Agenda

Finanzmathematik

✓ 1. Zinsen auf Einmalzahlungen
  - Geld & Zeit = Zinsen
  - Zinsmodelle

- 2. Raten &Renten
  - Im Zinseszinsmodell (geometrische Reihe)
  - Kombinationen aus Finanzprodukten

- 3. Annuitäten

2.1 Unterjährige Mehrfachzahlungen

- Bei Mehrfachzahlungen ist grundsätzlich jede einzelne Zahlung gesondert im gewählten Zinsmodell zu betrachten.

- Nur selten ….
  kann man die notwendigen Berechnungen der einzelnen Raten zusammenfassen oder vereinfachen.

- **Bezeichnungen**:
  Eine regelmäßig jeden Monat periodisch wiederkehrende Zahlung wird als ***Rate*** bezeichnet und ab jetzt bezeichne der Buchstabe $\boldsymbol{r}$ die Rate.

- **Hinweis** : Zahlungsrhythmus muss nicht mit der Zinsverrechnung synchron sein.

Aufgaben

Ohne Formel

Aufgabe 1.20 (aperiodische unterjährige Einzahlung)

Donald (Sandra & Wolfgang) haben im letzten Jahr die nebenstehenden drei Beträge zu den genannten Terminen auf ihr Konto eingezahlt.

Zins p.a.	3%
Einzahlung nach ...Monaten	Betrag
0	50.000,00 €
6	100.000,00 €
11	30.000,00 €
Σ	180.000,00 €

1. Wie hoch ist der Kontostand am Ende des Jahres bei
(a) Jährlicher Zinsverrechnung
(b) Monatlicher Zinsverrechnung
(c) Kontinuierliche Zinsverrechnung ?

2. Welchen Betrag hätten Sie jeweils einmalig zu Beginn des Jahres einzahlen müssen, um den selben Kontostand zu erreichen ?

3. Wieviel Zinsen fallen auf den verschiedenen an ?

4. Wie hoch ist jeweilige „Effektivzins“ ?

Lösung: siehe excel

2.2 Raten & Renten im Zinseszinsmodell

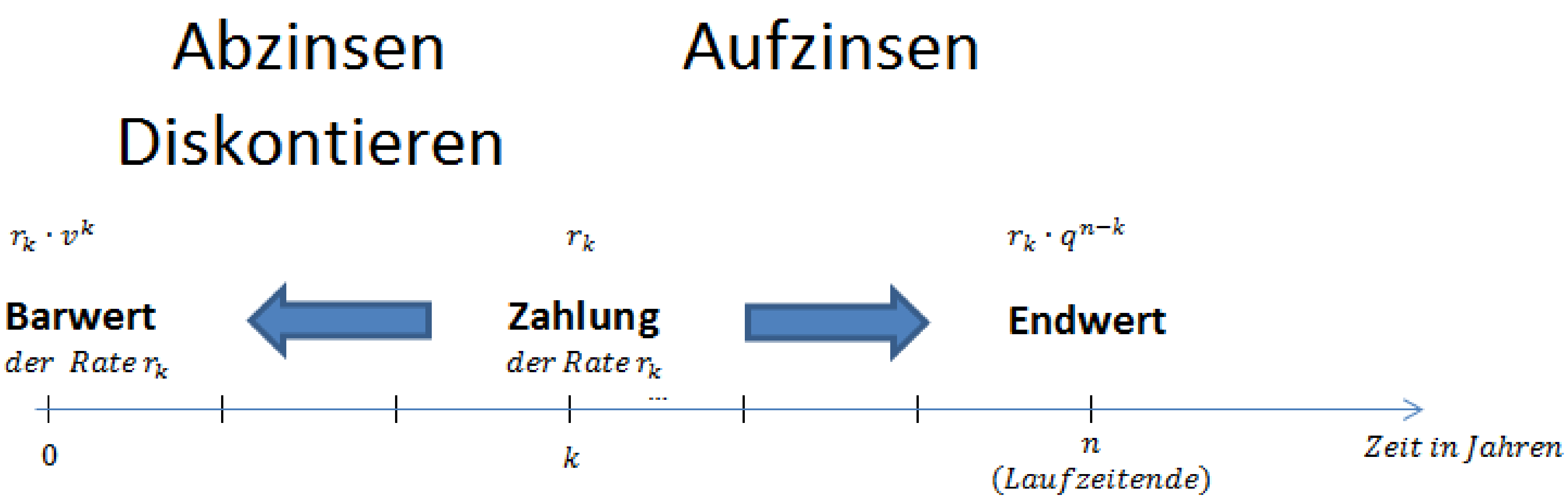
Zahlungen zu den Zinsverrechnungsterminen

im diskreten Zinsmodell (geometrische Reihe)

2.2 Periodentreue Raten und Renten

Zahlungen zu den Zinsverrechnungsterminen = exponentielles diskretes Zinsmodell

Alle Raten werden einzeln betrachtet und durch Auf- oder Abzinsen auf den selben Zeitpunkt verschoben.



Nur selten kann man bei Mehrfachzahlungen die notwendigen Berechnungen für Barwert und Endwert der einzelnen Raten zusammenfassen und/oder vereinfachen.

Aufgaben

Aufgabe 2.9 (quartalsw. Zinsverrechnung und quartalsw. Einzahlung - Zinseszins)
Ein einjähriger Zielsparvertrag setzt eine vorschüssige [nachschüssige], quartalsweise Einzahlung von 200 Euro voraus. Die Bank bietet einen Zins von 5 % p. a.
Die Zinsen werden am Ende jedes Quartals gutgeschrieben.
Wie hoch ist das Kapital am Ende des Jahres ?

Lösung: Berechne die Endwerte aller Raten im Zinseszins-Modell mit $m = 4$

1. Rate: $200 \cdot \left(1 + \frac{5\%}{4}\right)^4 = 210{,}19$ €
2. Rate: $200 \cdot \left(1 + \frac{5\%}{4}\right)^3 = 207{,}59$ €
3. Rate: $200 \cdot \left(1 + \frac{5\%}{4}\right)^2 = 205{,}03$ €
4. Rate: $200 \cdot \left(1 + \frac{5\%}{4}\right)^1 = 202{,}50$ €

Antwort: Am Ende des Jahres hat sich ein Kapital in Höhe von 825,31€ angesammelt [nachschüssig: 815,12 €].

Exkurs: Geometrische Folgen

Eine Folge heißt **geometrisch**, wenn zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder das selbe „Verhältnis“ haben

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad q = \mathit{Quotient}$$

Mit anderen Worten:

(2.2) $a_{n+1} = a_n \cdot q$ *mit konstantem* $q \in \mathbb{R}^*$ *und* für *alle* $n \in \mathbb{N}$

Wie lautet das Bildungsgesetz?

STEP 1: betrachte die ersten Glieder der geometrischen Folge:

Startwert $= a_1$

weitere Werte: $a_2 = a_1 \cdot q, \qquad a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2, \quad \ldots$

STEP 2: Bildungsgesetz der arithmetischen Folge:

(2.2) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ für *alle* $n \in \mathbb{N}$

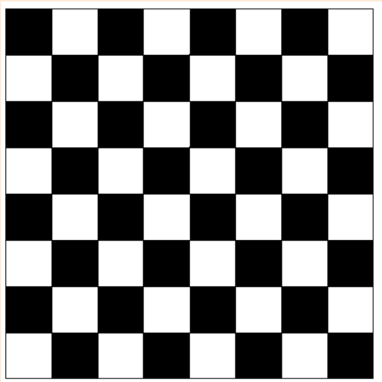
Exkurs: Geometrische Reihen

- **Geometrische Reihe** (n-Teilsumme der geometrischen Reihe):

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \qquad (2.2)$$

$$s_n = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1})$$

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$



Beispiel: $a_1 = 1,\ q = 2,\ n = 64$

$$s_n = \frac{1 - 2^k}{1 - 2} = 2^k - 1$$

Exkurs: Herleitung des Bildungsgesetzes

Geometrische Reihe
mit $q \neq 1$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\Leftrightarrow s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad |a_1 \text{ ausklammern}$$

$$\Leftrightarrow s_n = a_1 \cdot \underbrace{\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right)}_{u_n}$$

$$u_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \quad |\cdot q$$

$$u_n \cdot q = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n \quad |-u_n$$

$$u_n \cdot q - u_n = q^n - 1 \quad |u_n \text{ ausklammern}$$

$$u_n \cdot (q-1) = q^n - 1 \quad |:(q-1)$$

$$u_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad |\cdot \frac{-1}{-1}$$

$$u_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \quad |\cdot a_1$$

$$s_n = a_1 \cdot u_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad \text{mit } q \neq 1$$

Wichtiges Ergebnis für viele Anwendungen / Aufgaben:

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$$

Grenzwert $n \longrightarrow \infty$?

Aufgaben

Aufgabe 2.10 Sparverträge im Zinseszins-Modell
Wie hoch müsste der jährlich gleichbleibende Einzahlungsbetrag jeweils zum 01.01. eines Jahres bei einem Bausparvertrag mindestens sein, um bei einem Zinssatz von 3,0 % p. a. und einer Laufzeit von 15 Jahren ein Endkapital von über 25.000 Euro zu erhalten?

Lösung:

$$K_n = r \cdot q^{15} + r \cdot q^{14} + \cdots + r \cdot q^1 = r \cdot q \cdot \frac{1 - q^{15}}{1 - q}$$

Die gegebenen Größen einsetzen und die Gleichung nach r auflösen.

Antwort: Der jährlich gleichbleibende Einzahlungsbetrag müsste mindestens 1.305,02 € betragen.

Probe:

$$K_n = r \cdot q \cdot \frac{1 - q^{15}}{1 - q}$$ = 1305,02 ∗ 1,03 * (1,03^15-1)/0,03 = 25000,11

Aufgaben

Ähnlich zu Aufgabe II-21

Sie haben in einer Lotterie gewonnen. Als Hauptpreis können Sie unter folgenden Alternativen wählen:

(A) Zahlung von 20 Raten à 300.000€, jeweils zum Jahresbeginn
(B) Einmalige Zahlung von 3Mio.€

1. Für welche Alternative würden Sie sich entscheiden, wenn der zugrunde liegende Prozentsatz 8% betragen würde ?
   Berechnen Sie dazu den Barwert beider Alternativen.

Lösung später

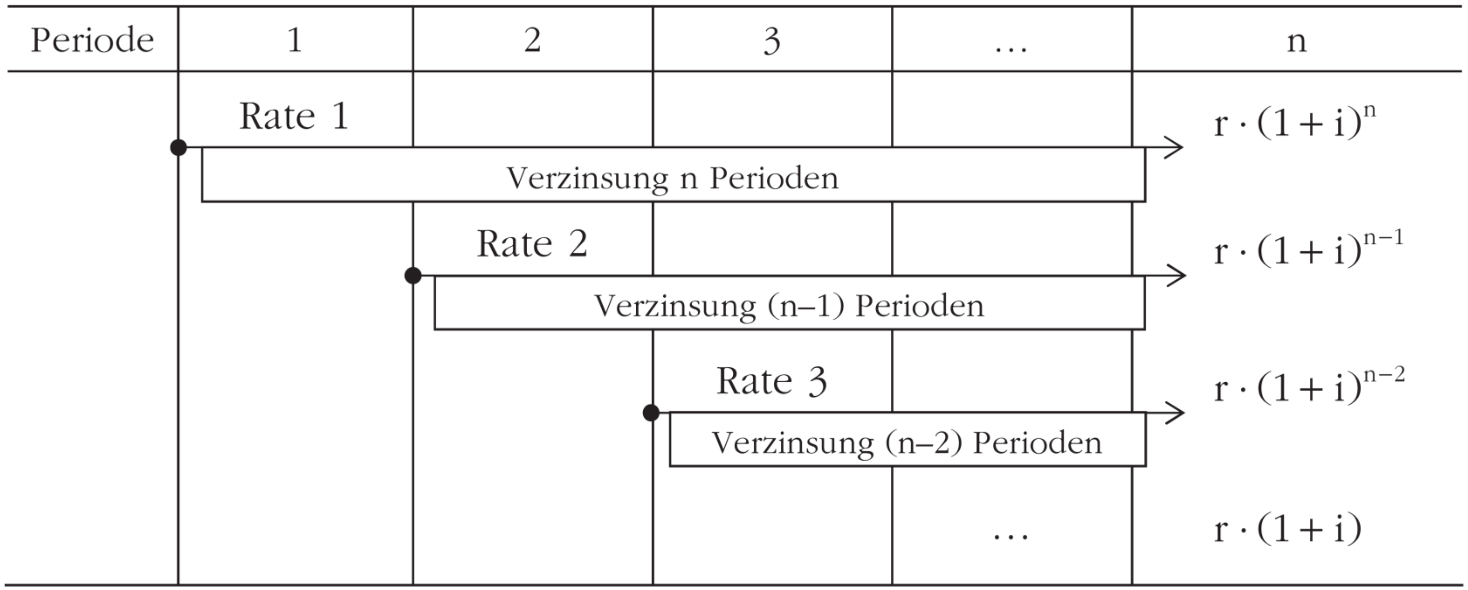
2. Vergleichen Sie beide Alternativen, indem Sie das Endkapital nach 20 Jahren berechnen, wenn das Geld vollständig zu 8% p.a. angelegt würde.

3. Ab welchem Zinssatz lohnt sich die Annahme der Einmalzahlung ?

2.2.1 Vorschüssige Raten

Wird jeweils *zu Beginn einer Zinsperiode (vorschüssig)* dieselbe Rate r eingezahlt, so lässt sich der ***<u>Endwert</u>*** bei einer Verzinsung mit dem Periodenzinssatz $i = p_{REL}\%$ nach n Perioden veranschaulichen als:

Endkapital bei **vorschüssigen** Ratenverträgen



Der Endwert einer Ratenstaffel ist die Summe der Endwerte aller Raten.

2.2.1 Vorschüssige Raten

<u>Endwert</u> K_E einer (vorschüssigen) Ratenzahlung mit konstanten Einzahlungen (Raten) r und mit konstanter Verzinsung $i = p\%$ über n Perioden ist die Summe aller aufgezinsten Raten:

$$K_E = r \cdot (1+i)^n + r \cdot (1+i)^{n-1} + \ \dots \ + r \cdot (1+i)^2 + r \cdot (1+i)^1$$

mit $q := 1 + i$ erhalten wir

$$K_E = r \cdot q^n + r \cdot q^{n-1} + \ \dots \ + r \cdot q^2 + r \cdot q^1$$

$$K_E = r \cdot q \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \ \dots \ + q^1 + q^0)$$

$$K_E = r \cdot q \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \ \dots \ + q \ + 1)$$

und schließlich durch Anwendung der Formel $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$ für die geometrischen Reihe

$$K_E = r \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (3.4.1)$$

2.2.1 Vorschüssige Raten

❖ **Aufgaben 2.11 - 2.16**

Formelsammlung

- nach r auflösen:

$$r = \frac{K_n}{q} \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \qquad (3.4.1)$$

- nach n auflösen:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{(q-1)\cdot K_n}{r \cdot q}\right)}{\ln q} \qquad (3.4.1)$$

- nach q auflösen:
  Höhe der Verzinsung: Lösung der Gleichung $(n+1)$-ten Grades:

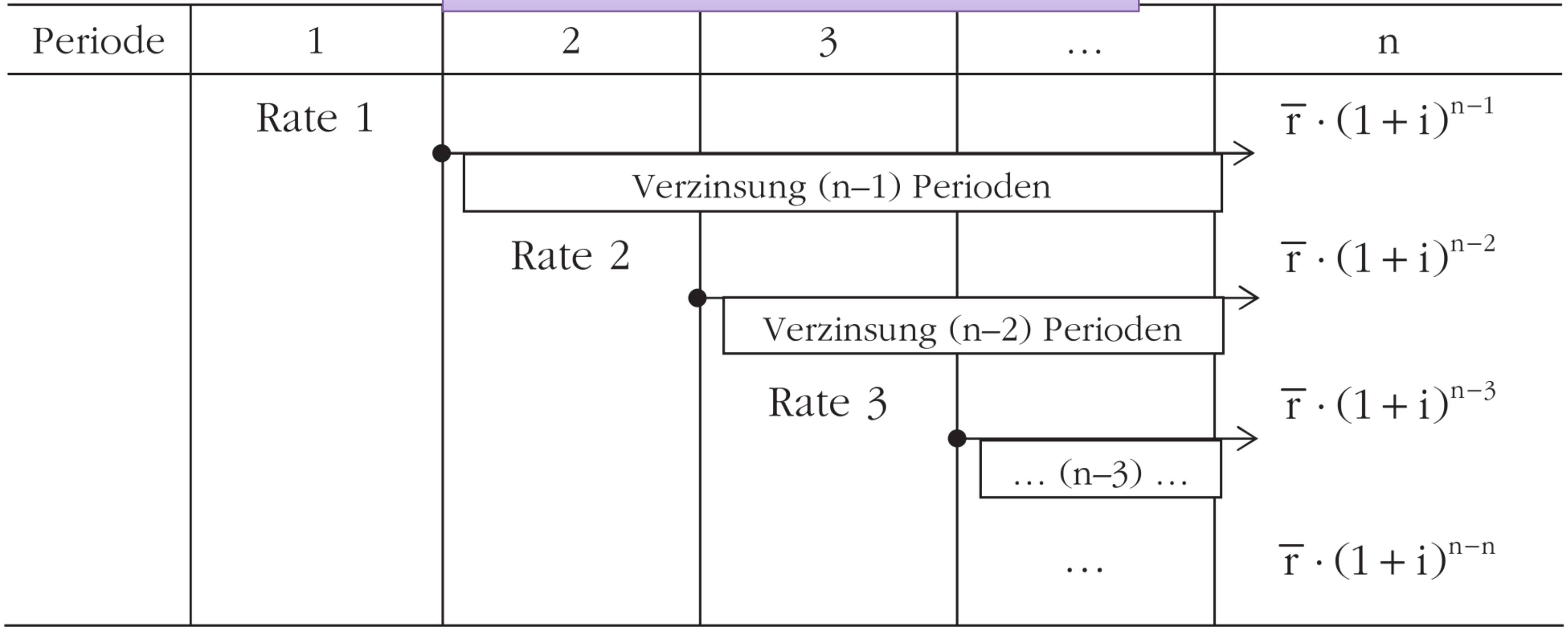
$$q^{n+1} - \frac{K_n + r}{r} \cdot q + \frac{K_n}{r} = 0 \qquad \text{(II.25)}$$

Keine analytische Lösung
Lösung nur approximativ mittels numerischer Verfahren möglich
(→ vgl. Kap. III).

2.2.2 Nachschüssige Raten

- **Nachschüssige Einzahlungen**: Raten $\overline{r}$ werden erst am Ende der Periode geleistet.

Endkapital bei **nachschüssigen** Ratenverträgen



Unterschied zur vorschüssigen Einzahlung:
Alle Raten werden eine Periode weniger verzinst => $K_n = \overline{K}_n \cdot q$

2.2.2 Nachschüssige Raten

- **Endwert einer** nachschüssigen **Ratenzahlung**

$$\overline{K}_n = \bar{r}\cdot(1+i)^{n-1} + \bar{r}\cdot(1+i)^{n-2} + \ldots + \bar{r}\cdot(1+i) + \bar{r}$$

$$K_n = \overline{K}_n \cdot q$$

- **Endwert einer Ratenzahlung mit konstanten** nachschüssigen **Einzahlungen** (Raten) r und **konstanter Verzinsung** i über n Jahre:

$$\overline{K}_n = \bar{r}\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{mit } q \equiv (1+i) \neq 1$$

(3.4.2)

$$\bar{r} = \overline{K}_n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

(3.4.2)

$$n = \frac{\ln\left(1+\frac{(q-1)\cdot\overline{K}_n}{\bar{r}}\right)}{\ln q}$$

(3.4.2)

Aufgaben

Aufgabe 2.15 Sparverträge mit nachschüssigen Raten
Wie viele Jahre muss in einen Ratensparvertrag (Einzahlung von 500 Euro jeweils zum Jahresende) eingezahlt werden, um bei einem Zinssatz von 4 % p. a. ein Endkapital von mindestens 15.500 Euro zu erzielen?

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{(q-1)\cdot \overline{K}_n}{\overline{r}}\right)}{\ln q} = \frac{ln\left(1+0{,}04\cdot \frac{15500}{500}\right)}{ln(1{,}04)}$$

$$= 20{,}56249877$$

Antwort: Es müsste mindestens 21 Jahre eingezahlt werden.

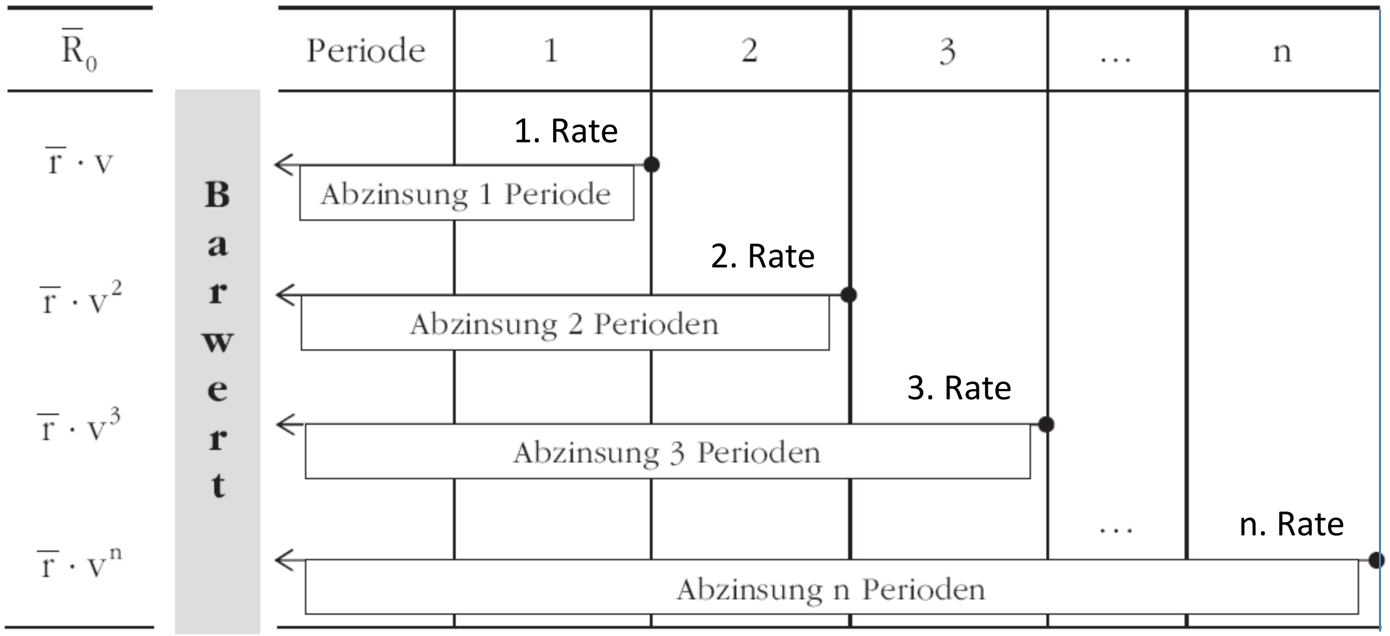
Probe:

$$\overline{K}_n = \overline{r} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

K_{20} = 500*(1-1,04^20)/1-1,04) = 14889,04
K_{21} = 500*(1-1,04^21)/1-1,04) = 15984,60

2.2.3 Barwert von Raten

- Abzinsung der nachschüssigen Raten lässt sich wieder in einem Diagramm veranschaulichen:



Der Barwert einer Ratenstaffel ist die Summe der Barwerte aller Raten.

2.2.3 Barwert von Raten

<u>Barwert</u> K_A einer nachschüssigen Ratenzahlung

mit konstanten Einzahlungen (Raten) r und mit konstanter Verzinsung $i = p\%$ je Periode über n Perioden …. ist die Summe der Barwerte aller Raten:

mit dem Abzinsfaktor $v := \frac{1}{q} = \frac{1}{1+p\%}$ erhalten wir

$$K_A = r \cdot v^n + r \cdot v^{n-1} + \ \dots + r \cdot v^2 + r \cdot v^1$$

$$K_A = r \cdot v \cdot (v^{n-1} + v^{n-2} + \ \dots + v^1 + 1)$$

und schließlich durch Anwendung der Formel $s_n = \frac{1-v^n}{1-v}$ für die geometrischen Reihe

$$\boxed{K_A = r \cdot v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}}$$

<u>Barwert</u> einer vorschüssigen Ratenzahlung (einmal weniger abgezinst)

$$\boxed{K_A = r \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}}$$

Aufgaben

Aufgabe 2.14 Ratenkauf - „Ich bin doch nicht blöd!" -
Ein Elektronikmarkt bietet das XPhone10 für 479 € an.
Welche monatliche Rate müssen Sie bezahlen, wenn sie das Finanzierungsangebot mit einem effektivem Jahreszins von **0%** annehmen und der Kauf nach einem Jahr abgeschlossen sein soll?
Die Ratenzahlungen sollen planmäßig am Monatsende erfolgen.

Lösung:
479 : 12 = 39,916

Antwort:
Das XPhone10 kann durch 12 Raten à 39,92 € bezahlt werden.

Aufgaben

Aufgabe 2.14 Ratenkauf - „Ich bin doch nicht blöd!“ -

Ein Elektronikmarkt bietet das XPhone10 für 479 € an.

Welche monatliche Rate müssen Sie bezahlen, wenn sie das Finanzierungsangebot mit einem effektivem Jahreszins von **1%** annehmen und der Kauf nach einem Jahr abgeschlossen sein soll?

Die Ratenzahlungen sollen planmäßig am Monatsende erfolgen.

Lösung:

Erst den effektiven Periodenzins, dann den Barwert der Ratenstaffel berechnen …. der Barwert der Ratenstaffel muss gerade
genau 479 € betragen.

Antwort:

Es wird teurer: 40,13 €

Ergebnis		
	Die erforderliche regelmäßige Rate beträgt:	**40,13** Euro (monatlich)
	Nominaler Jahreszinssatz:	**0,995** % p.a.
?	Zinsen und Gebühren gesamt:	**2,59** Euro
?	Gesamtaufwand:	**481,59** Euro
?	Effektiver Jahreszinssatz:	**1,000** % p.a. (interner Zinssatz, IRR)

2.2. Periodentreue Raten und Renten

Zahlungen zu den Zinsverrechnungsterminen am Ende der Conversion Period = diskretes exponentielles Zinsmodell

Zusammenfassung

Laufzeit in Jahren resp. Anzahl der Zinsperioden	n
Periodenzins	$i = p\%$
Aufzinsfaktor	$q = 1 + p\%$
Abzinsfaktor	$v = 1/q$

		(A) Vorschüssig	(B) Nachschüssig
Endkapital	$K_n = \bar{K}_n \cdot q$	$K_n = r \cdot q \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$	$\bar{K}_n = r \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$
Barwert	$K_o = \bar{K}_o \cdot q$	$K_o = r \cdot \dfrac{1-v^n}{1-v}$	$\bar{K}_o = r \cdot v \cdot \dfrac{1-v^n}{1-v}$
Modell		$K_o \xrightarrow{\cdot q^n} K_n$	$\bar{K}_o \xrightarrow{\cdot q^n} \bar{K}_n$

Aufgaben

Ähnlich zu Aufgabe II-21

Sie haben in einer Lotterie gewonnen. Als Hauptpreis können Sie unter folgenden Alternativen wählen (unterstellen Sie jährliche Zinsverrechnung):

(A) Zahlung von 20 Raten à 300.000€, jeweils zum Jahresbeginn
(B) Einmalige Zahlung von 3Mio.€

1. Für welche Alternative würden Sie sich entscheiden, wenn der zugrunde liegende Prozentsatz 8% p.a. betragen würde ?
   Berechnen Sie dazu den *Barwert* beider Alternativen.

2. Vergleichen Sie beide Alternativen, indem Sie das *Endkapital* nach 20 Jahren berechnen, wenn das Geld vollständig zu 8% p.a. angelegt würde.

3. Ab welchem Zinssatz lohnt sich die Annahme der Einmalzahlung ?

Agenda

Finanzmathematik

- 1. Zinsen auf Einmalzahlungen
  - ☑ Geld & Zeit = Zinsen
  - ☑ Zinsmodelle
- 2. Raten & Renten
  - ☑ Im Zinseszinsmodell (geometrische Reihe)
  - – Finanzprodukte
- 3. Annuitäten

Danke für ihre Aufmerksamkeit