Finanzmathematik

- Zinsen auf Einmalzahlungen
  - Geld & Zeit = Zinsen
  - Zinsmodelle (klassisch +Euler)
  - Kennzahlen & Logarithmische Rendite

Aufgaben 1.1 – 1.17, 1.18 = II- 10, 1.19-1.20

Aufgabe - gemischt

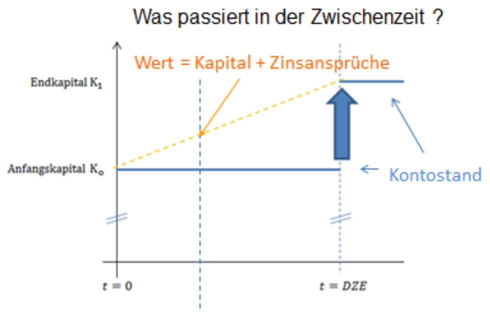
Aufgabe 1.12

K_E

Ein Guthaben von 1.200 Euro wird zu einem Zinssatz von 4% p.a. für einen bestimmten Zeitraum festgelegt. Wie hoch ist der Wert der Anlage nach …

a) einem Jahr ? 1248 €
b) einem halben Jahr ? 1224 €
c) einem viertel Jahr ? 1212 €
d) einem Monat ? 1204 €
e) 7 Monaten ? 1228 €
f) 5 Jahren ? 1440 €

a)- f) ohne Zinsverrechnung (ZV)



g) 5 Jahren mit jährlich-nachträglicher ZV ? $1200 \cdot (1+4\%)^5 = 1459{,}98$ €

h) 5 Jahren mit monatlich-nachträglicher ZV ? $1200 \cdot \left(1+\frac{4\%}{12}\right)^{60} = 1465{,}20$ €

i) 5 Jahren mit kontinuierlicher ZV ? $1200 \cdot e^{5 \cdot 4\%} = 1465{,}68$ €

j) 70 Quartale mit quartalsweise-nachträgl. ZV ? $1200 \cdot (1+1\%)^{70} = 2408{,}12$ € $\approx 2 \cdot 1200$ €

k) 50 Tagen für act/act [30/360] 1206,58 € [1206,67 €]

Aufgabe – FRITZ – Modelle im Vergleich

Fritz hat vier Banken mit gleichem Nominalzinssatz von 2,5%, aber mit unterschiedlichen Verrechnungsmodalitäten, zur Auswahl

pEFF

Bank A mit Zinsverrechnung erst am Ende der Laufzeit
Bank B mit jährlicher Zinsverrechnung
Bank C mit monatlicher Zinsverrechnung
Bank D mit kontinuierlicher Zinsverrechnung

Was würden Sie Fritz raten ?
Welche Bank bietet die höchste Jahresrendite ?

Antwort:
Dank der Zinseszinseffekte erhält man bei unterjähriger Zinsverrechnung höhere Renditen.
Die maximale Rendite erhält man bei kontinuierlicher Zinsverrechnung.
Empfehlung: Bank D

Aufgabe – FRITZ – Modelle im Vergleich

Fritz hat vier Banken mit gleichem Nominalzinssatz von 2,5% p.a., aber mit unterschiedlichen Verrechnungsmodalitäten, zur Auswahl

Bank A	mit Zinsverrechnung erst am Ende der Laufzeit
Bank B	mit jährlicher Zinsverrechnung
Bank C	mit monatlicher Zinsverrechnung
Bank D	mit kontinuierlicher Zinsverrechnung

- Fritz legt heute 4.000.- € zu 2,5% p.a. an.
  Wie hoch ist sein Guthaben nach 9 Jahren ?
  Wo gibt es das größte Guthaben ?

K_E

- Wieviel Anfangskapital müsste er bei diesen Banken jeweils einzahlen, damit er nach 10 Jahren über ein Guthaben von 15.000 € verfügt ?

K_A

Aufgabe – FRITZ – Modelle im Vergleich

Fritz hat vier Banken mit gleichem Nominalzinssatz von 2,5% p.a., aber mit unterschiedlichen Verrechnungsmodalitäten, zur Auswahl

Bank A	mit Zinsverrechnung erst am Ende der Laufzeit
Bank B	mit jährlicher Zinsverrechnung
Bank C	mit monatlicher Zinsverrechnung
Bank D	mit kontinuierlicher Zinsverrechnung

- Fritz legt heute 4.000.- € zu 2,5% p.a. an. Nach wie vielen ***Jahren*** ist sein Guthaben auf über 5.000 € angewachsen ?

T

- Fritz sucht eine Bank, die im genügend Zinsen bietet, damit aus seinen 4.000 € , die er heute einzahlen würde, in 5 Jahren ein Guthaben von über 5.000 € entstehen würde.
  Welchen ***Zinssatz*** müsste die Bank entsprechend ihrer Verrechnungsmodalitäten anbieten ?

p%

Aufgabe – FRITZ – Modelle im Vergleich

Lösung mit Excel:

	K_E	K_A	p%	T	
KE		15.000,00 €	5.000,00 €	5.000,00 €	
KA	4.000,00 €		4.000,00 €	4.000,00 €	
i	*2,50%*	*2,5%*		*2,5%*	
T	9	10	5		
linear	4.900,00 €	12.000,00 €	5,000%	10,000	10
jährlich	4.995,45 €	11.717,98 €	4,564%	9,037	10
monatl.	5.008,12 €	11.685,05 €	4,471%	8,935	9
kontinuierlich	5.009,29 €	11.682,01 €	4,463%	8,926	9

Weitere Aufgaben mit Lösungen im Internet, z.B. :
http://fbmathe.bbs-bingen.de/Zinsrechnung/uebung_zinsrechnung.htm
http://www.brinkmann-du.de/mathe/aufgabenportal/p0_zinseszins_01/p0_zinseszins_01.htm

Aufgabe – FRITZ 2

Fritz legt sein Kapital in Höhe von 10.000 € auf einem Tagesgeldkonto mit vierteljährlicher Zinsverrechnung für 1,5 Jahre angelegt.

(a) Wie hoch ist das Kapital am Ende der Laufzeit bei ein Zinssatz von 3% p.a. ?

K_E

(b) Welche effektive Jahresrendite („Effektivzins") wird auf diesem Konto erzielt ?

pEFF

Lösung:

(a) $M = nm = 1{,}5 \cdot 4 = 6 \Rightarrow$ Die Laufzeit enthält 6 Quartale.

$$K_{1,5} = 10.000 \cdot (1 + 0{,}75\%)^6 = 10.458{,}52\ €$$

(b) $p_{EFF}\% = \ (1 + 0{,}75\%)^4 - 1 \ = 1{,}0075^4 - 1 = 0{,}030339191 = 3{,}03\%$

Aufgabe – FRITZ 2

Fritz legt sein Kapital in Höhe von 10.000 € auf einem Tagesgeldkonto mit vierteljährlicher Zinsverrechnung für 1,5 Jahre angelegt.

(b) Welche Jahresrendite („Effektivzins“) wird auf diesem Konto erzielt ?

pEFF

Alternative Lösungen :

Alternative 1: $$p_{EFF}\% = \sqrt[1,5]{\frac{10.458,52}{10.000}} - 1 = 0,030339191 = 3,03\%$$

Alternative 2: $$K_1 = 10.000 \cdot (1 + 0,75\%)^4 = 10.303,39191$$

Rendite: $$r = \frac{K_1}{K_0} - 1 = \frac{10.303,39191}{10.000} - 1$$

$$r = 1,030339191 - 1$$

$$r = 0,030339191 = 3,03\%$$

Aufgaben

Aufgabe 1.13 - Beispiel aus dem Internet
Das anfängliches Kapital $K_0 = 20.000\,€$ erhöht sich zum Zeitpunkt der Zinsverrechnung (hier: nach einem Vierteljahr) um 1% und ebenso in den nachfolgenden Quartalen.

Zinsen p.a.	Zins gültig bis		Zinsgut-schrift
	Einlage	Datum	
4,00%	20.000,- Euro	12 Monate	viertel-jährlich

$$K_{t=0} \xrightarrow{1+1\%} K_{t={}^1/_4} \xrightarrow{1+1\%} K_{t={}^2/_4} \xrightarrow{1+1\%} K_{t={}^3/_4} \xrightarrow{1+1\%} K_{t=1}$$

K_E

Wie viele € erhalte ich am Ende des Jahres ?

Lösung: $n = 1,\; m = 4,\; p\% = 4\%,\; K_1 = 20.000 \cdot (1+1\%)^4 = 20.812{,}08\,€$

Wie groß ist Jahresrendite (effektiver Jahreszins) ?

Lösung: $(1+1\%)^4 = 1 + r \;\Longrightarrow\; r = p_{EFF}\% = 1{,}01^4 - 1 = 4{,}0604\%$

Alternativ: $r = \frac{K_1}{K_0} - 1 = \frac{20.812{,}08}{20.000} - 1 = 4{,}0604\%$

pEFF

Aufgaben

Aufgabe 1.14 - Zinsberechnung plus Gutschrift mit m Perioden pro Jahr $\lim\limits_{\boldsymbol{m}\to\infty}$

Die m −Bank bietet eine Anlageform mit einem Nominalzins von 1% p.a. mit einer m −fachen Zinsverrechnung pro Jahr.

Dabei werden die Zinsansprüche jeweils am Ende der Periode der Länge $T = 1/m$ berechnet und gutgeschrieben.

a) Vergleichen Sie die verschiedenen jährlichen effektiven Renditen $p_{EFF,m}$ der 1%-Anlagen mit einer 7-stelligen Genauigkeit.
Für welche Bank würden Sie sich entscheiden ?
Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Wertetabelle für die Banken mit

$$m = 1, 2, 4, 12, 52, 360, 1000, 10000, 100000, 1Mio.$$

b) Welche jährliche effektive Rendite $p_{EFF,\infty}$ bietet Ihnen die ∞ −Bank ?

pEFF

Aufgaben

Aufgabe 1.14 - Zinsberechnung plus Gutschrift mit m Perioden pro Jahr $\lim\limits_{m\to\infty}$

a) Vergleichen Sie die verschiedenen jährlichen effektiven Renditen $p_{EFF,m}$ der 1%-Anlagen mit einer 7-stelligen Genauigkeit.
Für welche Bank würden Sie sich entscheiden ?
Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Wertetabelle für die Banken mit

$$m = 1, 2, 4, 12, 52, 360, 1000, 10000, 100000, 1Mio.$$

pEFF

Lösung: Für die jährliche effektive Rendite bei der m –Bank gilt

$$p_{EFF,m} = (\,1 + \frac{1\%}{m}\,)^m - 1$$

Um die Aufgabe besser mit dem Taschenrechner zu erledigen, setzten wir $m\ = x$ und betrachten die Funktion

$$f(x) = (1 + \frac{1}{100x})^x - 1$$

Mit Hilfe des Taschenrechners erstellen wir die Wertetabelle (siehe nächste Seite).

Aufgaben

Aufgabe 1.14 - Zinsberechnung plus Gutschrift mit m Perioden pro Jahr

a) Vergleichen Sie die verschiedenen jährlichen effektiven Renditen $p_{EFF,m}$ der 1%-Anlagen mit einer 7-stelligen Genauigkeit.
Für welche Bank würden Sie sich entscheiden ?
Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Wertetabelle für die Banken mit

$$m = \quad 1, 2, 4, 12, 52, 360, \\ 1000, 10000, 100000, 1Mio.$$

Lösung: Mit Hilfe des Taschenrechners erhalten wir die Wertetabelle:

Periode	m	eff. Jahresrendite
Jahr	1	1,0000000%
Halbjahr	2	1,0025000%
Quartal	4	1,0037563%
Monat	12	1,0045961%
Woche	52	1,0049196%
Tag	360	1,0050027%
Tag	365	1,0050029%
	1.000	1,0050117%
	10.000	1,0050162%
	100.000	1,0050167%
	1.000.000	1,0050167%

Antwort: Die höchste Rendite liefert die Bank mit der häufigsten Verrechnung.

Aufgaben

Aufgabe 1.14 - Zinsberechnung plus Gutschrift mit m Perioden pro Jahr $\lim\limits_{m\to\infty}$

b) Welche Rendite bietet Ihnen die ∞ −Bank ?

Lösung: Für die jährliche effektive Rendite bei der m −Bank gilt

$$p_{EFF,m}\% = \left(1 + \frac{1\%}{m}\right)^m - 1$$

Um die Lösung für die ∞–Bank zu berechnen, müssen wir den Grenzwert $m \to \infty$ bilden:

$$p_{EFF,\infty}\% = \lim_{m\to\infty} p_{EFF,m}\% = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1\%}{m}\right)^m - 1\right]$$

Formelsammlung: $p_{EFF,\infty}\% = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1\%}{m}\right)^m - \lim\limits_{m\to\infty} 1$

$$p_{EFF,\infty}\% = e^{1\%} - 1$$

Taschenrechner: $p_{EFF,\infty}\% = 1{,}0050167\%$

pEFF

Aufgaben

Rendite

Jährliche log-Rendite

$$\tilde{p}\% = \frac{\ln\left({}^{K_T}/_{K_0}\right)}{T} = \frac{\ln(q_T)}{T}$$

Aufgabe 1.15

Vergleichen Sie die folgenden Investitionen

$K_0 \longrightarrow K_t$ mit Laufzeit t mit Hilfe ihrer log-Renditen auf der Basis DCC=act/act.

Wie groß sind die jährlichen log-Renditen [effektiven Jahresrenditen] ?

Merke: Die jährlichen Log-Renditen $\tilde{p}\% = ln\left(\frac{K_E}{K_A}\right)/\,t$ sind stets kleiner als die Renditen $p_{EFF}\%$, aber unter gewissen Bedingungen aber „fast“ genauso groß.

Umrechnung ist immer möglich: $e^{\tilde{p}\%} = 1 + p_{EFF}\% \quad \Rightarrow \quad p_{EFF}\% = e^{\tilde{p}\%} - 1$

	K_A	K_E	Laufzeit	t Laufzeit in Jahren	Rendite	$p_{EFF}\%$ effektiv p.a.	log-Rendite	$\tilde{p}\%$ log-Rendite p.a.
(a)	30.000,00 €	30.100,00 €	10 Tagen	0,02739726	0,333%	12,915%	0,333%	12,146%
(b)	30.100,00 €	40.110,00 €	9 Tagen	0,024657534	33,256%	11394963,455%	28,710%	1164,352%
(c)	40.110,00 €	50.500,00 €	150 Tagen	0,410958904	25,904%	75,157%	23,035%	56,051%
(d)	50.500,00 €	115.000,00 €	3 Jahren und 47 Tagen	3,128767123	127,723%	30,087%	82,296%	26,303%
(e)	115.000,00 €	150.000,00 €	1 Jahr	1	30,435%	30,435%	26,570%	26,570%
	30.000,00 €	150.000,00 €		4,591780822	400,000%	41,978%	160,944%	35,050%

Aufgaben

Jährliche log-Rendite

$$\tilde{p}\% = \frac{\ln\left({}^{K_T}/_{K_0}\right)}{T} = \frac{\ln(q_T)}{T}$$

Aufgabe 1.16

In einem Angebot werden Ihnen bei
3-jähriger Laufzeit sich halbjährlich erhöhende Zinsen angeboten.
Im ersten Halbjahr erhalten sie nominal $0{,}5\%\ p.a.$

In jedem weiteren Halbjahr erhöhen sich die Zinsen nominal um $0{,}25\ \%$-Punkte.

(a) Interpretieren Sie die gegebenen Prozentsätze als log-Renditen und schätzen Sie so die Gesamtrendite der Anlage unter Verwendung von DCC = $30/360$ ab.

(b) Rechnen Sie die gegebenen Prozentsätze in log-Renditen um und berechnen Sie effektive Jahresrendite exakt.

Lösung (a):

In den 6 Halbjahren nehmen die p.a. definierten Zinsen folgende Werte an:

0,5%; 0,75%; 1%; 1,25%; 1,5%; 1,75%

Zunächst berechnen wir die Periodenzinssätze der einzelnen Halbjahre.

0,25%; 0,375%; 0,5%; 0,625%; 0,75%; 0,875%

Rendite

Aufgaben

Jährliche log-Rendite

$$\tilde{p}\% = \frac{\ln\left({}^{K_T}/_{K_0}\right)}{T} = \frac{\ln(q_T)}{T}$$

Aufgabe 1.16

Lösung: (a) Fortsetzung

Näherungsweise können wir die Zinssätze als Log-Renditen interpretieren und daher einfach deren Summe bilden:

$$0{,}25\% + 0{,}375\% + 0{,}5\% + 0{,}625\% + 0{,}75\% + 0{,}875\% = 3{,}375\%$$

Antwort: Die Gesamtrendite nach drei Jahren beträgt **etwa** 3,375%,

was einer **ungefähren** Jahresrendite von $3{,}375\%/3 \;=\; 1{,}125\%$ entspricht.

Lösung: (b)

(b) Wir berechnen zuerst die log-Renditen und deren Summe:

$$0{,}2497\% + 0{,}3743\% + 0{,}4988\% + 0{,}6231\% + 0{,}7472\% + 0{,}8712\% = 3{,}3642\%$$

Dann ist $\tilde{p}\% = \frac{3{,}3642\%}{3} = 1{,}1214\%$ und $e^{\tilde{p}\%} - 1 = 1{,}12771\%.$

Rendite

Aufgaben

Aufgabe 1.19 - Variierende Zinssätze

Herr Gayk möchte $K_0 = 13.000$ € über einen Zeitraum von 3 Jahren bei seiner Bank anlegen. Er erhält folgendes Angebot:

Im ersten Jahr 2,7%, im zweiten Jahr 3,5% und im dritten Jahr 3% p.a. bei kontinuierlicher Zinsverrechnung.

(a) Wie hoch ist log-Rendite im Vergleich zur Rendite ?

(b) Wie hoch ist jährliche log-Rendite ?

(c) Wie hoch ist der effektive Jahreszins (geometrisches Mittel) ?

(d) Wie hoch ist die durchschnittliche Jahresrendite (arithmetisches Mittel) ?

Lösung:

(a) Die Log-Rendite beträgt $2{,}7\% + 3{,}5\% + 3\% = 9{,}2\%$

Die Rendite beträgt $r = e^{9{,}2\%} - 1 = 9{,}6364822\%$

(b) Die jährliche Log-Rendite beträgt $\frac{9{,}2\%}{3} = 3{,}0\overline{6}\%$

(c) Der eff. Zins beträgt $e^{3{,}0\overline{6}\%} - 1 = 3{,}11417327\%$

(d) Die durchschnittliche Jahresrendite ist $\frac{r}{3} = 3{,}21216074\%$