



Finanzmathematik

- Zinsen auf Einmalzahlungen
 - Geld & Zeit = Zinsen
 - Zinsmodelle (klassisch)
 - **Aufgaben** 1.1 – 1.14, Internetaufgabe A14

Aufgaben

Aufgabe 1.1

Sabine hat 750,00 Euro gespart und erhält 2,5% p.a. Zinsen. Berechnen Sie die **Zinsen Z** nach einem Jahr.

Lösung: Sabine erhält 18,75 Euro Zinsen.

Aufgabe 1.2

Für welches **Kapital K** bekommen Sie bei einem Zinssatz von 2,8% p.a. in einem Jahr 11.760,00 Euro Zinsen?

Lösung: Das erforderliche Kapital beträgt 420.000 Euro.

Aufgabe 1.3

Bei welchem **Zinssatz p% p.a.** bekommen Sie für ein Kapital von 2.460 Euro im Jahr 110,70 Euro Zinsen?

Lösung: Bei einem Zinssatz von 4,5% p.a.

Aufgaben

Aufgabe 1.4

K_E

A hat B am 1.1.2005 einen Betrag von 650, – € geliehen.

B verpflichtet sich, den geliehenen Betrag mit 7% p.a. einfach zu verzinsen und ihn zusammen mit den bis dahin fällig gewordenen Zinsen am 31.12.2014 zurückzuzahlen. Wie hoch ist der zurückzuzahlende Betrag?

Lösung: $K_E = K_A \cdot (1 + 10 \cdot 7\%) = 650 \cdot 1,7 = 1105 \text{ €}$

Aufgabe 1.5

T

Ein Betrag von EUR 1200,- war zu 5% p.a. bei einfacher Verzinsung angelegt und ist, zusammen mit den angefallenen Zinsen, auf derzeit EUR 1620 angewachsen.

Wie viele Jahre war der Betrag angelegt?

Lösung: $1620 = 1200 \cdot (1 + x \cdot 5\%) \rightarrow x = \frac{\frac{16,2}{12} - 1}{5\%} = 7 \text{ Jahre}$

Aufgaben

Aufgabe 1.6 (Rendite)

Herr R.H. Kapp hat mit einer Investition von EUR 6.000,00 zu Beginn des [vor-] letzten Jahres am Ende diesen Jahres EUR 8.000,00 erwirtschaftet.

Berechnen Sie die **Rendite** r .

Lösung: $8000 = 6000 \cdot (1 + r) \rightarrow r = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} = 33, \bar{3}\%$

Antwort: die Rendite ist in beiden Fällen gleich $33, \bar{3}\%$



Rendite

Aufgabe 1.7 (Rendite)

Am 1.4.2016 hat Herr R.H. Kapp hat 100 Deutsche Bank Aktien zu einem Kurs von 14,88 € gekauft. Berechnen Sie die **Rendite** r , wenn er heute verkaufen würde.

[Beachten Sie, dass 25% des Gewinns als Steuer abzuführen sind und jede Transaktion 1,75€ kostet.]

Lösung: $S = 1488 \cdot (1 + r) \rightarrow r = \frac{602 \text{ €}}{1488 \text{ €}} - 1 = ? \%$



Rendite

Vereinbarungen

- Die Rendite ist der Prozentsatz um den sich mein Anfangskapital verändert hat (Wachstumsrate).
- Die in eckigen Klammern angegeben Aufgabenteile sind alternativ und optional zu betrachten.

Aufgaben

Aufgabe 1.8:

Ein Betrag von EUR 3.200 war 8 Jahre lang bei einfacher Verzinsung angelegt und ist in diesem Zeitraum einschließlich der gezahlten Zinsen auf EUR 4.736 angewachsen. Wie hoch war der zugrunde liegende Jahreszinssatz $p\%$ *p. a.* ?

Lösung: Formel für lineares Modell benutzen und nach $p\%$ auflösen:

$$4736 = 3200 \cdot (1 + 8 \cdot p\%) \implies p\% = \frac{\frac{4736}{3200} - 1}{8} = 6\%$$

Alternativ: Gesamtrendite durch Anzahl der Jahre:

$$\frac{\frac{1536}{3200}}{8} = 0,06 = 6\%$$

p%

Aufgaben - Verdopplung des Geldes

T

Aufgabe 1.9 Verdopplung & 70-er Regel

Nach wie viel Jahren hat sich mein Geld (Kapital) verdoppelt bei Zinsätzen $p\%$ *p. a.* = 2%; 4%; 8%; 10%, wenn eine jährlich-nachträgliche Zinsverrechnung unterstellt wird?

Lösung:

Zur Lösung müssen wir die Zinseszinsformel nach n auflösen

$$\begin{aligned} K_0 \cdot (1 + p\%)^n &= 2K_0 && | \div K_0 \\ (1 + p\%)^n &= 2 && | \ln(\) \\ n \cdot \ln(1 + p\%) &= \ln(2) && | \div \ln(1 + p\%) \end{aligned}$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + p\%)} \approx \frac{0,697}{p\%} = \frac{70}{p} \quad \text{70er Regel}$$

Aufgaben - Verdopplung des Geldes

Aufgabe 1.9 Verdopplung & 70-er Regel

T

Nach wie viel Jahren hat sich mein Geld (Kapital) verdoppelt bei Zinssätzen $p\%$ p. a. = 2%; 4%; 8%; 10%, wenn eine jährlich-nachträgliche Zinsverrechnung unterstellt wird?

Lösung:

mit Hilfe der Verdopplungsformel bzw. der 70-er Regel

n Anzahl der Jahre bis zur Verdopplung		
Zinssatz p.a.	Exakte Lösungen	70-er Regel
10%	$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + p\%)}$ 7,272541	$n \approx \frac{70}{p}$ 7,00
8%	9,006468	8,75
4%	17,672988	17,50
2%	35,002789	35,00

Für die **Antwort** muss die errechnete Zahl auf das nächste volle Jahr aufgerundet werden.

Aufgaben - Verdopplung des Geldes

Aufgabe 1.10 - exakte Lösung [+ 70-Regel]

Bei wieviel Prozent jährlicher Verzinsung verdoppelt sich das eingesetzte Anlagebetrag in 10 Jahren, wenn eine jährlich-nachträgliche Zinsverrechnung unterstellt wird?

Lösung: $2 = (1 + p\%)^{10} \Rightarrow p\% = \sqrt[10]{2} - 1 = 7,177\%$

[7% = $\frac{70}{10}$ %]

p%

Aufgabe 1.11 - exakte Lösung [+ 70-Regel]

In wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Anlagebetrag bei 5,384% p.a., wenn eine jährlich-nachträgliche Zinsverrechnung unterstellt wird?

Lösung: $2 = (1 + 5,384\%)^T \Rightarrow T = \frac{\ln(2)}{\ln(1+5,384\%)} = 13,216$

[13% = $\frac{70}{5,384}$ %]

T

Aufgabe - gemischt

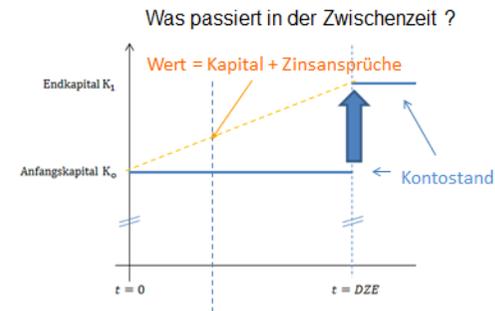
Aufgabe 1.12

K_E

Ein Guthaben von 1.200 Euro wird zu einem Zinssatz von 4% p.a. für einen bestimmten Zeitraum festgelegt. Wie hoch ist der Wert der Anlage nach ...

- a) einem Jahr ? 1248 €
- b) einem halben Jahr ? 1224 €
- c) einem viertel Jahr ? 1212 €
- d) einem Monat ? 1204 €
- e) 7 Monaten ? 1228 €
- f) 5 Jahren ? 1440 €

a)- f) ohne Zinsverrechnung (ZV)



- g) 5 Jahren mit jährlich-nachträglicher ZV ? $1200 \cdot (1 + 4\%)^5 = 1459,98 \text{ €}$
- h) 5 Jahren mit monatlich-nachträglicher ZV ? $1200 \cdot (1 + \frac{4\%}{12})^{60} = 1465,20 \text{ €}$
- i) 5 Jahren mit kontinuierlicher ZV ? $1200 \cdot e^{5 \cdot 4\%} = 1465,68 \text{ €}$
- j) 70 Quartale mit quartalsweise-nachträgl. ZV ? $1200 \cdot (1 + 1\%)^{70} = 2408,12 \text{ €}$
 $\approx 2 \cdot 1200 \text{ €}$
- k) 50 Tagen für act/act [30/360] 1206,58 € [1206,67 €]

Aufgabe – FRITZ – Modelle im Vergleich

Fritz legt heute 4.000.- € zu 2,5% p.a. an.
Wie hoch ist sein Guthaben nach 9 Jahren ?
Wo gibt es das größte Guthaben ?

K_E

- (a) im linearen Modell
- (b) bei jährlicher Zinsverrechnung
- (c) bei monatlicher Zinsverrechnung
- (d) bei kontinuierlicher Zinsverrechnung

Fritz hat vier Banken mit gleichem Nominalzinssatz von 2,5%, aber mit unterschiedlichen Verrechnungsmodalitäten, zur Auswahl

K_A

- Bank A mit Zinsverrechnung erst am Ende der Laufzeit
- Bank B mit jährlicher Zinsverrechnung
- Bank C mit monatlicher Zinsverrechnung
- Bank D mit kontinuierlicher Zinsverrechnung

Wieviel Anfangskapital müsste er bei diesen Banken jeweils einzahlen, damit er nach 10 Jahren über ein Guthaben von 15.000 € verfügt ?

Aufgabe – FRITZ – Modelle im Vergleich

Fritz legt heute 4.000.- € zu 2,5% p.a. an. Nach wie vielen **Jahren** ist sein Guthaben auf über 5.000 € angewachsen ?

T

- (a) im linearen Modell
- (b) bei jährlicher Zinsverrechnung
- (c) bei monatlicher Zinsverrechnung
- (d) bei kontinuierlicher Zinsverrechnung

Fritz sucht eine Bank, die ihm genügend Zinsen bietet, damit aus seinen 4.000 € , die er heute einzahlen würde, in 5 Jahren ein Guthaben von über 5.000 € entstehen würde. Welchen **Zinssatz** müsste die Bank bei nachfolgenden Verrechnungsmodalitäten anbieten ?

p%

- (a) Zinsverrechnung erst am Ende der Laufzeit
- (b) bei jährlicher Zinsverrechnung
- (c) bei monatlicher Zinsverrechnung
- (d) bei kontinuierlicher Zinsverrechnung

Aufgabe – FRITZ – Modelle im Vergleich

Lösung:

	K_E	K_A	$p\%$	T	
KE		15.000,00 €	5.000,00 €	5.000,00 €	
KA	4.000,00 €		4.000,00 €	4.000,00 €	
i	2,50%	2,5%		2,5%	
T	9	10	5		
linear	4.900,00 €	12.000,00 €	5,000%	10,000	10
jährlich	4.995,45 €	11.717,98 €	4,564%	9,037	10
monatl.	5.008,12 €	11.685,05 €	4,471%	8,935	9
kontinuierlich	5.009,29 €	11.682,01 €	4,463%	8,926	9

Weitere Aufgaben mit Lösungen im Internet, z.B. :

http://fbmathe.bbs-bingen.de/Zinsrechnung/uebung_zinsrechnung.htm

<http://www.brinkmann->

[du.de/mathe/aufgabenportal/p0_zinseszins_01/p0_zinseszins_01.htm](http://www.brinkmann-du.de/mathe/aufgabenportal/p0_zinseszins_01/p0_zinseszins_01.htm)

Aufgabe – FRITZ – Modelle im Vergleich

Fritz hat vier Banken mit gleichem Nominalzinssatz von 2,5% p.a., aber mit unterschiedlichen Verrechnungsmodalitäten, zur Auswahl



pEFF

- Bank A mit Zinsverrechnung erst am Ende der Laufzeit
- Bank B mit jährlicher Zinsverrechnung
- Bank C mit monatlicher Zinsverrechnung
- Bank D mit kontinuierlicher Zinsverrechnung

Was würden Sie Fritz raten ?

Welche Bank bietet die höchste Jahresrendite ?

Antwort:

Dank der Zinseszinsseffekte erhält man bei unterjährlicher Zinsverrechnung höhere Renditen.

Die maximale Rendite erhält man bei kontinuierlicher Zinsverrechnung.

Empfehlung: Bank D

Aufgabe – FRITZ 2

Fritz legt sein Kapital in Höhe von 10.000 € auf einem Tagesgeldkonto mit vierteljährlicher Zinsverrechnung für 1,5 Jahre angelegt.

(a) Wie hoch ist das Kapital am Ende der Laufzeit bei ein Zinssatz von 3% p.a. ?



(b) Welche Jahresrendite („Effektivzins“) wird auf diesem Konto erzielt ?



Lösung:

(a) $M = nm = 1,5 \cdot 4 = 6 \Rightarrow$ Die Laufzeit enthält 6 Quartale.

$$K_{1,5} = 10.000 \cdot (1 + 0,75\%)^6 = 10.458,52 \text{ €}$$

(b) $p_{EFF}\% = (1 + 0,75\%)^4 - 1 = 1,0075^4 - 1 = 0,030339191 = 3,03\%$

Aufgabe – FRITZ 2

Fritz legt sein Kapital in Höhe von 10.000 € auf einem Tagesgeldkonto mit vierteljährlicher Zinsverrechnung für 1,5 Jahre angelegt.

(b) Welche Jahresrendite („Effektivzins“) wird auf diesem Konto erzielt ?

Alternative Lösungen :

Alternative 1:
$$p_{EFF}\% = \sqrt[1,5]{\frac{10.458,52}{10.000}} - 1 = 0,030339191 = 3,03\%$$

Alternative 2:
$$K_1 = 10.000 \cdot (1 + 0,75\%)^4 = 10.303,39191$$

Rendite:
$$r = \frac{K_1}{K_0} - 1 = \frac{10.303,39191}{10.000} - 1$$

$$r = 1,030339191 - 1$$

$$r = 0,030339191 = 3,03\%$$



Aufgaben

Aufgabe 1.13 - Beispiel aus dem Internet

Das anfängliches Kapital $K_0 = 20.000 \text{ €}$ erhöht sich zum Zeitpunkt der Zinsverrechnung (hier: nach einem Vierteljahr) um 1% und ebenso in den nachfolgenden Quartalen.

Zinsen p.a.	Zins gültig bis		Zinsgut- schrift
	Einlage	Datum	
4,00%	20.000,- Euro	12 Monate	viertel- jährlich

$$K_{t=0} \xrightarrow{1+1\%} K_{t=1/4} \xrightarrow{1+1\%} K_{t=2/4} \xrightarrow{1+1\%} K_{t=3/4} \xrightarrow{1+1\%} K_{t=1}$$

Wie viele € erhalte ich am Ende des Jahres ?

K_E

Lösung: $n = 1, m = 4, p\% = 4\%, K_1 = 20.000 \cdot (1 + 1\%)^4 = 20.812,08 \text{ €}$

Wie groß ist Jahresrendite (effektiver Jahreszins) ?

Lösung: $(1 + 1\%)^4 = 1 + r \implies r = p_{EFF}\% = 1,01^4 - 1 = 4,0604\%$

Alternativ: $r = \frac{K_1}{K_0} - 1 = \frac{20.812,08}{20.000} - 1 = 4,0604\%$

p_{EFF}

Aufgaben

Aufgabe 1.14 - Zinsberechnung plus Gutschrift mit m Perioden pro Jahr $\lim_{m \rightarrow \infty}$

Die m –Bank bietet eine Anlageform mit einem Nominalzins von 1% p.a. mit einer m –fachen Zinsverrechnung pro Jahr.

Dabei werden die Zinsansprüche jeweils am Ende der Periode der Länge $T = 1/m$ berechnet und gutgeschrieben.

- a) Vergleichen Sie die verschiedenen jährlichen effektiven Renditen $p_{EFF,m}$ der 1%-Anlagen mit einer 7-stelligen Genauigkeit.
Für welche Bank würden Sie sich entscheiden ?
Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Wertetabelle für die Banken mit

$$m = 1, 2, 4, 12, 52, 360, 1000, 10000, 100000, 1Mio.$$

- b) Welche jährliche effektive Rendite $p_{EFF,\infty}$ bietet Ihnen die ∞ –Bank ?



Aufgaben

Aufgabe 1.14 - Zinsberechnung plus Gutschrift mit m Perioden pro Jahr $\lim_{m \rightarrow \infty}$

- a) Vergleichen Sie die verschiedenen jährlichen effektiven Renditen $p_{EFF,m}$ der 1%-Anlagen mit einer 7-stelligen Genauigkeit.
Für welche Bank würden Sie sich entscheiden ?
Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Wertetabelle für die Banken mit

$$m = 1, 2, 4, 12, 52, 360, 1000, 10000, 100000, 1Mio.$$

Lösung: Für die jährliche effektive Rendite bei der m –Bank gilt



$$p_{EFF,m} = \left(1 + \frac{1\%}{m}\right)^m - 1$$

Um die Aufgabe besser mit dem Taschenrechner zu erledigen, setzen wir $m = x$ und betrachten die Funktion

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{100x}\right)^x - 1$$

Mit Hilfe des Taschenrechners erstellen wir die Wertetabelle (siehe nächste Seite).

Aufgaben

Aufgabe 1.14 - Zinsberechnung plus Gutschrift mit m Perioden pro Jahr

- a) Vergleichen Sie die verschiedenen jährlichen effektiven Renditen $p_{EFF,m}$ der 1% p.a.-Anlagen mit einer 7-stelligen Genauigkeit.
Für welche Bank würden Sie sich entscheiden ?
Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Wertetabelle für die Banken mit

$$m = 1, 2, 4, 12, 52, 360, 1000, 10000, 100000, 1Mio.$$

Lösung: Mit Hilfe des Taschenrechners erhalten wir die Wertetabelle:

Periode	m	eff. Jahresrendite
Jahr	1	1,0000000%
Halbjahr	2	1,0025000%
Quartal	4	1,0037563%
Monat	12	1,0045961%
Woche	52	1,0049196%
Tag	360	1,0050027%
Tag	365	1,0050029%
	1.000	1,0050117%
	10.000	1,0050162%
	100.000	1,0050167%
	1.000.000	1,0050167%

Antwort: Die höchste Rendite liefert die Bank mit der häufigsten Verrechnung.

Aufgaben

Im Internet

https://www.fit-in-mathe-online.de/images/prozente-zinsen-zinseszins/zinsen/vermischte-aufgaben/pdfs/kapitel-zinsrechnung-vermischte-aufgaben_N.pdf

Aufgabe A14

Bei einem Geldverleiher werden 8 000 € geliehen. Der Verleiher berechnet 8 % Zinsen sowie eine einmalige Bearbeitungsgebühr von 2 %. Wie hoch ist die wirkliche Verzinsung, wenn das Geld am 10. Mai geliehen und am 10. August zurückgezahlt wird?

Die Aufgabenstellung lässt einige Fragen unbeantwortet:

Welches Zinsmodell liegt zugrunde?

Für welchen Zeitraum ist der Zinssatz definiert, ...8% p.a.?

Wann wird die Bearbeitungsgebühr fällig ?

Welche Zinstagemethode wird verwendet ?

Was ist mit wirkliche Verzinsung gemeint ?

Aufgaben

In der Klausur

12P = 2+2+4+4

Aufgabe A14- Neuformuliert:

Bei einem Geldverleiher werden 8.000 € geliehen. Der Verleiher verlangt nominal 8% Zinsen p.a., sowie eine einmalige Bearbeitungsgebühr von 2%, die bei Auszahlung fällig wird.

Die Zinsen werden mit der Zinstagemethode act/act berechnet.

Für unterjährige Zahlungen gilt einfache Verzinsung.

Das Geld werde am 10. Mai geliehen und am 10. August zurückgezahlt.

- (a) Bestimmen Sie Aus- und Rückzahlungsbeträge ?
- (b) Wie hoch ist die Rendite des Geschäfts für den Geldverleiher ?
- (c) Wie hoch ist der jährliche Effektivzins gemäß PAngV ?

Die Aufgabenstellung lässt einige Fragen unbeantwortet:

- Welches Zinsmodell liegt zugrunde ?
- Für welchen Zeitraum ist der Zinssatz definiert, ...8% p.a.?
- Wann wird die Bearbeitungsgebühr fällig ?
- Welche Zinstagemethode wird verwendet ?
- Was ist mit wirkliche Verzinsung gemeint ?

Aufgaben

Zinsen-berechnen.de

Lösung:

(a) Bestimmen Sie Aus- und Rückzahlungsbeträge ?

Zahlungsverlauf				
Pos.	Datum [Sortieren] [Alle löschen]	Zeitpunkt in Jahren	Einzahlung / Investition	Auszahlung / Ertrag
1	01.05.2022	0,000	<input checked="" type="radio"/> 8.000,00	<input type="radio"/>
2	01.05.2022	0,000	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> 160,00
3	01.08.2022	0,252	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/> 8.160,00

(b) Wie hoch ist die Rendite des Geschäfts für den Geldverleiher ?

(c) Wie hoch ist der jährliche Effektivzins gemäß PAngV ?

Ergebnis					
?	Rendite:	17,201 % p.a. (interner Zinssatz, IRR)			
?	Anlagedauer:	0,25 Jahre			
		?	Absolut	?	Relativ
?	Gesamtgewinn:	320,00 Euro		4,000 %	
?	Durchschnittlicher Jahresgewinn:	1.280,00 Euro p.a.		16,000 % p.a.	