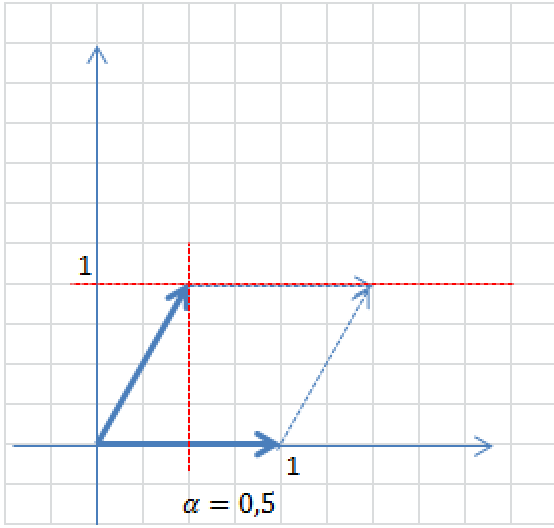
Determinante

Motivation / 2x2 Matrizen

Geometrie: „ *Fläche* “

Aufgabe D2:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Parallelogramms“, das von den beiden Vektoren $\vec{a} = \binom{1}{0}$ und $\vec{b} = \binom{0{,}5}{1}$.



.

Lösung:

Die 2 Spalten der Matrix $e_{12} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt zu berechnen ist:

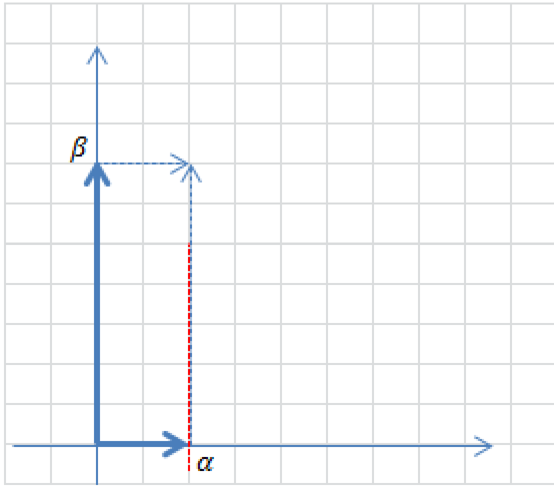
Durch „Scherung“ lässt sich der Flächeninhalt leicht ablesen

$$Fläche\ (e_{12}) = 1 \cdot 1 = 1$$

Determinante

Motivation / 2x2 Matrizen

Geometrie: *„ Fläche “*



Noch ein Bespiel: **Diagonalmatrix**

Die aufgespannte Fläche ist ein Rechteck.

Der Flächeninhalt ist das Produkt der Kantenlängen

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad Fläche(D) = |\alpha \cdot \beta|$$

Allgemein

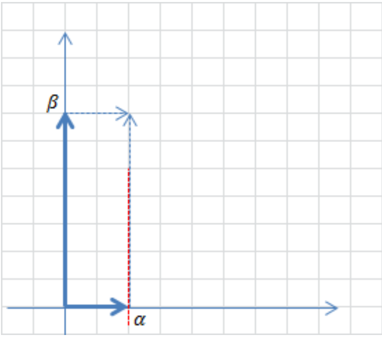
$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}, \qquad Volumen(D) = |\, d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n \,|$$

Determinante

Motivation / 2x2 Matrizen

Geometrie: „ $Fläche$ “

Die Flächeninhaltsfunktion erfüllt die Anforderungen an die Determinante



E0 ☑ $\quad Fläche\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

E1 ☑ $\quad Fläche\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

E3 ☑ $\quad Fläche$ ist genau dann gleich Null,

wenn die beiden Vektoren linear Abhängigkeit sind.

E2 ☑ Flächenmultiplikation ???

Dazu muss man die linke Matrix A in dem Produkt $A \cdot B$ als lineare Abbildung $\phi_A : \vec{x} \to \phi_A(\vec{x}) := A\,\vec{x}$ begreifen, die auf den Spaltenvektoren $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$ von links operiert:

$$\phi_A(B) = \left(\phi_A(\overrightarrow{b_1}), \phi_A(\overrightarrow{b_2})\right) = (A\overrightarrow{b_1}, A\overrightarrow{b_2}) = A \cdot B$$

$$\det(\phi_A(B)) = \det\left((A\overrightarrow{b_1}, A\overrightarrow{b_2})\right) = \det(A \cdot B)$$

Determinante

E2 ☑ Multiplikativität – Beispiel $\det(AB) = \det(B)$, wenn $\det(A) = 1$:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, wir wissen $\det(A) = 1$

Ferner seien $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ die Spaltenvektoren, dann ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und $\det(AB) = \begin{pmatrix} 16 & 38 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 16 \cdot 7 - 38 \cdot 2 = 36$

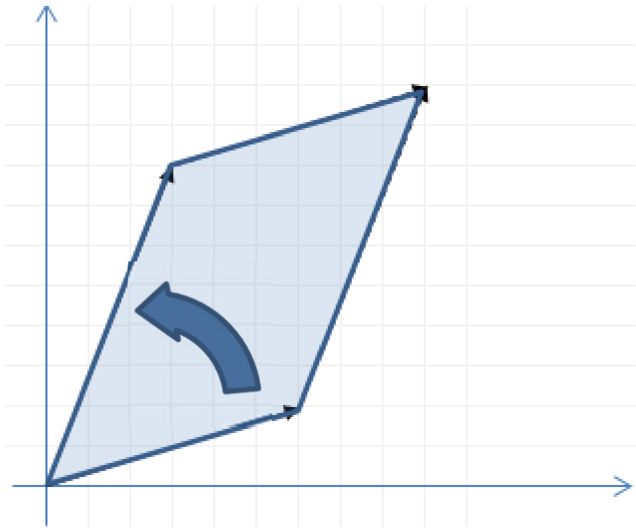
Recall: $\det(B) = 6 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 36$

Determinante

Motivation / 2x2 Matrizen

Geometrie: „ *Fläche* “

Betrachten wir die beiden Zeilen einer quadratischen Matrix als Vektoren im kartesischen Koordinatensystems, dann gilt:



- Der ***Betrag der Determinante*** ist der Flächeninhalt des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

- Das ***Vorzeichen der Determinante*** ergibt sich aus der Reihenfolge der Vektoren:
  - \+ gegen den Uhrzeigersinn
  - \- im Uhrzeigersinn

Determinante

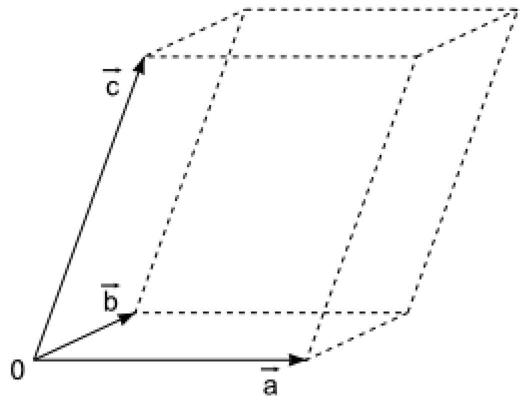
Motivation/Allgemeinbildung

Geometrie: „Volumen“

Betrachten wir die Spalten einer quadratischen Matrix

als Vektoren (Spaltenvektoren),

dann ist der Betrag der Determinante das Volumen des von den Zeilenvektoren aufgespannten „Schiefwürfels“.



$$Volumen = |\,Determinante\,|$$

$$Determinate = \pm Volumen$$

Insbesondere ist die Determinante einer Diagonalmatrix das Produkt der Diagonalelemente:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}, \qquad det(D) = d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n$$

Berechnung der Determinante

Möglichkeit I **Pivotieren** – Beispiel: 2×2 Matrizen

Betrachten wir die allgemeine 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ist $a \neq 0$, dann wählen wir a als Pivotelement und pivotieren die Matrix zu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \dfrac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

Ist $d^{NEU} := d - \frac{bc}{a} \neq 0$, dann können wir d^{NEU} als Pivotelement wählen und

pivotieren die Matrix zu $$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Determinante

Möglichkeit I **Pivotieren** – Beispiel: 2×2 Matrizen

Die Determinante von A ist dann:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \left(d - \frac{bc}{a}\right) = ad - bc$$

Daraus ergibt sich die $2 \times 2 - Regel$ für die Determinante einer [2x2]- Matrix

„Hauptdiagonale minus Nebendiagonale“

Berechnung der Determinante

Möglichkeit II: Laplace'scher Entwicklungssatz

https://www.youtube.com/watch?v=EsQI8PEsltU

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = +2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +2 * 6 - 1 * 5$$

Berechnung der Determinante

Möglichkeit III: Regel von Sarrus für 3×3:

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = +2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Nach Ausmultiplizieren & Umsortieren

$$|A| = 2 \cdot \big(4 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1)\big) - 1 \cdot \big(1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)\big) + 0 \cdot (1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4)$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 3 \cdot 4$$

Erhält man 6 Summanden

$$|A| = 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 3 \cdot 4$$

Determinante

Berechnung der Determinante mit Casio fx-991DE PLUS

- Bis 3×3:
  - Casio Taschenrechner

casio fx-991es plus
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ statt $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{6}$

Schritt-für-Schritt-Anleitung

1. Determinante einspeichern

a) Auswahl der Matrix A $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{1}$

b) Bestimmung der Dimension $\boxed{1}$ (3x3) oder $\boxed{5}$ (2x2)

c) Zahlen eingeben z.B $\boxed{-}$ $\boxed{4}$ und mit $\boxed{=}$ bestätigen

d) Sobald die Determinante eingegeben ist, mit $\boxed{\text{AC}}$ bestätigen

2. Rechnung formulieren

a) Determinante von... $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ ..Matrix A.. $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{)}$

b) Ausgabe des Ergebnisses mit $\boxed{=}$

Determinante

Anwendungen

✓ Volumenberechnung

○ Inverse einer quadratischen Matrix

Die Komponenten der inversen Matrix berechnen sich folgendermaßen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \\ x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \\ x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} & x_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \end{pmatrix}$$

○ LGS lösen mit Hilfe der Cramer'schen Regel

- Beispiel 3x3-Matrizen:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{6} = 1;$$

Determinante

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

$$e_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$