# Agenda

Kapitel II - Finanzmathematik


## (1) Zinsen auf Einmalzahlungen

- ☑ Geld & Zeit = Zinsen
- ☑ Zinsmodelle

## (2) Ratenzahlungen

- ☑ Im Zinseszinsmodell (geometrische Reihe)

## (3) Finanzprodukte

- ☑ Sparverträge
- ☑ Renten
- – **2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen**

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

- Im Mittelpunkt stehen heute Ratenkredite:

***Aufgabe 1*** Ein Kredit in Höhe von 10.000 € wird über 12 Monaten in nachschüssigen Raten zu 1.000 € mit monatlicher Zinsverrechnung zurückgezahlt.

1. Frage: Wie hoch ist der Effektivzins ?

Für die Antwort unterstellen wir bei jeder Ratenzahlung sofortige Zins- und Tilgungsverrechnung, was auch gesetzlich durch die Preisangaben Verordnung (PAngV) vorgeschrieben ist.

2. Frage: Wie groß ist in diesem Modell der Tilgungsanteil, der sofort zu verrechnen ist ?

Von „Außen“ kann man der Rate den Tilgungsanteil nicht ansehen.

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

*Entwicklung der Restschuld am Ende des $k$-ten $Periode$ $S_k$ aus dem anfänglichen Schuld $S_0$ und den $k$ gezahlten Annuitäten*

Dazu muss die Restkapital-Formel aus dem letzten Kapitel nur entsprechend angepasst werden:

$$S_k = S_0 \cdot q^k - a \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$$

In Worten: Die aktuelle Restschuld $S_k$ zum Zeitpunkt $k$ setzt sich zusammen aus der aufgezinsten anfänglichen Schuld $S_0 \cdot q^k$ minus der durch die gezahlten Annuitäten abgetragenen Schulden.

Bemerkung: $S_0 \cdot q^k$ wäre der Schuldenstand, wenn nicht getilgt worden wäre.

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

Mit Hilfe dieser Formel können wir die Annuität berechnen. Dazu betrachten wir den Schulden stand am Ende der Laufzeit $n$:

$$S_n = S_0 \cdot q^n - a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Die Schuld soll am Ende der Laufzeit getilgt sein, d.h. $S_n = 0$ und daher ist:

$$(*)\ \ Annuitätenformel \qquad a = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

Die Formel $(*)$ erlaubt die Berechnung der Annuität(Rate) direkt aus der Höhe des Kredites $S_0$, der Anzahl der Perioden $n$ und $q = 1 + p\%$
(mit dem Perioden Zins $p\%$)
Bemerkung: …hätte auch aus der Barwertformel für nachschüssige Raten abgeleitet werden können mit $a = r$

$$\overline{K}_o = r \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} \quad mit \quad v = \frac{1}{q}$$

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

Die wesentlichen Fragen könnten wir eigentlich mit den Begriffen & Formeln der Ratenrechnung beantworten. Unglücklicherweise hat sich aber für die Annuitätische Tilgung eines Kredites ein eigener Begriffsapparat entwickelt:

**Sprechweisen & Bezeichnungen:**

- Die Rate wird in diesem Zusammenhang ***Annuität a*** genannt
- Der Kredit $S_0$ wird durch „Annuitäten“ über eine Laufzeit von $n$ Perioden beglichen.
- Ein Darlehen wird annuitätisch getilgt.
- Die Annuität setzt sich aus einem Zinsanteil und einem Tilgungsanteil zusammen

$$\underline{\textbf{Annuität } \boldsymbol{a}} = \mathit{Schuldzinsen\ auf\ Restschuld} + \mathit{Schuldtilgung}$$

Der Zinsanteil wird mit $z_k$ bezeichnet der Tilgungsanteil mit $t_k$

$$\boxed{a = z_k + t_k}$$

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

Durch Auflösen der Annuitätenformel:

$$a = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \qquad (*)$$

nach $S_0,\ n\ bzw\ q$ wieder die entsprechenden Formeln:

| | |
|---|---|
| Annuität<br>$a$ | Periodenzinssatz<br>$p\% = q - 1$ |
| Darlehen<br>$S_0$ | Laufzeit<br>$n$ |

- ***Barwert = Aufgenommener Kredit :***

$$S_0 = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

- ***Laufzeit :***

$$n = \frac{\ln\left(\frac{a}{a - S_0 \cdot (q-1)}\right)}{\ln(q)}$$

- ***Zins** :* Zur Berechnung des Zinssatzes (= effektiver Zinssatz) muss zunächst $q$ mit Hilfe des ***Newtonverfahrens*** berechnet werden. Der Zinssatz ergibt sich dann aus

$$p\% = q - 1$$

Insbesondere ist damit ist die 1. Frage beantwortet.

Zum Vergleich die Formeln aus der Ratenrechnung:

# 2.3.2 Nachschüssige Renten - Formeln

Übergang mit

- $S_0 = \bar{R}_0$
- $v = {}^1/_q$
- $a = \bar{r}$

## 2.3.2 Nachschüssige Renten - Formeln

**Aus der Hauptformel** der nachschüssige Rentenauszahlung:

- **Barwert:** $\bar{R}_0 = \bar{r} \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{1-v}$ (3.5.2)

folgen die Formeln für die einzelnen Komponente

- **Rate:** $\bar{r} = \frac{\bar{R}_0}{v} \cdot \frac{1-v}{1-v^n}$ (3.5.2)
- **Laufzeit:** $n = \frac{\ln\left(1 - \frac{\bar{R}_0 .(1-v)}{\bar{r} \cdot v}\right)}{\ln(v)}$ (3.5.2)
- **Zins:** Zur Berechnung des Zinssatzes muss zunächst $v$ mit Hilfe des Newtonverfahrens berechnet werden. Der Zinssatz ergibt sich dann aus $p\% = \frac{1-v}{v}$

# 2.4 Die Annuität

Für die Frage nach den Zins- und Tilgungsanteilen innerhalb der Annuität müssen wir einen Blick in ihr Inneres der werfen:

Die Annuität setzt sich jeweils aus einem Zinsanteil und einem Tilgungsanteil zusammen

**Annuität** $a$ in der $k$-ten Periode:

$$Annuität = Schuldzinsen\ auf\ Restschuld + Schuldtilgung$$

$$a = z_k + t_k$$

# 2.4 Die Annuität

**Annuität** $a$ in der $k-ten$ Periode:

$$a = z_k + t_k$$

- **Erste Beobachtung**:

Die Annuitäten haben eine konstante Höhe, aber die Anteile variieren von Periode zu Periode:

$$z_k \; sinkt \;\; und \;\; t_k \; steigt$$

Plopp

Die Veränderung wird im Tilgungsplan festgehalten:

| Restschuld am Anfang der Periode | Zinsen | Tilgung | Restschuld am Ende der Periode | Periode |
|---|---|---|---|---|
| $S_0$ | $z_1 = S_0 \cdot p\%$ | $t_1 = a - z_1$ | $S_1 = S_0 - t_1$ | 1 |
| $S_1$ | | | | 2 |
| … | | | | … |

# 2.4 Die Annuität

**Annuität** $a$ in der $k-ten$ Periode:

$$a = z_k + t_k$$

- **Zweite Beobachtung**:
  Am Ende der Laufzeit $n$ ist die Schuld getilgt, so dass die Anfangsschuld $S_0$ gleich der Summe der Tilgungen $t_k$ sein muss:

(II.43)
$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

- Restschuld am Ende des $k$-ten Jahres

(II.44)
$$S_k = S_0 - \sum_{j=1}^{k} t_j = \sum_{j=1}^{n} t_j - \sum_{j=1}^{k} t_j = \sum_{j=k+1}^{k} t_j$$

ist genau die Summe sämtlicher noch anstehender Tilgungen

# 2.4 Die Annuität

**Annuität** $a$ in der $k-ten$ Periode:

$$a = z_k + t_k$$

- **Dritte Beobachtung**

  **Tilgungsanteile** bilden eine ***geometrische Folge*** mit

$$t_k = t_{k-1} \cdot q = t_1 \cdot q^{k-1} \text{ für } k = 1,2, \dots n \qquad \text{(II.47)}$$

Wieso ?

Dazu betrachten zunächst den Übergang vom *ersten* zum *zweiten* Jahr:

$$t_1 = a - z_1 = a - S_0 \cdot p\% \quad \text{und} \quad S_1 = S_0 - t_1$$

$$t_2 = a - z_2 = a - S_1 \cdot p\% = a - (S_0 - t_1) \cdot p\% = a - z_1 + t_1 \cdot p\%$$
$$t_2 = t_1 + t_1 \cdot p\% = t_1 \cdot q$$

…

$$t_{j+1} = t_j \cdot q = t_{j-1} \cdot q^2 = \dots = t_{j-(j-1)} \cdot q^j = t_1 \cdot q^j \qquad \text{QED.}$$

# 2.4 Die Annuität

Annuität $a$ in der $k-ten$ Periode:

$$a = z_k + t_k$$

- **Vierte Beobachtung**

Für die Summe der Tilgungsanteile $s_k$ nach $k$ Jahren kommt die geometrische Reihe zum Einsatz

$$s_k := t_1 + t_2 + \cdots + t_k$$

gilt:

$$s_k = t_1 \cdot q^0 + t_1 \cdot q^1 + \cdots + t_1 \cdot q^{k-1}$$

$$s_k = t_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

Insbesondere gilt: $S_0 = s_n = t_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ und damit zusammen mit der Annuitätenformel $a = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$

$$\Rightarrow \qquad a = t_1 \cdot q^n = t_n \cdot q \qquad \text{(II.48)}$$

# 2.4 Die Annuität

**Annuität** $a$ in der $k-ten$ Periode:

$$a = z_k + t_k$$

3.7.1 Tilgungsplan bei annuitätischer Tilgung

| | Restschuld JA | Zinsen | Tilgung | Annuität | Restschuld JE |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $S_0$ | $z_1 = S_0 \cdot i$ | $t_1$ Anfangstilgung | $a = z_1 + t_1$ | $S_1 = S_0 - t_1$ |
| 2 | $S_1 = S_0 - t_1$ | $z_2 = S_1 \cdot i = (S_0 - t_1) \cdot i$<br>$= z_1 - t_1 \cdot i$ | $t_2 = a - z_2$<br>$= (z_1 + t_1) - (z_1 - t_1 \cdot i)$<br>$= t_1 \cdot (1 + i) = t_1 \cdot q$ | $a = z_2 + t_2$<br>$= z_1 + t_1$ | $S_2 = S_1 - t_2$ |
| 3 | $S_2 = S_1 - t_2$ | $z_3 = S_2 \cdot i$<br>$= z_2 - t_2 \cdot i$ | $t_3 = a - z_3$<br>$= (z_2 + t_2) - (z_2 - t_2 \cdot i)$<br>$= t_2 \cdot (1 + i)$<br>$= t_1 \cdot (1 + i)^2$ | $a = z_3 + t_3$<br>$= z_1 + t_1$ | $S_3 = S_2 - t_3$ |
| … | … | … | $\ldots = t_1 \cdot q^2$ | … | … |
| k | $S_{k-1} = S_{k-2} - t_{k-1}$ | $z_k = z_{k-1} - t_{k-1} \cdot i$ | $t_k = t_1 \cdot (1 + i)^{k-1}$<br>$= t_1 \cdot q^{k-1}$ | $a = z_k + t_k$<br>$= z_1 + t_1$ | $S_k = S_{k-1} - t_k$ |
| … | … | … | … | … | … |

Kopie aus Auer/Seitz

(FS)

# 2.4 Annuitätische Tilgungen

Mit Hilfe der Gleichung $a = t_1 \cdot q^n$ lassen sich die Formeln „vereinfachen“:

3.7.2 Formeln bei annuitätischer Tilgung

Restschuld nach k-Jahren: $S_k = S_0 - t_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$ oder $S_k = S_0 \cdot q^k - a \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$

Anfangsschuld: $S_0 = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

screenshot (FS)

Annuität: $a = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$ $(*)$

Summe Tilgungszahlungen: $\sum t_n = t_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Tilgung im k-ten Jahr: $t_k = t_1 \cdot (1+i)^{k-1} = t_1 \cdot q^{k-1}$ für $k = 1,2 \ldots, n$

Laufzeit: $n = \frac{\ln\left(1 - \frac{S_0 \cdot (1-q)}{t_1}\right)}{\ln q}$

Zinsen im k-ten Jahr:

# 2.4 Annuitätische Tilgungen

***Aufgabe 2*** ***Zinsanteil***

Ein Darlehen in Höhe von 100.000 Euro soll bei einem Zinssatz von 8 % p. a. über eine Laufzeit von 15 Jahren annuitätisch getilgt werden.

**a) Wie hoch ist die Zinsbelastung des Schuldners im 5. Jahr ?**

*Lösung* zu a)

1. Berechnung der Annuität:

$$a = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \qquad = 11.682{,}95\ €$$

2. Berechnung der Tilgung im 1. Jahr

$$t_1 = a - S_0 \cdot p\% \qquad = 3.682{,}95\ €$$

3. Berechnung der Tilgung im 5. Jahr

Tilgung im $k$-ten Jahr $t_k = t_1 \cdot q^{k-1}$ = 3.682,95 € * 1,08^4

= 5.010,62

4. Berechnung der Zinsbelastung im 5. Jahr

$z_k = a - t_k$ = 6.672,34

# 2.4 Annuitätische Tilgungen

***Aufgabe 2*** ***Zinsanteil***

Ein Darlehen in Höhe von 100.000 Euro soll bei einem Zinssatz von 8 % p. a. über eine Laufzeit von 15 Jahren annuitätisch getilgt werden.

**b) Wie hoch ist die Restschuld im 5. Jahr?**

*Lösung* zu b)

Benutze Restschuldformel $S_k = S_0 \cdot q^k - a \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$ für $k = 5$

$S_5 =$ 78.393,58 €

# 2.4 Annuitätische Tilgungen

***Aufgabe 2 Zinsanteil***

Ein Darlehen in Höhe von 100.000 Euro soll bei einem Zinssatz von 8 % p. a. über eine Laufzeit von 15 Jahren annuitätisch getilgt werden.

**c) Stellen Sie den Tilgungsplan auf**

$$a = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

| Jahre | Restschuld | Annuität | Zinsen | Tilgung | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.000,00 | | | | 8,000% |
| 1 | 96.317,05 | 11.682,95 | 8.000,00 | 3.682,95 | 8,000% |
| 2 | 92.339,45 | 11.682,95 | 7.705,36 | 3.977,59 | 8,000% |
| 3 | 88.043,66 | 11.682,95 | 7.387,16 | 4.295,80 | 8,000% |
| 4 | 83.404,19 | 11.682,95 | 7.043,49 | 4.639,46 | 8,000% |
| 5 | 78.393,58 | 11.682,95 | 6.672,34 | 5.010,62 | 8,000% |
| 6 | 72.982,11 | 11.682,95 | 6.271,49 | 5.411,47 | 8,000% |
| 7 | 67.137,72 | 11.682,95 | 5.838,57 | 5.844,39 | 8,000% |
| 8 | 60.825,78 | 11.682,95 | 5.371,02 | 6.311,94 | 8,000% |
| 9 | 54.008,89 | 11.682,95 | 4.866,06 | 6.816,89 | 8,000% |
| 10 | 46.646,65 | 11.682,95 | 4.320,71 | 7.362,24 | 8,000% |
| 11 | 38.695,43 | 11.682,95 | 3.731,73 | 7.951,22 | 8,000% |
| 12 | 30.108,11 | 11.682,95 | 3.095,63 | 8.587,32 | 8,000% |
| 13 | 20.833,80 | 11.682,95 | 2.408,65 | 9.274,31 | 8,000% |
| 14 | 10.817,55 | 11.682,95 | 1.666,70 | 10.016,25 | 8,000% |
| 15 | 0,00 | 11.682,95 | 865,40 | 10.817,55 | 8,000% |
| Σ | 940.553,97 | | 75.244,32 | 100.000,00 | |

# 2.4 Annuitätische Tilgungen

- in Excel

  Variante mit einer Annuität von $9.000$ €, Effektivzins $= \ 4{,}01\%$

| Jahr | Restschuld Vorjahr | Annuität | Zinsen / Gebühren | Tilgung | Restschuld am Jahresende | Zinssatz p.a. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100.000,00 € | 9.000,00 € | 4.009,36 € | 4.990,64 € | 95.009,36 € | 4,0094% |
| 2 | 95.009,36 € | 9.000,00 € | 3.809,27 € | 5.190,73 € | 89.818,63 € | 4,0094% |
| 3 | 89.818,63 € | 9.000,00 € | 3.601,16 € | 5.398,84 € | 84.419,79 € | 4,0094% |
| 4 | 84.419,79 € | 9.000,00 € | 3.384,70 € | 5.615,30 € | 78.804,49 € | 4,0094% |
| 5 | 78.804,49 € | 9.000,00 € | 3.159,56 € | 5.840,44 € | 72.964,05 € | 4,0094% |
| 6 | 72.964,05 € | 9.000,00 € | 2.925,39 € | 6.074,61 € | 66.889,44 € | 4,0094% |
| 7 | 66.889,44 € | 9.000,00 € | 2.681,84 € | 6.318,16 € | 60.571,28 € | 4,0094% |
| 8 | 60.571,28 € | 9.000,00 € | 2.428,52 € | 6.571,48 € | 53.999,80 € | 4,0094% |
| 9 | 53.999,80 € | 9.000,00 € | 2.165,05 € | 6.834,95 € | 47.164,85 € | 4,0094% |
| 10 | 47.164,85 € | 9.000,00 € | 1.891,01 € | 7.108,99 € | 40.055,86 € | 4,0094% |
| 11 | 40.055,86 € | 9.000,00 € | 1.605,99 € | 7.394,01 € | 32.661,85 € | 4,0094% |
| 12 | 32.661,85 € | 9.000,00 € | 1.309,53 € | 7.690,47 € | 24.971,38 € | 4,0094% |
| 13 | 24.971,38 € | 9.000,00 € | 1.001,19 € | 7.998,81 € | 16.972,57 € | 4,0094% |
| 14 | 16.972,57 € | 9.000,00 € | 680,49 € | 8.319,51 € | 8.653,07 € | 4,0094% |
| 15 | 8.653,07 € | 9.000,00 € | 346,93 € | 8.653,07 € | 0,00 € | 4,0094% |
| | 872.956,44 € | 135.000,00 € | 35.000,00 € | 100.000,00 € | 772.956,44 € | |

# 2.4 Annuitätische Tilgungen

- im Internet http://www.zinsen-berechnen.de/kreditrechner.php

Variante mit einer Annuität von 9.000 €

| Tilgungsplan | | | | Darstellung: | nur Jahressummen alle Monate |
|---|---|---|---|---|---|
| Jahr | Schuldenstand Vorjahr | Raten-zahlungen | davon Zinsen / Gebühren | davon Tilgung | Schuldenstand am Jahresende |
| 1 | 100.000,00 | 9.000,00 | 4.009,36 | 4.990,64 | 95.009,36 |
| 2 | 95.009,36 | 9.000,00 | 3.809,27 | 5.190,73 | 89.818,63 |
| 3 | 89.818,63 | 9.000,00 | 3.601,16 | 5.398,84 | 84.419,79 |
| 4 | 84.419,79 | 9.000,00 | 3.384,70 | 5.615,30 | 78.804,49 |
| 5 | 78.804,49 | 9.000,00 | 3.159,56 | 5.840,44 | 72.964,05 |
| 6 | 72.964,05 | 9.000,00 | 2.925,39 | 6.074,61 | 66.889,44 |
| 7 | 66.889,44 | 9.000,00 | 2.681,84 | 6.318,16 | 60.571,28 |
| 8 | 60.571,28 | 9.000,00 | 2.428,52 | 6.571,48 | 53.999,80 |
| 9 | 53.999,80 | 9.000,00 | 2.165,05 | 6.834,95 | 47.164,85 |
| 10 | 47.164,85 | 9.000,00 | 1.891,01 | 7.108,99 | 40.055,86 |
| 11 | 40.055,86 | 9.000,00 | 1.605,99 | 7.394,01 | 32.661,85 |
| 12 | 32.661,85 | 9.000,00 | 1.309,53 | 7.690,47 | 24.971,38 |
| 13 | 24.971,38 | 9.000,00 | 1.001,19 | 7.998,81 | 16.972,57 |
| 14 | 16.972,57 | 9.000,00 | 680,49 | 8.319,51 | 8.653,07 |
| 15 | 8.653,07 | 9.000,00 | 346,93 | 8.653,07 | 0,00 |
| Gesamt-summen | **100.000,00** | **135.000,00** | **35.000,00** | **100.000,00** | **0,00** |

# 2.4 Annuitätische Tilgungen

## *Aufgabe 3 Restschuld, Laufzeit, Annuität*

**Aufgabe II-24**

Ein Darlehen über 50.000 Euro wird jährlich mit 7,5 % verzinst. Am Ende eines jeden Jahres werden 7.000 Euro annuitätisch zurückgezahlt.

a) Berechnen Sie die Restschuld nach 10 Jahren!

b) Nach wie vielen Jahren ist die Schuld vollständig getilgt? Berechnen Sie die Restannuität im letzten Jahr!

c) Welche Annuität müsste 10 Jahre lang gezahlt werden, damit das Darlehen getilgt wäre?

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

***Aufgabe 1*** **Effektivzins, anfänglicher Tilgungsanteil**
Ein Kredit in Höhe von 10.000 € wird über 12 Monaten in nachschüssigen Raten zu 1.000 € mit monatlicher Zinsverrechnung zurückgezahlt.

(a) Berechnen Sie den effektiven Monatszins mit Hilfe des Newtonverfahrens.
Der Jahreszins beträgt etwa 20% $\Rightarrow \quad q \approx 1 + {}^{20\%}/_{12} = 1{,}01\overline{6} \approx 1{,}02$

(b) Wie groß ist in diesem Modell die anfängliche Tilgung ?

**Lösung (a)**

**STEP 1 (*Annuitätengleichung* aufstellen)**

$$a = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \qquad (*)$$

**STEP 2**: Werte aus der Aufgabe einsetzen:

$$1.000 = 10.000 \cdot q^{12} \cdot \frac{1-q}{1-q^{12}}$$

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

***Aufgabe 1*** **Effektivzins, anfänglicher Tilgungsanteil**
Ein Kredit in Höhe von 10.000 € wird über 12 Monaten in nachschüssigen Raten zu 1.000 € mit monatlicher Zinsverrechnung zurückgezahlt.

(a) Berechnen Sie den effektiven Monatszins mit Hilfe des Newtonverfahrens.
Der Jahreszins beträgt etwa 20% $\Rightarrow$ $q \approx 1 + {}^{20\%}/_{12} = 1{,}01\overline{6} \approx 1{,}02$

(b) Wie groß ist in diesem Modell die anfängliche Tilgung ?

**Lösung (a)**

**STEP 3**: Umstellen und vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
1 - q^{12} &= 10 \cdot q^{12} \cdot (1 - q) \\
1 - q^{12} &= 10 \cdot q^{12} - 10 \cdot q^{12} \cdot q \\
0 &= 1 - 11 \cdot q^{12} + 10 \cdot q^{13}
\end{aligned}
$$

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

**Lösung (a)**

**STEP 4 (*effektiver Monatszins*)**

Newtonverfahren für $f(x) = 10x^{13} - 11x^{12} + 1$ mit Startwert in der Nähe der vermuteten Nullstelle $x = 1{,}02.$

| $\boldsymbol{step\#}$ | $\boldsymbol{x}$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)/f'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0200000 | -0,0145934 | 14,4231420 | -0,0010118 |
| 2 | 1,0210118 | -0,0137511 | 14,7466456 | -0,0009325 |
| … | … | … | … | … |
| 60 | 1,0292285 | -0,0000001 | 17,57234819 | 0,0000000 |

**Antwort (a)**: der monatliche Effektivzins beträgt ungefähr 2,92%

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

***Aufgabe 1*** **Effektivzins, anfänglicher Tilgungsanteil**
Ein Kredit in Höhe von 10.000 € wird über 12 Monaten in nachschüssigen Raten zu 1.000 € mit monatlicher Zinsverrechnung zurückgezahlt.

(a) Berechnen Sie den effektiven Monatszins mit Hilfe des Newtonverfahrens.
Der Jahreszins beträgt etwa 20% $\Rightarrow \quad q \approx 1 + {}^{20\%}/_{12} = 1{,}01\overline{6} \approx 1{,}02$

(b) Wie groß ist in diesem Modell die anfängliche Tilgung ?

**Lösung (a) - STEP 5 (optional: *effektiver Jahreszins*)**

Hochrechnen des monatliche Effektivzinses auf den jährlichen Effektivzins (gemäß PAngV)

$$1 + p_{eff}\% = (102{,}92\%)^{12} \approx 141{,}25\%$$

$$p_{eff}\% \approx 41{,}25\%$$

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

***Aufgabe 1*** **Effektivzins, anfänglicher Tilgungsanteil**
Ein Kredit in Höhe von 10.000 € wird über 12 Monaten in nachschüssigen Raten zu 1.000 € mit monatlicher Zinsverrechnung zurückgezahlt.

(a) Berechnen Sie den effektiven Monatszins mit Hilfe des Newtonverfahrens.
Der Jahreszins beträgt etwa 20% $\Rightarrow$ $q \approx 1 + {}^{20\%}/_{12} = 1{,}01\overline{6} \approx 1{,}02$

(b) Wie groß ist in diesem Modell die anfängliche Tilgung ?

**Lösung (b)**

STEP 6: Anfängliche Tilgung

$$t_1 = a - S_o \cdot p\% = 1.000 - 10.000 \cdot 2{,}92\%$$
$$= 708\ €$$

**Antwort (b):** Der anfängliche Tilgungsanteil beträgt 708 €

# 2.4 Ratenkredite & Ann. Tilgungen

***Aufgabe 1*** **Effektivzins, anfänglicher Tilgungsanteil**
Ein Kredit in Höhe von 10.000 € wird über 12 Monaten in nachschüssigen Raten zu 1.000 € mit monatlicher Zinsverrechnung zurückgezahlt.

**STEP 7: (optional: *Tilgungsplan*)** Stellen Sie einen Tilgungsplan mit $p\% = 2{,}92\%$ auf
→ Hausaufgabe

| Restschuld am Anfang der Periode | Zinsen | Tilgung | Restschuld am Ende der Periode | Periode |
|---|---|---|---|---|
| 10.000,00 € | 292,00 € | 708,00 € | 9.292,00 € | 1 |
| 9.292,00 € | | | | 2 |
| … | | | | … |
| 969,28 € | 55,87 € | 944,13 € | -2,41 € | 12 |

# 2.4 Annuitätische Tilgungen - Abschluss

Die $(*)$ *Annuitätenformel* $a = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$ enthält 4 Komponenten

| Annuität | Periodenzinssatz |
|---|---|
| $a$ | $p\% = q - 1$ |
| **Darlehen** | **Laufzeit** |
| $S_0$ | $n$ |

✓ Bei gegebenem Zinssatz lassen sich alle Aufgaben gemäß der angegebenen Formeln lösen

- Achtung: die Formeln benutzen immer den **Periodenzins**, der ggf. noch aus den Angaben der Aufgabe errechnet werden muss.
- Achtung: bei gegebenem Zinssatz muss der Tilgungsplan nicht immer aufgehen. Die Restschuld im letzten Jahr kann kleiner sein als die Rate. Dadurch kann ein Guthaben des Kunden entstehen, dessen Verrechnung geklärt werden muss.

○ Ist der Zinssatz ***nicht*** gegeben, muss zuerst $q$ mit Hilfe des Newtonverfahrens näherungsweise bestimmt werden.

# 2.4 Annuitätische Tilgungen  - Schluss

**Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit**