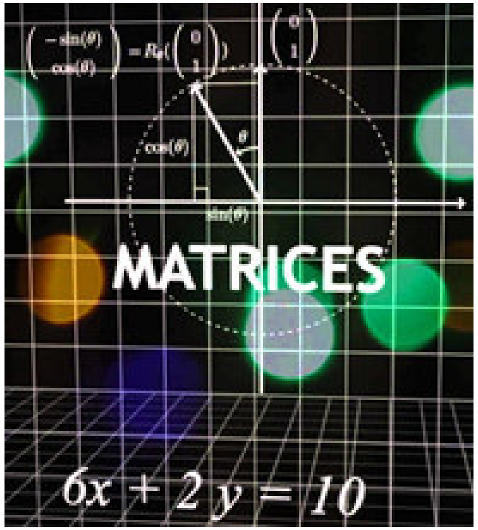


VI. Lineare Algebra

Matrixgleichungen & LGS lösen - Anwendungen

Dr. Peter Lambé

Matrixgleichungen

Weitere Aufgabenstellungen, die zu Matrixgleichungen und LGS führen

✓ Produktionsmatrizen: Löse $\vec{\mathbf{k}} = \mathbf{M} \cdot \vec{\mathbf{x}}$
Bestimme Obergrenzen für die Einkaufspreise zu vorgegebenen Stückkosten $\vec{\mathbf{k}}$ und vorgegebener Produktionsmatrix $\mathbf{M}$

1. Prüfung auf ***Lineare (Un-) Abhängigkeit*** einer Menge von Vektoren

2. Berechnung des ***Ranges einer Matrix*** $\boldsymbol{rang(A)}$

3. Übergangsmatrizen: ***stationäre Zustände*** $\boldsymbol{A \cdot \vec{x} = \vec{x}}$

4. ***Eigenwertgleichungen*** $\mathrm{A} \cdot \vec{\mathrm{x}} = \lambda \cdot \vec{\mathrm{x}}$

5. ***Inverse Matrix*** bestimmen

6. Weitere Anwendungen – ***klassische Textaufgaben***

1. Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Beispiel: $\vec{r}_1 = (2 \quad 3 \quad 5 \quad 0)$, $\vec{r}_2 = (1 \quad 3 \quad 4 \quad 1)$ und $\vec{r}_3 = (3 \quad 6 \quad 9 \quad 1)$.
Wenn man genau hinschaut, kann man erkennen, dass der dritte Vektor genau die Summe der anderen beiden ist.

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

Allgemein heißt eine Menge von Vektoren ***linear abhängig***, wenn sich (mindestens) einer als Summe von Vielfachen der anderen (***Linearkombination***) schreiben lässt.

M.a.W. Sei $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\}$ eine Menge von Vektoren, dann gibt es ein k zwischen 1 und n, sodass gilt

$$\vec{r}_k = \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \vec{r}_{k-1} + \lambda_{k+1} \vec{r}_{k+1} + \cdots + \lambda_n \vec{r}_n$$

Ist das nicht der Fall, heißen die Vektoren ***linear unabhängig.***

1. Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Aufgabe 4.5 - Linearkombination, lineare Abhängigkeit

Gegeben seien die vier Vektoren

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ als <u>Linearkombination</u> der ersten drei Vektoren dar.

(b) Bestimmen Sie alle Paare linear unabhängiger Vektoren.

(c) Sind die letzten drei Vektoren linear unabhängig ?

Lösung (a):

Gesucht sind drei Parameter x, y, z, die die Matrixgleichung (Vektorgleichung)

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lösen.

1. Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Verschiedene Schreibweisen:

Betrachten wir die Matrixgleichung $(*)$ genauer:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Wie sieht das LGS aus ?

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7 & = & 1x & + & (-2)y & + & 4z \\ 4 & = & 2x & + & 1y & + & 3z \\ -3 & = & 1x & + & 3y & + & (-1)z \end{array}$$

Das LGS entsteht aus der Matrixgleichung durch zeilenweises Ausmultiplizieren und Addieren. LGS: Jede einzelne Komponente wird getrennt betrachtet.

- Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ erhalten wir zudem $\vec{s}_4 = M \cdot \vec{x}$

1. Lineare Abhängigkeit von Vektoren

SATZ Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ sind genau dann ***linear abhängig***, wenn sie echte Vielfache voneinander sind. D.h. es gibt einen Faktor $\lambda \neq 0$ ungleich Null, so dass

$$\vec{x} = \lambda \vec{y}$$

z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \vec{x}$

SATZ Drei oder mehr Vektoren sind ***linear abhängig***, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{r}_n$$

in der mindestens einer der Koeffizienten $\lambda_k \neq 0$ ungleich Null ist.

1. Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Aufgabe 4.5 - Linearkombination, lineare Abhängigkeit

Gegeben seien die vier Vektoren

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Stellen Sie den Vektor $\vec{s}_4$ als Linearkombination der ersten drei Vektoren dar.

(b) Bestimmen Sie alle Paare linear unabhängiger Vektoren

(c) Sind die letzten drei Vektoren linear unabhängig ?

Lösung (b):

Aufgrund des vorletzten Satzes müssen wir nur checken, ob die Vektoren paarweise Vielfache voneinander sind:

Annahme: Sei $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, dann ist $4\lambda = -2 \;\; \boldsymbol{und} \;\; 3\lambda = 1.$

Widerspruch ☹.

In dieser Weise muss mit allen Paaren verfahren werden.

1. Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Aufgabe 4.5 - Linearkombination, lineare Abhängigkeit

Gegeben seien die vier Vektoren

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Stellen Sie den Vektor $\vec{s}_4$ als Linearkombination der ersten drei Vektoren dar.

(b) Bestimmen Sie alle Paare linear unabhängiger Vektoren

(c) Sind die letzten drei Vektoren linear unabhängig ?

Lösung (c):

Aufgrund des letzten Satzes müssen wir jetzt ein LGS der folgenden Form lösen:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit mindestens einem} \quad \lambda_k \neq 0.$$

2. Rang einer Matrix

Definition: Unter dem ‚Rang einer Matrix' versteht man die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren.

Aufgabe 4.6 - Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Die 3. Spalte ist ein Vielfaches der 1. Spalte.
- Daher sind die drei Spalten linear abhängig.
- Die ersten beiden Spalten sind jedoch keine Vielfachen voneinander und somit linear unabhängig, weshalb der Rang dieser Matrix gleich 2 ist:

$$rang(A) = 2$$

2. Rang einer Matrix

REMEMBER: Unter dem ‚Rang einer Matrix' versteht man die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren.

Aufgabe 4.6 - Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Alternative Lösung: um zu zeigen, dass Rang(A) < 3 ist brauchen wir eine nicht-triviale Lösung des Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{LGS lösen}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Darüber hinaus sind die ersten beiden Spalten keine Vielfachen voneinander, also gilt:

$$rang(A) = 2.$$

2. Rang einer Matrix

SATZ $rang(A) = rang(A^T)$

http://www.informatikseite.de/linearealgebra/lineare_algebra_grundlagennode79.php

Aufgabe 4.7 - Rang der transponierten Matrix

Bestimmen Sie den Rang der Matrix A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung: zur formalen Lösung brauchen wir eine nicht-triviale Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{LGS lösen}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Darüber hinaus sind die ersten beiden Spalten keine Vielfachen voneinander, also gilt:

$$rang(A^T) = 2 = rang(A).$$

.

2. Rang einer Matrix

weitere Eigenschaften

- Der Rang einer $[m \times n] -$ Matrix A ist stets $\leq \min(m, n)$, also stets kleiner gleich der Anzahl der Zeilen **<u>und</u>** kleiner gleich der Anzahl der Spalten
- Für quadratische $[n \times n] -$ Diagonalmatrizen D und obere und untere quadratische $[n \times n] -$ Dreiecksmatrizen O, U mit Diagonalelementen ungleich Null ist stets

$$rang(U) = n, \qquad rang(D) = n, \qquad rang(O) = n$$

  Man sagt diese Matrizen haben $vollen\ Rang$.
- Der Rang einer $[m \times n] -$ Matrix A ändert sich nicht
  - bei Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar, $[n \times n] -$ Diagonalmatrix
  - bei Multiplikation von rechts mit einer oberen Dreiecksmatrix
  - bei Vertauschung zweier Spalten

Für Produkte gilt allgemein:

SATZ $rang(AB) \leq rang(A)$ **<u>und</u>** $rang(AB) \leq rang(B)$

Lineare Abhängigkeit, Rang einer Matrix - Anwendungen

Betrachten wir die folgende [3x4]-Produktionsmatrix für drei Produkte aus vier Rohstoffen:

$$P \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

aufgebaut aus den drei Rezepten

$\vec{r}_1 = (2 \quad 3 \quad 5 \quad 0)$, $\vec{r}_2 = (1 \quad 3 \quad 4 \quad 1)$ und $\vec{r}_3 = (3 \quad 6 \quad 9 \quad 1)$.

Wenn man genau hinschaut, kann man erkennen, dass der dritte Vektor genau die Summe der anderen beiden ist.

Diese Situation könnte Anlass für eine Restrukturierung der Produktionsprozesse sein.

Anstatt alle drei Produkte parallel herzustellen, könnte man sich auf die ersten beiden konzentrieren und in einem kleineren, nachgelagerten Schritt das dritte Produkt einfach durch das Zusammenführen der beiden ersten Produkte zu erstellen:

$$P \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Übergangsmatrizen

Zustandsvektoren & Zustandsraum - Eigenschaften

Die Zustände beschreiben möglichen Verteilungen einer festvorgegebenen Menge von Gegenständen als Spaltenvektor.

- Sie werden ***Zustandsvektoren*** genannt.
- Die Menge aller möglichen Zustände heißt ***Zustandsraum***.
- Er besteht aus allen Vektoren deren Spaltensumme konstant gleich der Gesamtmenge ist.

Beispiel:

70 Fahrräder verteilen sich auf zwei Filialen:

10 Fahrräder in Filiale 1 und 60 Fahrräder in Filiale 2: $z = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \end{pmatrix}$

Weitere Möglichkeiten: $z = \begin{pmatrix} 14 \\ 56 \end{pmatrix}$ oder $z = \begin{pmatrix} 49 \\ 21 \end{pmatrix}$

Die Zustände können auch prozentual betrachtet werden

$$z = \begin{pmatrix} 20\% \\ 80\% \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad z = \begin{pmatrix} 70\% \\ 30\% \end{pmatrix}$$

3. Übergangsmatrizen

Übergangsmatrizen - Eigenschaften

Sei $A = \left(a_{ij}\right)$ eine Übergangsmatrix, die zunächst einen Anfangszustand $\vec{z}_0$ in den ersten Folgezustand $\vec{z}_1 = A \cdot \vec{z}_0$ überführt und anschließend alle weiteren Folgezustände durch die fortgesetzte Anwendung von A generiert:

$$\vec{z}_{i+1} = A \cdot \vec{z}_i$$

1. Die Matrix ist quadratisch

$$[n \times 1] = [n \times n] \cdot [n \times 1]$$

2. Alle Einträge liegen zwischen Null und Eins
3. Die Summe der Spalteneinträge beträgt genau 1 bzw. 100%.

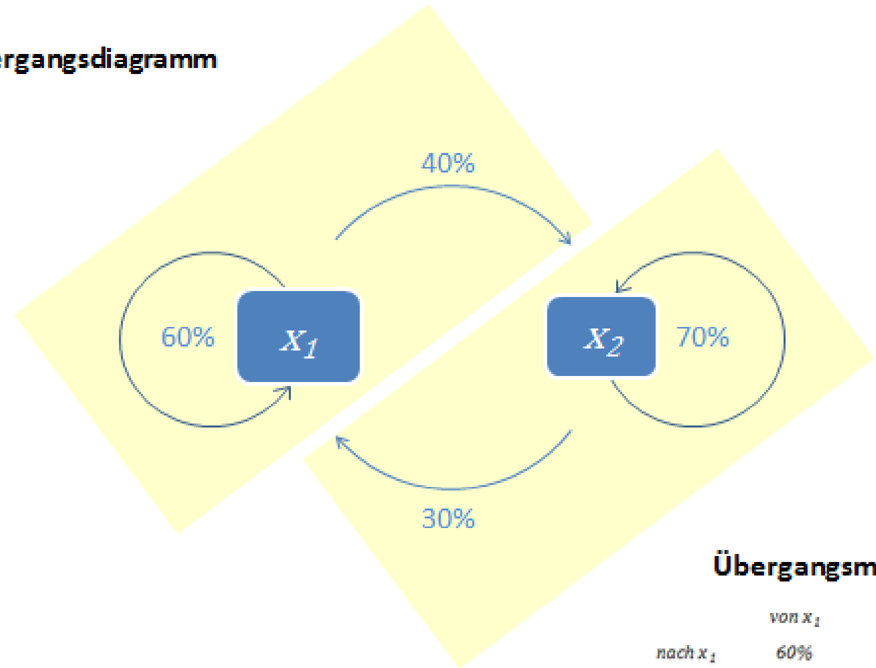
3. Übergangsmatrizen

Übergangsmatrizen - Übergangsdiagramme

Betrachten wir die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Dazu kann man eine Übergangsdiagramm anfertigen:

Übergangsdiagramm

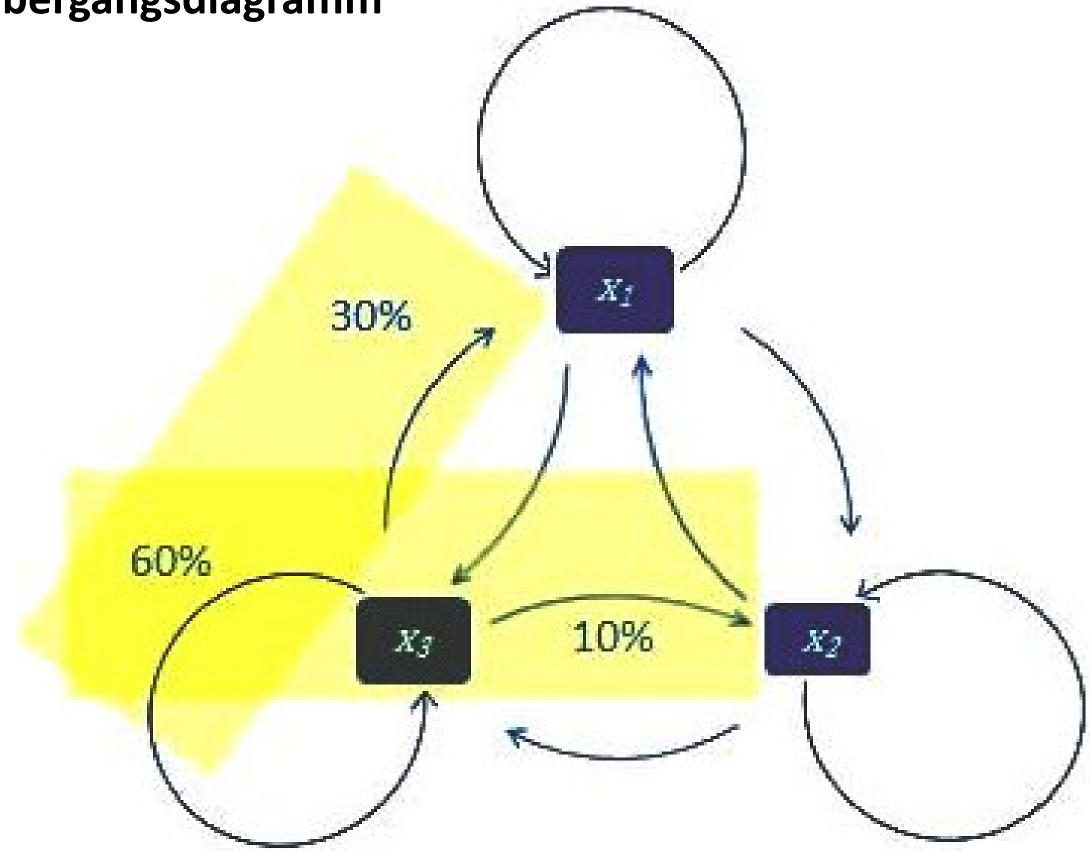


Übergangsmatrix

	von x_1	von x_2
nach x_1	60%	30%
nach x_2	40%	70%

Spaltensumme = 100%

Übergangsdiagramm



Übergangsmatrix

	von x_1	von x_2	von x_3
nach x_1	*	*	30%
nach x_2	*	*	10%
nach x_3	*	*	60%

Spaltensumme = 100%

3. Übergangsmatrizen

Aufgabe 4.8 = Aufgabe 10 (a) - Stationäre Zustände

Betrachten wir die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Gefragt war nach einem stationären Zustand, d.h. nach einer Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, die sich beim Übergang nicht verändert. Eine solche Lösung muss die Matrixgleichung

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad bzw. \quad (A - \mathbf{1_{2\times2}}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

erfüllen.

Auch diese Fragestellung führt wieder zu einem LGS:

$$\begin{array}{llll} I & (0{,}6-1)x_1 & +\,0{,}3x_2 & = 0 \\ II & 0{,}4x_1 & +\,(0{,}7-1)x_2 & = 0 \\ III & x_1 & +\,x_2 & = 1 \end{array}$$

Die ersten beiden Zeilen sind Vielfache voneinander, d.h. wir können uns auf eine der beiden Gleichungen beschränken und diese nach x_2 auflösen:

$$\begin{array}{llll} II & 0{,}4x_1 & -\,0{,}3x_2 & = 0 \\ II & 0{,}4x_1 & = 0{,}3x_2 & \end{array}$$

3. Übergangsmatrizen

Betrachten wir die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Gefragt war nach einem stationären Zustand, d.h. nach einer Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, die sich beim Übergang nicht verändert. Eine solche Lösung muss die Matrixgleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ erfüllen.

Fortsetzung:

Aus der letzten Gleichung $\frac{0{,}4}{0{,}3} x_1 = x_2$ folgt zusammen mit der

Ausgangsbedingung $x_1 + x_2 = 100\% \quad [= 70]$

$$\frac{7}{3} \cdot x_1 = 100\% \qquad [= 70]$$

$$x_1 = 42{,}857142857\% \qquad [= 30]$$

$$x_2 = 57{,}142857142\% \qquad [= 40]$$

Antwort: 30 der 70 Räder sollten sich am Morgen in Filiale 1 befinden und 40 Räder in Filiale 2, dann würde gemäß Übergangsmatrix am nächsten Morgen die selbe Anzahl von Rädern in den Filialen stehen.

3. Übergangsmatrizen

Betrachten wir die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Gefragt war nach einem stationären Zustand, d.h. nach einer Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, die sich beim Übergang nicht verändert. Eine solche Lösung muss die Matrixgleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ erfüllen.

1. Übergangsmatrix

	0,6	0,3	
	0,4	0,7	

2. Erweiterte Fixpunkt-Matrix

	1	1	1
	-0,4	0,3	0
	0,4	-0,3	0

3. Pivotieren

1	1	1
-0,4	0,3	0
1	1	1
0	0,7	0,4
1	0	0,43
0	0,7	0,40
1	0	0,43
0	1	0,57

4. Ergebnis

Genau eine Lösung:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}43 \\ 0{,}57 \end{pmatrix} \right\}$$

5. Antwort: Gesucht war die Anzahl der Räder also muss der Lösungsvektor mit 70 multipliziert werden.
30 der 70 Räder sollten sich am Morgen in Filiale 1 befinden und 40 Räder in Filiale 2, dann würde gemäß Übergangsmatrix am nächsten Morgen die selbe Anzahl von Rädern in den Filialen stehen.

4. Eigenwertgleichung

Sei A eine quadratische $[n \times n]$ − Matrix
Gesucht Lösungen der Gleichung für ein $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad bzw. \quad (A - \lambda \cdot \mathbf{1}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

- Die Gleichung heißt ***<u>Eigenwertgleichung</u>*** der Matrix A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$

- Fragen:
  - Welche $\lambda \in \mathbb{R}$ kommen in Frage ?
  - Wie viele gibt es ?
  - Was bedeutet $\lambda = 0$?

- Beispiele
  - Jede Übergangsmatrix hat einen Eigenwert $\lambda = 1$?
  - Permutationsmatrizen haben keine Eigenwerte ?
  - Diagonalmatrizen haben n Eigenwerte ?
  - Obere/untere Dreiecksmatrizen haben n Eigenwerte

Aufgabe 4.9 Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Bestimmung der Inversen Matrix

Aufgabe 4.11

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

-2	-1	2	1	0	0
0	1	6	0	1	0
-4	-4	-7	0	0	1

-2	-1	2	1	0	0
0	1	6	0	1	0
0	-2	-11	-2	0	1

-2	0	8	1	1	0
0	1	6	0	1	0
0	0	1	-2	2	1

-2	0	0	17	-15	-8
0	1	0	12	-11	-6
0	0	1	-2	2	1

1	0	0	-8,5	7,5	4
0	1	0	12	-11	-6
0	0	1	-2	2	1

Aufgabe 4.12

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A

$$\det(A) = \det(D) = -2$$

Übungsaufgaben: INTERNET: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/inversematrix.htm

6. Weitere Anwendungen

Aufgabe 4.10 - Vermischte Aufgabe - Rendite + LGS

Ein Händler kauft insgesamt 300 Artikel $A, B\ und\ C$ und gibt dafür 2.000€ aus. $A\ und\ B$ kosten im Einkauf je 5€, C kostet $10€$.

Mit dem Verkauf der Artikel erzielt er mit A eine Rendite von 60%, mit B sogar 80%, aber mit C nur 50%.

Durch den kompletten Verkauf wird der Händler insgesamt 3.250€ einnehmen.

(a) Stellen Sie das LGS für die unbekannten Anzahlen der Artikel $A, B\ und\ C$ auf

(b) Ermitteln Sie $A, B\ und\ C$ mit Hilfe des LGS

(c) Berechnen sie die Gesamtrendite

Lösung (a)

Artikel: $\boldsymbol{A + B + C = 300}$

Einkaufspreise: $\boldsymbol{5A + 5B + 10C = 2000}$

Verkaufspreise: $\boldsymbol{8A + 9B + 15C = 3250}$

6. Weitere Anwendungen

Aufgabe 4.10 - Vermischte Aufgabe - Rendite + LGS

Ein Händler kauft insgesamt 300 Artikel $A, B \text{ und } C$ und gibt dafür 2.000€ aus. $A \text{ und } B$ kosten im Einkauf je 5€, C kostet 10€.

Mit dem Verkauf der Artikel erzielt er mit A eine Rendite von 60%, mit B sogar 80%, aber mit C nur 50%.

Durch den kompletten Verkauf wird der Händler insgesamt 3.250€ einnehmen.

(b) Ermitteln Sie $A, B \text{ und } C$ mit Hilfe des LGS

Lösen mit dem Gauß-Bareiss-Verfahren

Wir bringen die erweiterte Systemmatrix in die Treppenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 5 & 5 & 10 & 2000 \\ 8 & 9 & 15 & 3250 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{a_{1,1}\times a_{i,j}-a_{i,1}\times a_{1,j}}{p_0}\to a_{i,j}]{\text{Pivotelement: } p_1=a_{11}=1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \\ 0 & 1 & 7 & 850 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 7 & 850 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{a_{2,2}\times a_{i,j}-a_{i,2}\times a_{2,j}}{p_2}\to a_{i,j}]{\text{Pivotelement: } p_3=a_{22}=1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & -550 \\ 0 & 1 & 7 & 850 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{a_{3,3}\times a_{i,j}-a_{i,3}\times a_{3,j}}{p_3}\to a_{i,j}]{\text{Pivotelement: } p_4=a_{33}=5} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 5 & 0 & 750 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 5\times x_1 = 250 \\ 5\times x_2 = 750 \quad (1) \\ 5\times x_3 = 500 \end{cases}$$

6. Weitere Anwendungen

Aufgabe 4.10 - Vermischte Aufgabe - Rendite + LGS

Ein Händler kauft insgesamt 300 Artikel $A, B\ und\ C$ und gibt dafür 2.000€ aus.
$A\ und\ B$ kosten im Einkauf je 5€, C kostet 10€.

Mit dem Verkauf der Artikel erzielt er mit A eine Rendite von 60%, mit B sogar 80%, aber mit C nur 50%.

Durch den kompletten Verkauf wird der Händler insgesamt 3.250€ einnehmen.

1	1	1	300
5	5	10	2000
8	9	15	3250

1	1	1	300
0	0	5	500
0	1	7	850

1	0	-6	-550
0	1	7	850
0	0	5	500

1	0	0	50
0	1	0	150
0	0	5	500

1	0	0	50
0	1	0	150
0	0	1	100

(b) Ermitteln Sie $A, B\ und\ C$ mit Hilfe des LGS

(c) Berechnen sie die Gesamtrendite

$$\frac{Ertrag - Aufwand}{Aufwand} = \frac{3250 - 2000}{2000} = \frac{5}{8} = 62{,}5\%$$

Matrixgleichungen und LGS

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit