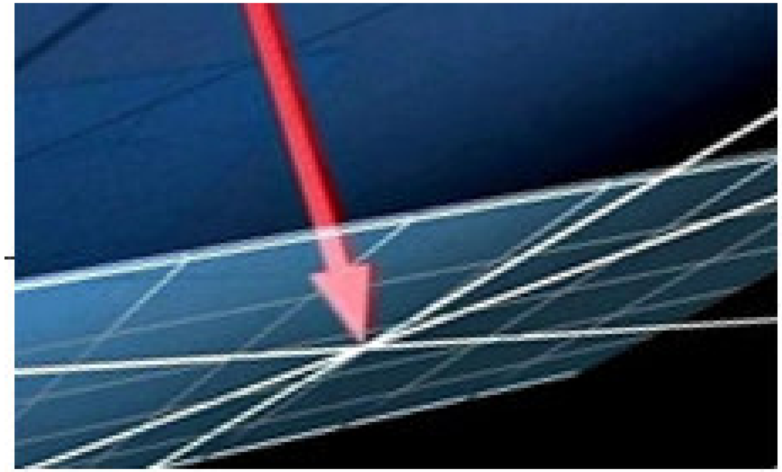


Lineare Algebra

VI. Lineare Algebra
Vektoren & Matrizen

Dr. Peter Lambé

2.1 Begriffe

Linearkombination

Die lineare Algebra beschäftigt sich mit mathematischen Objekten, die sich „linear kombinieren“ lassen.

Was heißt das ?

1. **Vervielfachen und**
2. **Addieren**

soll möglich sein.

Im folgenden werden wir mathematische Objekte kennenlernen mit denen das möglich ist: „Vektoren“ und „Matrizen“

2.1 Begriffe

Matrix:

DEFINITION

$m \cdot n$ reelle Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$,
angeordnet in einem rechteckigen $(m \times n)$ −**Schema** der Form

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} & \text{m Zeilen} \\ \text{n Spalten} & \end{array}$$

bestehend aus m Zeilen und n Spalten wird reelle $(\mathrm{m} \times \mathrm{n})$-**Matrix** genannt.

2.1 Begriffe

Spezialfall: **Vektoren**

DEFINITION

Vektoren sind einspaltige bzw. einzeilige Matrizen.
Sie treten also in zwei Erscheinungsformen auf:

- Zeilenvektor: **eine** Zeile, $\boldsymbol{n}$ Spalten $= (\,1 \times n\,)$-Matrix

$$\vec{\boldsymbol{b}} = (\,70, \quad 200, \quad 70)$$

- Spaltenvektor: $\boldsymbol{m}$ Zeilen, **eine** Spalte $= (\,m \times 1\,)$-Matrix

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Beispiele für Vektoren

Jede Liste lässt sich als Vektor aufschreiben:

- **Rezepte** = Zutatenvektoren z.B. für Reginas Hefeteig
  http://www.chefkoch.de/rezepte/834021188138601/Reginas-Hefeteig.html

Zutaten

500 g	Mehl
21 g	Hefe, frisch oder
1 Pck.	Hefe, trocken
1 TL	Salz
80 g	Zucker (nur bei süßem Hefeteig, ansonsten 1 EL)
250 ml	Milch, lauwarm
80 g	Butter, weich

Die Maßeinheiten im Überblick

1 Teelöffel	**gestrichen**	
Salz	4 g	
1 Esslöffel	gestrichen	gehäuft
Mehl	15 g	25 g
Zucker	15 g	30 g

$$\vec{z} := \begin{pmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}021 \\ 0{,}004 \\ 0{,}080 \\ 0{,}250 \\ 0{,}080 \end{pmatrix}$$

Beispiele für Vektoren

Jede Liste lässt sich als Vektor aufschreiben:

- **Einkaufslisten für die Renovierung**
  Tapeten, Farben, Teppichboden, Fliesen, Dielen …..

  Maßeinheiten:
  Stückzahlen, Liter, Quadratmeter, Laufende Meter ?

- **Preislisten von Lebensmittelmärkten**

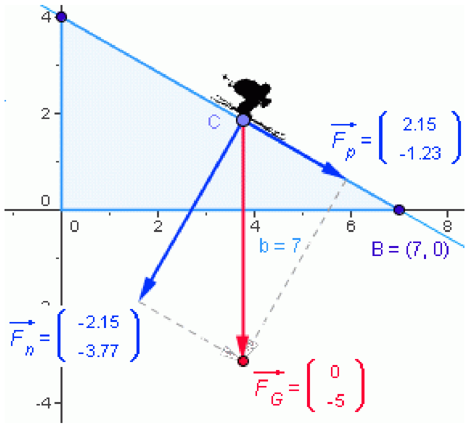
  Maßeinheit: €

☐	.Weizenmehl	Mühlengold	0.35	1 kg
☐	Weizenmehl, sortiert	bio	0.95	1 kg
☐	.Zucker	DIAMANT	0.85	1 kg

$$\vec{p} := \begin{pmatrix} 0{,}35€ \\ 0{,}95\ € \\ 0{,}85\ € \end{pmatrix}$$

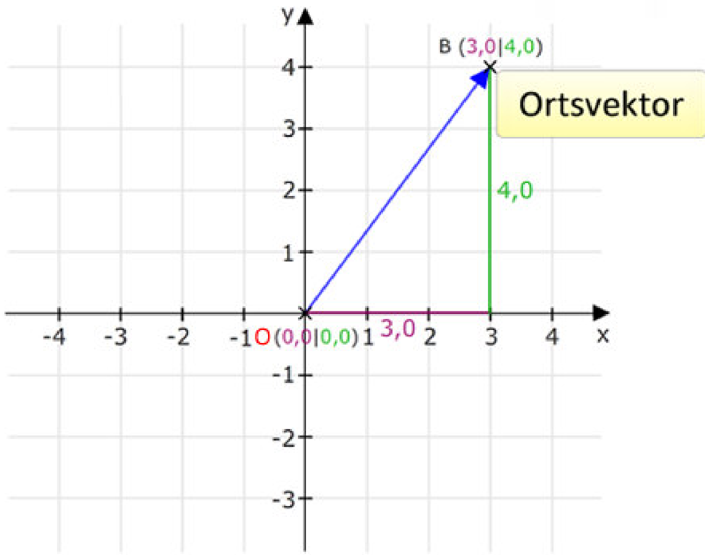
Beispiele für Vektoren

- **Physik: Gewichtsvektoren, Kräftevektoren**:



$$\overrightarrow{F_G} := \binom{0}{-5}$$

- **Geometrie: Ortsvektor**
  Koordinaten eines Punktes in einem Koordinatensystem



2.2 Mit Vektoren rechnen

Ein Vektor ist also eine Liste von Zahlen, die je nach Kontext als Spalte oder Zeile geschrieben werden kann (***Spalten- und Zeilenvektoren***).

Schreibt der Kontext die Schreibweise nicht vor, kann man sich frei entscheiden. Die einzelnen Zahlen im Vektor werden als Koordinaten oder auch als ***Komponenten*** bezeichnet.

Mit Vektoren kann man rechnen:

1. Vervielfachen: Multiplikation mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ — $\alpha\vec{x} = ?$
2. Addieren = Addition zweier Vektoren — $\vec{x} + \vec{y} = ?$
3. Linearkombination von Vektoren — $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = ?$
4. Skalarprodukt — $\vec{x} \cdot \vec{y} = ?$

Die Zahlen α, β werden als ***Skalare*** bezeichnet, weil sich damit die Größe des Vektors „skalieren“ lässt.

2.2 Mit Vektoren rechnen

1. Vervielfachen: Multiplikation mit einem Skalar

Beispiel: Will man 5 Kuchen backen, braucht man von jeder Zutat die fünffache Menge.

Dementsprechend definiert man allgemein das ***Vielfache*** eines Vektors durch die komponentenweise Multiplikation mit dem Skalar

$$\vec{z} := \begin{pmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}021 \\ 0{,}004 \\ 0{,}080 \\ 0{,}250 \\ 0{,}080 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad 5 \cdot \vec{z} := \begin{pmatrix} 2{,}500 \\ 0{,}105 \\ 0{,}020 \\ 0{,}400 \\ 1{,}250 \\ 0{,}400 \end{pmatrix}$$

Für eine Zahl (Skalar) $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist das Produkt $\lambda \cdot \vec{x}$ definiert durch

$$\lambda \cdot \vec{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

… ebenso für Spaltenvektoren. Jede Komponente des Vektors wird multipliziert.

2.2 Mit Vektoren rechnen

2. Addition von Vektoren

Will man gleichzeitig mehrere Produkte herstellen (1 Kuchen **und** 1 Pizza), dann werden die benötigten Zutaten addiert.

Olivenöl

H_2O

$$
\begin{array}{rcl}
\vec{a} & = & (\,0{,}5 \quad 0{,}021 \quad 0{,}004 \quad 0{,}080 \quad 0{,}25 \quad 0{,}8 \quad 0 \quad 0\,) \\
\vec{b} & = & (\,0{,}5 \quad 0{,}021 \quad 0{,}004 \quad 0{,}015 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}8 \quad 0{,}25\,) \\
\vec{a} + \vec{b} & = & (\,1 \quad 0{,}042 \quad 0{,}008 \quad 0{,}095 \quad 0{,}25 \quad 0{,}8 \quad 0{,}8 \quad 0{,}25\,)
\end{array}
$$

Dementsprechend definiert man allgemein die Addition zweier Vektoren durch die Addition der einzelnen Komponenten:

Für zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ist die Summe $\vec{x} + \vec{y}$ definiert durch

$$\vec{x} + \vec{y} \coloneqq (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

… ebenso für Spaltenvektoren. Alle n Komponenten der Vektoren werden addiert.

2.2 Mit Vektoren rechnen

3. Linearkombination

Will man gleichzeitig mehrere Produkte herstellen (500 Kuchen **und** 900 Pizzen), dann werden die benötigten Zutaten zunächst skaliert und anschl. addiert.

Olivenöl

H_2O

$$\vec{a} = (\, 0{,}5 \quad 0{,}021 \quad 0{,}004 \quad 0{,}080 \quad 0{,}25 \quad 0{,}8 \quad 0 \quad 0 \,)$$

$$\vec{b} = (\, 0{,}5 \quad 0{,}021 \quad 0{,}004 \quad 0{,}015 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}8 \quad 0{,}25 \,)$$

$$500\vec{a} + 900\vec{b} = (\; 700 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \;)$$

Dementsprechend definiert man allgemein die Linearkombination zweier Vektoren durch die Addition der einzelnen, skalierten Komponenten:

Für zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ist die Linearkombination $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ definiert durch

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \;:= (\alpha x_1 + \beta y_1,\, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$$

… ebenso für Spaltenvektoren. Alle Komponente des Vektors werden linear kombiniert.

2.2 Mit Vektoren rechnen

Übung:

Gegeben seien drei Vektoren :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad und \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

Taschenrechner ?

Formelsammlung ?

(a) $0{,}3\vec{a} =$ ...

(b) $-\vec{b} =$ ...

(c) $500\vec{a} - 250\vec{b} =$ ...

(d) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} =$ ...

(e) $5\vec{a} + 2\vec{a} - 6\vec{a} =$ ...

(f) $\vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{c} =$ ...

(g) $\vec{c} - (\vec{a} - 3\vec{c}\,) =$ ...

2.2 Mit Vektoren rechnen

Multiplikation von Vektoren ?

Beispiel Bäckerei

Eine Bäckerei produziert Heferohteig in zwei verschiedenen Zusammensetzungen.

Olivenöl

H_2O

$$\vec{A} \coloneqq \textbf{Produkt 1} = (\,0{,}5 \quad 0{,}021 \quad 0{,}004 \quad 0{,}080 \quad 0{,}25 \quad 0{,}8 \quad 0 \quad 0\,)$$

$$\vec{B} \coloneqq \textbf{Produkt 2} = (\,0{,}5 \quad 0{,}021 \quad 0{,}004 \quad 0{,}015 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}8 \quad 0{,}25\,)$$

a) Täglich werden 500 kg von A und 720 kg von B hergestellt.
Wie viele Rohstoffe werden dafür benötigt ?

b) Welche Kosten entstehen der Bäckerei insgesamt bei folgender **<u>Preisliste</u>** für den Einkauf der Rohstoffe ?

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0{,}40 \\ 20{,}00 \\ 0{,}40 \\ 1{,}20 \\ 1{,}00 \\ 6{,}00 \\ 8{,}40 \\ 0{,}00 \end{pmatrix}$$

2.2 Mit Vektoren rechnen

„Multiplikation“ von Vektoren - Beispiel Kuchenteig

$\vec{A}$		$\vec{p}$	
Menge in kg	Zutaten	Preis je kg	Preis je Zutat
0,5000	Mehl	0,40	0,20
0,0210	Hefe, frisch	20,00	0,42
0,0040	Salz	0,40	0,00
0,0800	Zucker	1,20	0,10
0,2500	Milch	1,00	0,25
0,0800	Butter	6,00	0,48
0,0000	Olivenöl	8,40	0,00
0,0000	Wasser	0,00	0,00
		Gesamtpreis des Produktes A =	1,45

$= \vec{A} \cdot \vec{p}$

2.2 Mit Vektoren rechnen

„Multiplikation“ von Vektoren - Beispiel Pizzateig

$\vec{B}$		$\vec{p}$	
Menge in kg	Zutaten	Preis je kg	Preis je Zutat
0,5000	Mehl	0,40	0,20
0,0210	Hefe, frisch	20,00	0,42
0,0040	Salz	0,40	0,00
0,0150	Zucker	1,20	0,02
0,0000	Milch	1,00	0,00
0,0000	Butter	6,00	0,00
0,0800	Olivenöl	8,40	0,67
0,2500	Wasser	0,00	0,00
	Gesamtpreis des Produktes B =		1,31 $= \vec{B} \cdot \vec{p}$

2.2 Mit Vektoren rechnen

„Multiplikation“ von Vektoren - Formal

Definition des „***Skalarprodukts***“

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ zwei Vektoren mit $gleichvielen$ Komponenten.

Das Skalarprodukt der beiden ist eine Zahl (Skalar) und wird nach folgender Vorschrift berechnet:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} \; := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}$$

d.h. die Komponenten des Vektors werden zunächst paarweise multipliziert, …

und zum Schluss werden die so entstandenen Produkte addiert.

2.2 Mit Vektoren rechnen

Übung

Gegeben seien drei Vektoren :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad und \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

Taschenrechner ?

Formelsammlung ?

(a) $0{,}3\vec{a} \cdot (-\vec{b}) =$ …

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} =$ …

(c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} =$ …

(d)

(e)

(f) eigene Aufgabe

2.2 Abschließende Definition

Eine Menge von mathematischen Objekten heißt $\mathbb{R}$**-Vektorraum**, wenn sich die Objekte linear kombinieren lassen, d.h. die Elemente lassen sich addieren und vervielfachen mit Faktoren (Skalaren) aus $\mathbb{R}$.

Und wenn …

- … es ein Null Element gibt („Nullvektor $\vec{0}$ “), für den gilt
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$
- … zu jedem Element $\vec{a}$ ein „Inverses Element $-\vec{a}$ “ existiert
- … das Assoziativgesetz
$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$$
- … und das Kommutativgesetz bzgl. der Addition
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
  gilt.

Auch für die Multiplikation mit den Skalaren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ müssen vernünftige Regeln gelten:

- es gibt ein Eins-Element $1 \in \mathbb{R}$: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- Distributivgesetz $\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$, und
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$

2.3 Spezielle Matrizen:

$(n \times m)$-Matrizen

Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ lassen sich Matrizen aufstellen .
Sie bestehen aus n Zeilen und m Spalten $(n \times m) - Matrizen$
(… sprich „n kreuz m“ Matrizen)

$n, m \in \mathbb{N}$ heißen die Dimensionen der Matrix A.

Produktionsmatrix für 2 Produkte aus 4 Zutaten (Rezepte in den Zeilen):

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{(2x4) - Matrix}$$

Preisvektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2{,}00€ \\ 0{,}50€ \\ 1{,}00€ \end{pmatrix} \qquad \text{Spaltenvektor} = \text{(3x1) - Matrix}$$

FS (11.2.2)

2.3 Spezielle Matrizen

11.2.2 Transponierte Matrix

Vertauschen von Zeilen und Spalten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \leftrightarrow \mathbf{A}^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 4} \leftrightarrow \mathbf{A}^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}_{4\times 2} \leftrightarrow \left(\mathbf{A}^{T}\right)^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

FS (11.2.2)

2.3 Spezielle Matrizen

Es gilt:

- $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \mathbf{D}$
- $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \;\leftrightarrow\; \mathbf{A}$ ist symmetrisch.
- $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A} \;\leftrightarrow\; \mathbf{A}$ ist schiefsymmetrisch.

Beispiele:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & -6 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & -5 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}$$

Schiefsymmetrisch: Hauptdiagonale besteht aus Nullen

FS (11.1)

2.3 Spezielle Matrizen:

$(n \times n)$-Matrizen = „Quadratische Matrizen“

Allgemeine Gestalt
$(n \times n) - Matrix$

Hauptdiagonale:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 4 \\ 7 & \boxed{6} & 5 \\ 1 & 9 & \boxed{8} \end{pmatrix}$$

Nebendiagonale:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{4} \\ 7 & \boxed{6} & 5 \\ \boxed{1} & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$

Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$

Nullmatrix $\boldsymbol{O}$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \cdots & o_{1m} \\ 0 & o_{22} & \cdots & o_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & o_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mm} \end{pmatrix}$$

2.4 Rechenregeln von Matrizen

Addition und Multiplikation mit einem Skalar

$(n \text{ x } m)$ −Matrizen können als ein Vektor von Zeilenvektoren bzw. Spaltenvektoren interpretiert werden.

$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = (A_{i*})$, für die Zeilenvektoren $A_{i*} = (a_{i1} \ldots \quad a_{in})$
$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = (A_{*j})$, für die Spaltenvektoren $A_{*j} = (a_{1j} \ldots \quad a_{nj})^T$

Dementsprechend sind die Addition zweier Matrizen gleichen Typs und auch die Multiplikation mit einem Skalar genauso definiert wie für Vektoren:

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und zwei Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ und $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ des gleichen Typs gilt

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \coloneqq (A_{i\cdot} + B_{i\cdot}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda\boldsymbol{A} \coloneqq (\lambda A_{i\cdot}) = (\lambda a_{ij})$$

2.4 Rechenregeln von Matrizen

Übung:

Gegeben seien die beiden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & -3 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 9 & 6 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

Taschenrechner ?

Formelsammlung ?

(a) $A + B =$ ...

(b) $B + A =$ ...

(c) $B^T - A =$ ...

(d) $3A - 4B =$ ...

(e) $6B - 6(B - A) =$ ...

http://www.mathe-lerntipps.de/matrizenrechnung.html

FS (11.2.5)

2.5 Multiplikation von Matrizen

11.2.5 Multiplikation von Matrizen

Multiplikation von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nur wenn gilt : $\mathbf{A}_{m \times k}$ und $\mathbf{B}_{k \times n}$

$$\mathbf{A}_{m \times k} \cdot \mathbf{B}_{k \times n} = \mathbf{C}_{m \times n} \quad \leftrightarrow \quad c_{ij} = \mathbf{A}_{i\cdot} \cdot \mathbf{B}_{\cdot j} = \sum_{h=1}^{k} a_{ih} \cdot b_{hj} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \mathbf{A}_{i\cdot} &= \text{i-te Zeile von } \mathbf{A} \\ \mathbf{B}_{\cdot j} &= \text{j-te Spalte von } \mathbf{B} \end{aligned}$$

- Matrizen können auch miteinander multipliziert werden, wodurch als Produkt eine neue Matrix entsteht.
- Die Elemente des Produkts werden bestimmt, indem das Skalarprodukt aus dem Zeilenvektor der ersten Matrix und dem Spaltenvektor der zweiten Matrix gebildet wird. D.h. in der Produktmatrix steht am Kreuzungspunkt der i-ten Zeile mit der j-ten Spalte das Produkt aus der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B
- Hierfür muss die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen. Das Produkt zweier Matrizen wird auch Matrixprodukt genannt.

=> DOMINO-REGEL: Dimension Check: $(m \times \boxed{k) \cdot (k} \times n) = (m \times n)$

FS (11.2.5)

2.5 Multiplikation von Matrizen

✓ DOMINO-REGEL **Dim.Check**

Beispiel

Gesucht ist das Produkt der Matrizen A und B,
die wie folgt definiert sind:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \; und \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Die erste Matrix *A* ist eine (3×2)-Matrix, die zweite Matrix *B* eine (2×2)-Matrix.
Demnach verfügt die Matrix *A* um zwei Spalten und die Matrix B über zwei Zeilen,
weshalb unsere Bedingung erfüllt ist und sie miteinander multiplizierbar sind.

Als Ergebnis erwarten wir eine (3×2)-Matrix.
Aber wie verfährt man jetzt?

FS (11.2.5)

2.5 Multiplikation von Matrizen

✓ DOMINO-REGEL **Dim.Check**

✓ **Setup Multiplication Schema**

Man geht am besten nach dem Falk-Schema vor, welches hier beispielhaft an den Matrizen A und B gezeigt werden soll.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \ und \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Wir zeichnen ein Kreuz und tragen die Matrix *A* unten links ein, hier in gelb markiert. Matrix *B* wird oben rechts eingetragen, hier in blau unterlegt.

Das Matrixprodukt wird nun unten rechts eingetragen. Wir setzen zunächst die Variablen a, b, c, d, e, f für die Elemente des Matrixprodukts ein, deren exakte Werte im weiteren Verlauf genauer zu berechnen sind.

Falk-Schema

		3	-1
		-2	-7
4	0	*a*	*b*
3	1	*c*	*d*
-1	7	*e*	*f*

FS (11.2.5)

2.5 Multiplikation von Matrizen

Als Ergebnis erwarten wir eine (3×2)-Matrix , die hier grün dargestellt ist.
Wie verfährt man jetzt?

Für jedes einzelne Element müssen wir das Skalarprodukt der jeweiligen Zeile der Matrix A mit der entsprechenden Spalte der Matrix B bestimmen.

✓ DOMINO-REGEL **Dim.Check**

✓ **Setup Multiplication Schema**

✓ **Single Computation**

$$\begin{aligned} a &= 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) = 12 \\ c &= 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 7 \\ e &= (-1) \cdot 3 + 7 \cdot (-2) = -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 4 \cdot (-1) + 0 \cdot (-7) = -4 \\ d &= 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-7) = -10 \\ f &= (-1) \cdot (-1) + 7 \cdot (-7) = -48 \end{aligned}$$

Falk-Schema

		3	-1
		-2	-7
4	0	12	*b*
3	1	*7*	*d*
-1	7	*-17*	*f*

2.5 Multiplikation von Matrizen

Anleitung casio fx-991de plus

1. Matrizen einspeichern

1.1 Auswahl der Matrix A $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{1}$ (..Matrix B $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{2}$)

1.2 Bestimmung der Dimension z.B $\boxed{1}$ für 3x3

1.3 Zahl eingeben z.B $\boxed{-}$ $\boxed{4}$ und mit $\boxed{=}$ bestätigen

1.4 Sobald die Matrix vollständig eingegeben ist, $\boxed{\text{AC}}$ drücken

Matrix B auswählen

2. Rechnung formulieren

2.1 Matrix A.. $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ ..Matrix B.. $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$

2.2 Ausgabe des Ergebnisses mit $\boxed{=}$

casio fx-991es plus

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ statt $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{6}$

Quelle: http://www.mathebibel.de

2.5.1 Quadratische Matrizen

Wir beschränken uns jetzt auf die Multiplikation von gleichgroßen quadratischen $(n \times n)$ Matrizen.

✓ DOMINO-REGEL **Dim.Check**

Für diese Matrizen ist der Dimension Check immer erfüllt.

$$(n \times \boxed{n) \cdot (n} \times n)$$

d.h. für zwei gleichgroße Matrizen A, B sind beide Produkte definiert:

$$A \cdot B \quad und \quad B \cdot A$$

✓ **Setup Multiplication Schema**

Am Multiplikationsschema lässt sich das gut erkennen:

			1	2	3
$A \cdot B$			2	3	5
			3	4	6
4	2	0	8	14	22
3	-1	1	4	7	10
-1	0	7	20	26	39

			4	2	0
$B \cdot A$			3	-1	1
			-1	0	7
1	2	3	7	0	23
2	3	5	12	1	38
3	4	6	18	2	46

Aber im Allgemeinen ist

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

2.5.1 Quadratische Matrizen

Für quadratische Matrizen können wir folgende Fragestellung untersuchen

✓ DOMINO-REGEL **Dim.Check**

✓ **Setup Multiplication Schema**

- Gibt es ein ***Neutrales Element E*** für die Matrizenmultiplikation ?

$$A \cdot E = A$$

			1	0	0
			0	1	0
			0	0	1
4	2	0	4	2	0
3	-1	1	3	-1	1
-1	0	7	-1	0	7

SATZ von ‚Neutralen Element‘

In der Menge der quadratischen Matrizen fester Größe ($n \times n$) gibt es ein eindeutig definiertes Element der selben Größe, für das gilt
$A \cdot E_n = A$ für alle Matrizen A.

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ mit n Zeilen und n Spalten

2.5.1 Quadratische Matrizen

Jetzt wollen wir eine zweite Fragestellung untersuchen.

✓ DOMINO-REGEL **Dim.Check**

✓ **Setup Multiplication Schema**

- Gibt es zu einer gegebenen quad. Matrix ein ***Inverses Element X***

$$X \cdot A = E$$

- Wenn ja, wie kann man das ***Inverse Element X*** ausrechnen ?

$X \cdot A$			4	2	0
			3	-1	1
			-1	0	7
?	?	?	1	0	0
?	?	?	0	1	0
?	?	?	0	0	1

Bevor wir anfangen müssen wir erstmal feststellen, dass es offensichtlich Matrizen gibt, für die es ***keine*** Inverse Matrix X gibt !!!

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \neq 1$$

			0	2	0
			0	-1	1
			0	0	7
a	b	c	1	0	0
			0	1	0
			0	0	1

2.5.1 Quadratische Matrizen

Definition

Eine quadratische Matrix, die ein Inverses besitzt heißt ***regulär***.
Sonst ***singulär*** oder ***nicht-regulär.***

Es bleiben die Fragen:

- Gibt es zu einer gegebenen quad. Matrix ein ***Inverses Element X***

$$\boldsymbol{X} \cdot A = E\ ?$$

- Wenn ja, wie kann man das ***Inverse Element X*** ausrechnen ?

			4	2	0
			3	-1	1
			-1	0	7
?	?	?	1	0	0
?	?	?	0	1	0
?	?	?	0	0	1

2.5.1 Multiplikation von Matrizen

Berechnung des ***Inversen Elements*** mit Hilfe des Unterer- und Oberer-Dreiecksmatrizen – Schritt für Schritt – ähnlich wie das Lösen eines Gleichungssystems (Gauß-Algorithmus)

$$X \cdot A = E$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 4 & 2 & 0 \\
 & & & 3 & -1 & 1 \\
U_1 & & & -1 & 0 & 7 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\
-3/4 & 1 & 0 & 0 & -5/2 & 1 \\
1/4 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 4 & 2 & 0 \\
 & & & 0 & -5/2 & 1 \\
U_2 & & & 0 & 1/2 & 7 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -5/2 & 1 \\
0 & 1/5 & 1 & 0 & 0 & 36/5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 4 & 2 & 0 \\
 & & & 0 & -5/2 & 1 \\
D & & & 0 & 0 & 36/5 \\
\hline
1/4 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\
0 & -2/5 & 0 & 0 & 1 & -2/5 \\
0 & 0 & 5/36 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 1 & 1/2 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & -2/5 \\
O_1 & & & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1/2 & -1/5 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2/5 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$O_1 \cdot D \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot A = E$$

und schließlich $\quad O_1 \cdot D \cdot U_2 \cdot U_1 = A^{-1}$

2.5 Multiplikation von Matrizen

$A^{-1} = O_1 \cdot D \cdot U_2 \cdot U_1$					
			1	0	0
			0	1	0
			0	0	1
1	0	0	1	0	0
$-3/4$	1	0	$-3/4$	1	0
$1/4$	0	1	$1/4$	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	$-3/4$	1	0
0	$1/5$	1	$1/10$	$1/5$	1
$1/4$	0	0	$1/4$	0	0
0	$-2/5$	0	$3/10$	$-2/5$	0
0	0	$5/36$	$1/72$	$1/36$	$5/36$
1	$-1/2$	$-1/5$	$7/72$	$14/72$	$-2/72$
0	1	$2/5$	$22/72$	$-28/72$	$4/72$
0	0	1	$1/72$	$2/72$	$10/72$

$$A^{-1} = -\frac{1}{72} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -14 & 2 \\ -22 & 28 & -4 \\ -1 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

			4	2	0
			3	-1	1
			-1	0	7
-7	-14	2	-72	0	0
-22	28	-4	0	-72	0
-1	-2	-10	0	0	-72

Probe: $M \cdot A = -72 \cdot E_3$

2.5 Regeln & Gesetze

11.2.5 Multiplikation von Matrizen

FORMEL
SAMMLUNG

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$A \cdot E = A = E \cdot A$

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Aufgabe:
Berechnen Sie für die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

falls möglich
- $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$,
- $(\boldsymbol{AB})^T$ und $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

Lösung:
STEP 1: Check Dimensions
e.g. $[4 \times 2] * [2 \times 3]$

STEP 2: Set up multiplication schema (Falk-Schema)

STEP 3: Single computation

http://www.mathe-lerntipps.de/matrizenrechnung/multiplikation-von-matrizen.html

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

» Noch Fragen ?