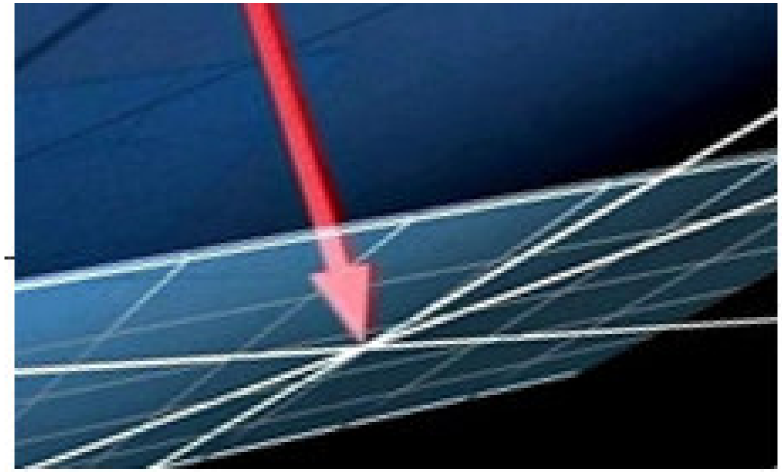


VI. Lineare Algebra
Vektoren & Matrizen - Anwendungen

Dr. Peter Lambé

Anwendungen

✓ Preislisten
✓ Rezepte = Zutatenvektoren

1. **Produktionsmatrizen**
   (KLAUSUR relevant)

2. Auszahlungs- & Wahrscheinlichkeitsvektoren

3. **Prozessmatrizen**
   (KLAUSUR relevant)
4. **Übergangsmatrizen**
   (KLAUSUR relevant)

5. **Netzpläne** = Anzahlen von möglichen Verbindungen
   (KLAUSUR relevant)

6. „Gefangenenproblem“

   – Das Strategiepaar **nicht gestehen** ist für Spieler 1 und Spieler 2 eigentlich das günstigste Gleichgewicht. Da sich jedoch kein Spieler auf die Zusagen des anderen verlassen kann und er eventuell durch ein Geständnis des anderen schlechter dastehen könnte und der andere besser, wird keiner der Beiden die Strategie nicht gestehen wählen.
   – Das Strategiepaar **gestehen** für Spieler 1 und Spieler 2 ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, da dann beide Spieler den gleichen Nutzen haben, außerdem hat kein Spieler einen Anlass eine andere Strategie zu wählen da er sonst eventuell schlechter stehen würde als der andere Spieler.

		Spieler 2	
		gestehen	nicht gestehen
Spieler 1	gestehen	10,00 10,00	0,25 20,00
	nicht gestehen	20,00 0,25	0,50 0,50

1. Produktionsmatrix

Wir betrachten jetzt ein erstes wichtiges Anwendungsbeispiel „Produktionsmatrizen“

Ausgangsvektor $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{R}}$

Liste messbarer Kennzahlen der einzelnen Rohmaterialien
z.B. Kosten je kg, (Kalorien je kg, Gewicht in kg etc.)

Produktionsmatrix $\boldsymbol{M}$

… besteht zeilenweise aus den ***Rezepten*** der einzelnen Produkte

Ergebnisvektor $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{E}}$

Enthält als Summe die Kosten (Kalorien, Gewichte) der ***Endprodukte***

Kosten der Endprodukte:

$$\boldsymbol{M} \cdot \vec{p}_R = \vec{p}_E$$

MERKREGEL: Eigenschaften z.B. Preise $\vec{p}_R$ von Rechts

1. Produktionsmatrix – anders herum

Die Produktionsmatrix kann man auch dazu benutzen um auszurechnen, wie viele Rohstoffe benötigt werden um eine unterschiedliche Kombination von Endprodukten herzustellen.

- **Beispiel**:
  Rohstoffe für den Teig von 24 Rosinenbrötchen **<u>und</u>** 6 Pizzen

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}06 & 0{,}06 & 0{,}007 & 0{,}035 & 0{,}2 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}007 & 0{,}021 & 0 & 0 & 0{,}08 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Vorüberlegung: Was wir rechnen müssten, wenn wir je **<u>eine</u>** Pizza und **<u>ein</u>** Set von 8 Rosinenbrötchen herstellen wollten ?

$$(\,1\,;\,1\,)\cdot \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}06 & 0{,}06 & 0{,}014 & 0{,}056 & 0{,}2 & 1 & 0{,}08 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

1. Produktionsmatrix – anders herum

- **Beispiel**:
  Rohstoffe für den Teig von 24 Rosinenbrötchen **<u>und</u>** 6 Pizzen

  Dazu bestimmen wir zuerst den Anforderungsvektor als Zeilenvektor $\vec{a} \coloneqq (3\,,6)$ und multiplizieren ihn von links mit der Matrix

$$\boldsymbol{M} \coloneqq \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}06 & 0{,}06 & 0{,}007 & 0{,}035 & 0{,}2 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}007 & 0{,}021 & 0 & 0 & 0{,}08 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 4{,}5 & 0{,}18 & 0{,}18 & 0{,}063 & 0{,}231 & 0{,}6 & 3 & 0{,}48 & 1{,}50 \end{pmatrix}$$

1. Produktionsmatrix – anders herum

<u>Ausgangsvektor $\vec{a}$ (Zeilenvektor)</u>
Angeforderte Menge von Endprodukten

<u>Produktionsmatrix $\boldsymbol{M}$</u>
besteht zeilenweise aus den Rezepten der einzelnen Produkte

<u>Ergebnisvektor $\vec{b}$ (Zeilenvektor)</u>
Enthält die benötigten Mengen der verschiedenen Rohstoffe (Rohstoffbedarf).

Rohstoffbedarf: $\vec{a} \cdot \boldsymbol{M} = \vec{b}$

MERKREGEL: Material $\vec{a}$ von Links

Produktionsmatrix

MERKREGEL:

Rezepte in den Zeilen $\Longrightarrow$

- Eigenschaften von Rechts $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{y}$
- Material von Links $\vec{a} \cdot \boldsymbol{M} = \vec{b}$

- Gesamtkosten: $\vec{b} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot \vec{y}$

Wie schreibt man das am besten auf ?

1. Produktionsmatrix

Rechts – Links – Kombination

	Preise
R1	1,70 €
R2	1,30 €
R3	0,60 €

	R1	R2	R3	
Z1	2	1	2	5,90 €
Z2	1	3	1	6,20 €
Z3	0	3	1	4,50 €

	Z1	Z2	Z3				
E1	2	1	4	5	17	9	36,00 €

1. Produktionsmatrix

MERKREGEL:

Rezepte in den Zeilen $\Longrightarrow$ Preise von Rechts --- Material von Links

____

Hinweis für Aufgaben: In einer Aufgabenstellung könnte folgende Tabelle auftauchen:

Rohstoff	**ME der Rohstoffe je Endprodukt**		
	E_1	E_2	E_3
R_1	2	1	0
R_2	1	3	3
R_3	2	1	1

Was ist zu tun? - Die Rezepte müssen richtig abgelesen und in die Produktionsmatrix eingegeben werden !!!

1. Produktionsmatrix - Beispiel

zweistufig & rechts-links

Aufgabe:

Ein Betrieb stellt aus 3 Rohstoffen täglich 4 Endprodukte her. Im ersten Schritt werden dabei drei Zwischenprodukte hergestellt, aus denen im zweiten Schritt die vier Endprodukte erzeugt werden.

Der Materialverbrauch kann den folgenden Tabellen entnommen werden:

	R1	R2	R3
Z1	2	1	2
Z2	1	3	1
Z3	0	3	1

	Z1	Z2	Z3
E1	2	1	4
E2	0	2	2
E3	3	5	0
E4	4	0	3

(a) Bestimmen Sie den Rohstoffverbrauch für eine Tagesproduktion von

E1	E2	E3	E4
100	50	80	60

(b) Welche Gesamtkosten pro Tag entstehen dem Betrieb aus dem Materialverbrauch, wenn die Preise der Rohstoffe der folgenden Preisliste entnommen werden?

Preisliste	
R1	1,70 €
R2	1,30 €
R3	0,60 €

1. Produktionsmatrix - Beispiel

zweistufig & rechts-links

$$P = P_2 \cdot P_1$$

Gesucht sind die einzukaufenden Rohstoffmengen in Abhängigkeit von der gewünschten Tagesproduktion

P_1:

	R1	R2	R3
Z1	2	1	2
Z2	1	3	1
Z3	0	3	1

P_2:

	Z1	Z2	Z3
E1	2	1	4
E2	0	2	2
E3	3	5	0
E4	4	0	3

P:

5	17	9
2	12	4
11	18	11
8	13	11

	E1	E2	E3	E4
Tagesproduktion	100	50	80	60

1960	4520	2640

1. Produktionsmatrix - Beispiel

zweistufig & rechts-links

$$P = P_2 \cdot P_1$$

Gesucht ist jetzt der Gesamtpreis für den Einkauf der Rohstoffe für die Tagesproduktion.

Dazu müssen die benötigten Rohstoffe mit den entsprechenden Preisen multipliziert werden

	Preise
R1	1,70 €
R2	1,30 €
R3	0,60 €

P_1

	R1	R2	R3
Z1	2	1	2
Z2	1	3	1
Z3	0	3	1

P_2

	Z1	Z2	Z3
E1	2	1	4
E2	0	2	2
E3	3	5	0
E4	4	0	3

P

5	17	9
2	12	4
11	18	11
8	13	11

	E1	E2	E3	E4
Tagesproduktion	100	50	80	60

1960	4520	2640

10.792,00 €

2. Wahrscheinlichkeitsvektoren

Sei Ω die Ereignismenge eines Zufallsversuches mit n Elementen

Jedem Element $x_i \in \Omega$ ist dabei eine Wahrscheinlichkeit $p(x_i)$ zugeordnet.

Der Vektor (Die Liste) der Wahrscheinlichkeiten

$$(p(x_1), p(x_2), \dots , p(x_n))$$

wird Wahrscheinlichkeitsvektor genannt.

Beispiel Roulette:

$$p(ROT) = \frac{18}{37} = p(SCHWARZ), p(NULL) = \frac{1}{37}$$

Die Summe aller Ws ist stets gleich 1:

$$p(x_1) + p(x_2) + \ \dots + p(x_n) = 1.$$

Die Zeilensumme (Spaltensumme) eines Ws Vektors ist stets gleich 1 und alle Komponenten sind größer als Null.

2. Wahrscheinlichkeitsvektoren

Was kann man damit machen?

Beispiel Roulette:

$$p(ROT) = \frac{18}{37} = p(SCHWARZ), p(NULL) = \frac{1}{37}$$

Die Summe aller Ws ist stets gleich 1:

$$p(ROT) + p(SCHWARZ) + p(NULL) = 1$$

Als Gewinn bekommt man bei ROT und ebenso bei SCHWARZ den doppelten Einsatz ausgezahlt. Im Falle von NULL wird das 36-fache des Einsatzes ausgezahlt.

Die Auszahlungsfaktoren sind an die WS angepasst.

$$2 \cdot p(ROT) = 2 \cdot p(SCHWARZ) = 36 \cdot p(NULL) = 97{,}30\%$$

Die Bank gewinnt durchschnittlich 2,7%.

2. Auszahlungs- & Wahrscheinlichkeitsvektoren

Was kann man damit machen?

Multipliziert man den Einsatzvektor mit dem Ws-Vektor erhält man den durchschnittlichen Gewinn des Spielers

	Roulette				
	schwarz	rot	NULL		Einsatz
Einsatzstrategie	27,00 €	13,00 €	10,00 €		50,00 €
Wahrscheinlichkeit	48,649%	48,649%	2,703%		
∅Auszahlung	26,27 €	12,65 €	9,73 €	=	**48,65 €**

Die durchschnittliche Gewinnquote = ∅Rendite ist bei allen Einsatzstrategien gleich $\frac{48{,}65€}{50€} - 1 = -2{,}7\%$.

http://byggvir.de/2012/10/15/die-uberlegenheit-der-dreifachen-chancen-nutzen/

3. Prozessmatrizen

- Allgemein beschreiben ***Prozessmatrizen*** $\boldsymbol{A}$
  den Übergang von einem ***Zustand*** zum nächsten

$$\vec{Z}_n \xrightarrow{\boldsymbol{A}} \vec{Z}_{n+1}$$

- Dabei ist Zustand charakterisiert durch eine Liste von m Kenngrößen (Spaltenvektor)

- Ausgehend von einem Startzustand $\vec{z}_0$ werden die nächsten Zustände durch Multiplikation mit einer Prozessmatrix $\boldsymbol{A}$ ermittelt.

- **Beispiel**: „Fibonaccis Hasen“

3. Prozessmatrizen

Beispiel: Fibonaccis Hasen

Leonardo de Pisa, genannt Fibonacci, ….

… studierte das Wachstum von Hasenpopulationen unter folgenden modellhaften Bedingungen:

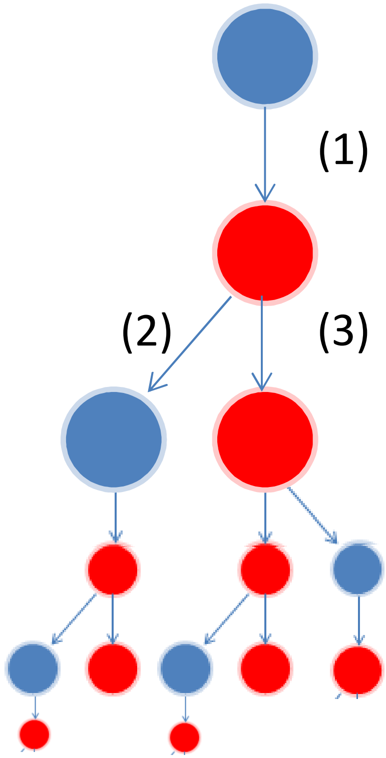
(1) Hasenpaare werden nach einem Monat geschlechtsreif

(2) Das Hasenweibchen wird mit der Geschlechtsreife sofort schwanger
Die Schwangerschaft bei Hasen beträgt genau ein Monat
Es kommt dabei stets ein neues Hasenpaar zur Welt

(3) Hasenpaare sind unsterblich

3. Prozessmatrizen

Beispiel: Fibonaccis Hasen



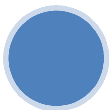
Leonardo de Pisa, genannt Fibonacci,

....

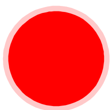
... studierte das Wachstum von Hasenpopulationen unter folgenden modellhaften Bedingungen:

Gezählt werden Hasenpaare.

Es gibt zwei Arten von Hasenpaaren:



a sei die Anzahl der nicht-geschlechtsreifen Hasenpaare und



b sei die Anzahl der geschlechtsreifen Hasenpaare

Dann gilt

$$a \to b$$

und

$$b \to a + b$$

3. Prozessmatrizen

Beispiel: Fibonaccis Hasen

Es gibt zwei Arten von Hasenpaaren:

a sei die Anzahl der nicht-geschlechtsreifen Hasenpaare und

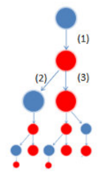
b sei die Anzahl der geschlechtsreifen Hasenpaare

Dann gilt

$$a \to b$$

und

$$b \to a + b$$



Das kann man in die Matrizensprache übersetzen:

Der Vektor $\binom{a}{b}$ beschreibe einen beliebigen Zustand, dann beschreibt $\binom{b}{a+b}$ den Zustand im folgenden Monat .

Wie sieht die Prozessmatrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ aus für die gilt:

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \cdot \binom{a}{b} = \binom{b}{a+b} \ ?$$

3. Prozessmatrizen

Allgemein:

Prozesse lassen sich übersichtlich in einem erweiterten FALK-SCHEMA darstellen:

Beobachtung:
Die Zahlen in den Zustandsvektoren steigen immer schneller an.
Exponentielles Wachstum ?

Um das Wachstum zu beschreiben, betrachte man z.B. das Verhältnis zwischen den zweiten Komponenten zweier aufeinander folgender Zustände.

Beispiel: „Fibonaccis Hasen“

		1	
		1	1,000
0	1	1	
1	1	2	2,000
0	1	2	
1	1	3	1,500
0	1	3	
1	1	5	1,667
0	1	5	
1	1	8	1,600
0	1	8	
1	1	13	1,625
0	1	13	
1	1	21	1,615
0	1	21	
1	1	34	1,619
0	1	34	
1	1	55	1,618
0	1	55	
1	1	89	1,618
⋮		⋮	⋮

4. Prozessmatrizen

Allgemein ist ein linearer Prozess durch

a) den Startwert $\vec{z}_0$ (wird als Spalte geschrieben) und

b) die Prozessmatrix $\boldsymbol{A}$

$$\vec{z}_n \xrightarrow{\boldsymbol{A}} \vec{z}_{n+1}$$

$$\text{mit} \quad \vec{z}_{n+1} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z}_n$$

eindeutig definiert.

Stets gilt $$\vec{z}_n = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{z}_0$$

4. Übergangsmatrizen

Übergangsmatrizen sind spezielle Prozessmatrizen.

Ausgangssituation ist dabei stets Verteilung einer Gesamtmenge auf Gruppen mit verschiedenen Eigenschaften.

Beispiel: Die Gesamtmenge der Studierenden an der Frankfurt University of Applied Science wird entsprechend der Anzahl der Studiensemester in Gruppen eingeteilt. Jedes Halbjahr findet ein Übergang statt.

- Die Zustandsvektoren (Spalten) spiegeln entweder die absoluten Zahlen, oder die prozentualen Anteile wieder
- Die Übergangsmatrix enthält die Übergangsraten in %
  Genauer:
  - Zu jeder Gruppe gehört genau eine Spalte
  - Die Summe aller Raten muss gleich eins sein , wenn keine Studierenden verloren gehen
  - D.h. Die Spaltensumme ist 100%. Die Spalten sind also Ws-Vektoren.

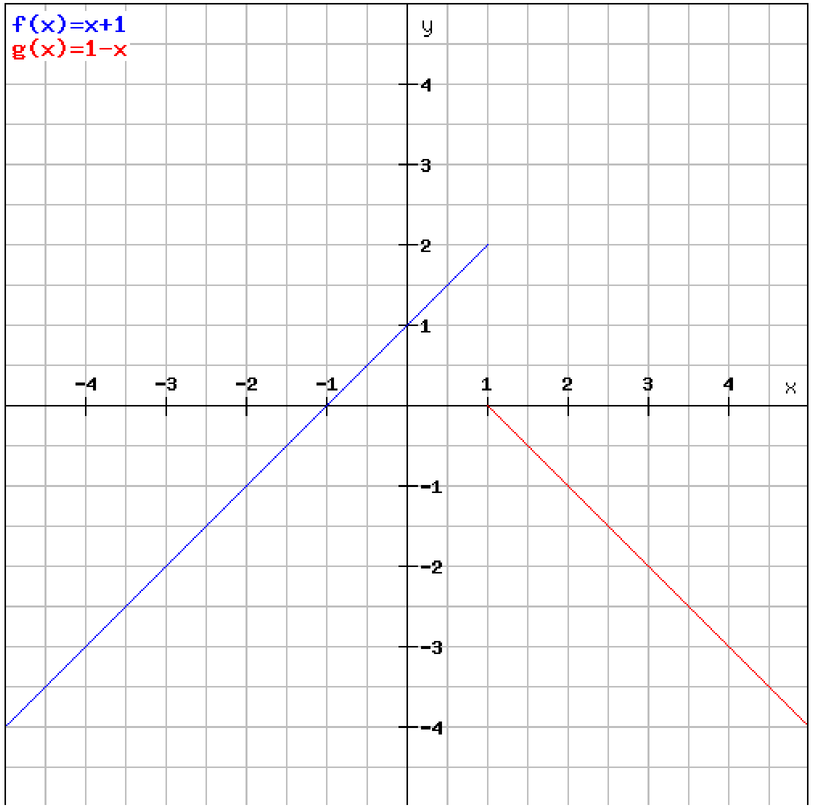
Siehe Aufgabe 10 und Aufgabe 13

5. Netz- und Verbindungspläne

Siehe Aufgabe 11 und Aufgabe 14

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

» Noch Fragen ?



Let‘s have a break ;)

Weitere Anwendungsbereiche

- Lineare Gleichungssysteme – Gauß – Algorithmus
- Geometrie
  - Skalarprodukt => ***Winkel***
  - ***Volumen*** & Determinanten quadratischer Matrizen - Regel von Sarrus,

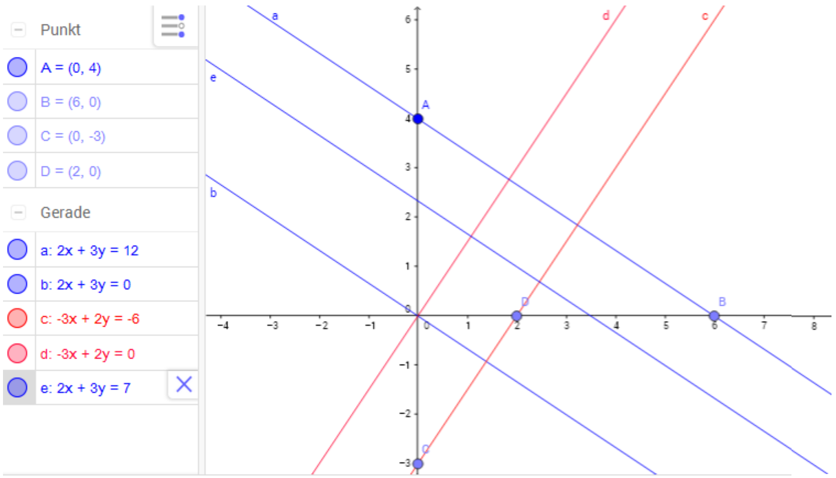
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

- Lineare Optimierung – Simplexalgorithmus
- Wahrscheinlichkeitsrechnung: Übergangsmatrizen und
- Logistik: Transportprobleme
- Quadratische Formen mehrerer Variablen (= homogene Polynome von Grad 2)
  - $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$
  - $grad(f) = (2ax + dy + fz \quad 2by + dx + ez \quad 2cz + ey + fx)$
  - $Hesse\ Matrix\ H := \begin{pmatrix} 2a & d & f \\ d & 2b & e \\ f & e & 2c \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot H \cdot (x,y,z)^T$

Geraden in der x,y-Ebene

- Geraden in der Ebene

$$ax + by = c$$



- Parallelen in der Ebene

$$ax + by = d,$$

$$\text{für } d \neq c$$

- Homogene Gleichung

$$ax + by = 0$$

Gerade durch den Nullpunkt

- Senkrechte Gerade

$$-bx + ay = 0$$