Finanzmathematik

- Zinsen auf Einmalzahlungen
  - Eulersches Zinsmodell
  - Logarithmische Rendite

Agenda

1.1 ☑ Einführung & Grundbegriffe

1.2 ☑ Einfache Verzinsung (Simple Interest)

1.3 ☑ Zinsverrechnung & Zinseszins   (Compounded Interest)

1.4 ☑ PangV

1.5 ☑ Verdopplung des Geldes

1.6 ☑ Unterjährige Zinsverrechnung

1.7 Kontinuierliches Zinsmodell

1.8 Übersicht über alle Modelle

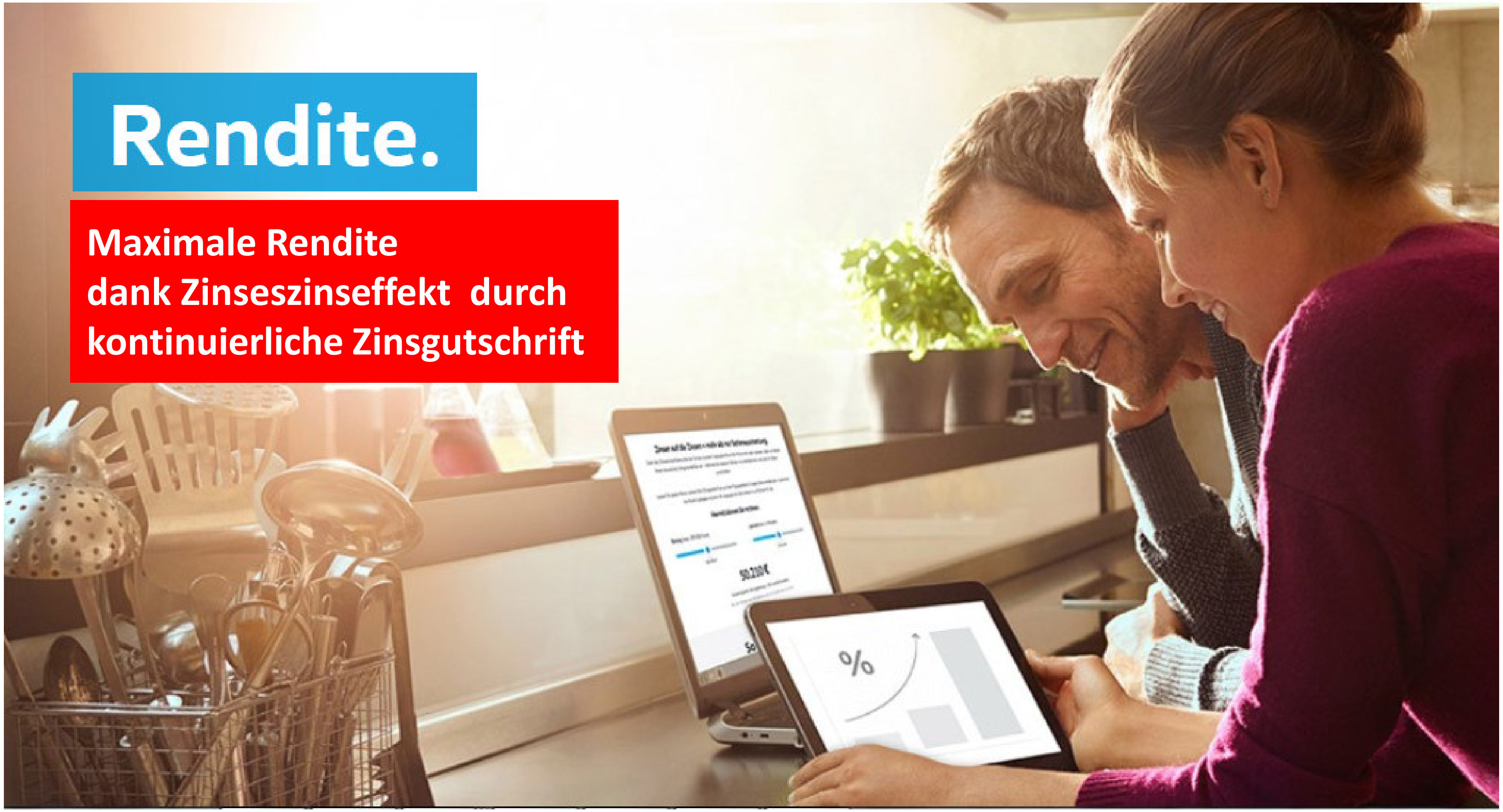
1.9 Josephs EURO-Cent - Kritischer Ausblick

1.10 Logarithmische Rendite

Appendix

1.11 Zinsen Berechnen.de

1.7 Exponentiell stetiges Zinsmodell



1.7 Exponentiell stetiges Zinsmodell

- Beispiel:
  Nominalzins $p\% = 100\%\, p.a.$
  Startkapital $K_0 = 1.000\,€$

Maximale Rendite dank Zinseszinseffekt durch kontinuierliche Zinsgutschrift

	#Conversion Periods	Relativer Periodenzins	Kapital EOY	kumulierte Zinsen
Periode	**m**	**p%/m**	**$K_0 \cdot (1+p\%/m)$^m**	**$K_1 - K_0$**
Jahr	1	100,0000%	2.000,00 €	1.000,00 €
Halbjahr	2	50,0000%	2.250,00 €	1.250,00 €
Quartal	4	25,0000%	2.441,41 €	1.441,41 €
Monat	12	8,3333%	2.613,04 €	1.613,04 €
Woche	52	1,9231%	2.692,60 €	1.692,60 €
Tag	360	0,2778%	2.714,52 €	1.714,52 €
Tag	365	0,2740%	2.714,57 €	1.714,57 €
	1.000	0,1000%	2.716,92 €	1.716,92 €
	10.000	0,0100%	2.718,15 €	1.718,15 €
	100.000	0,0010%	2.718,27 €	1.718,27 €
	1.000.000	0,0001%	2.718,28 €	1.718,28 €

1.7 Kontinuierliche Zinsmodell $\boldsymbol{q = e^{tp\%}}$

- Es drängt sich jetzt die Frage auf, ob sich im Allgemeinen durch die Erhöhung der Anzahl der Zinsverrechrechnungszeitpunkte stets auch die Zinserträge erhöhen.

Die Antwort ist ***Ja!*** .... Beweis ?
Für $m' > m$ ist zu zeigen, dass

$$K_o \cdot \left(1 + \frac{p\%}{m'}\right)^{m'} > K_o \cdot \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{m}$$

- Ist diese Wachstum unbegrenzt ?

Die Antwort ist ***Nein!*** .... Beweis ?

$$(\ast)\ \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{m} = e^{p\%} < \infty$$

1.7 Kontinuierliche Zinsmodell $\boldsymbol{q = e^{tp\%}}$

Ausgehend von der Formel $K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^m$ lassen wir die Anzahl der Zinsverrechnungsperioden m gegen ∞ gehen und erhalten wegen

Formelsammlung: $$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

$$K_{1,\infty} := K_0 \cdot \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^m = K_0 \cdot e^{p\%}$$

und allgemein für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ schließlich die “stetige Geldformel”:

“**exponentielles (stetiges) Zinsmodell**”

$K(t) = K_0 \cdot e^{tp\%}$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Aufgaben

❖ **Aufgabe 12 (i)**

Ein Guthaben von 1.200 Euro wird zu einem Zinssatz von 4% p.a. für einen Zeitraum von 5 Jahren angelegt. Die Zinsen werden kontinuierlich errechnet und gutgeschrieben.

Wie hoch ist der Wert der Anlage nach dieser Zeit?

Lösung: $K_0 \rightarrow K_t = K_0 \cdot e^{tp\%}$

$$K_5 = K_0 \cdot e^{5 \cdot 4\%} = 1465{,}68331$$

Der Wert der Anlage beträgt 1.465,68 € .

1.7 Exponentiell stetiges Zinsmodell

Formeln

Kapitalwertentwicklung in Abhängigkeit von der Zeit bei einem Zins von $i = p\%$ p.a.

$$K(t) = K_0 \cdot e^{tp\%} \quad \text{für die Zeit } t \in \mathbb{R}$$

- Aufzinsfaktor (jährlich) $q = e^{p\%}$
- Anfangskapital = Barwert

$$K_0 = K(t) \cdot e^{-tp\%} = K(t) \cdot q^{-t}$$

- Rendite

$$r = \frac{K(t) - K_0}{K_0} = e^{tp\%} - 1$$

- Jahresrendite

$$p_{EFF}\% = e^{p\%} - 1 = \sqrt[t]{\frac{K(t)}{K_0}} - 1$$

- Laufzeit

$$t = \frac{\ln(K(t)) - \ln(K_0)}{p\%}$$

1.7 Kontinuierliche Zinsmodell

RECALL: **Formeln der Unterjährigen Zinsverrechnung zum Vergleich**

- Kapitalwertentwicklung in Abhängigkeit von der Zeit bei einem Zins von $i = p\%$ p.a.
  $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{nm}$ mit $n \in \mathbb{N}$ in Jahren und $m \in \mathbb{N}$ der Anzahl der Perioden pro Jahr

- Relativer **Periodenzins**

$$p_{REL}\% = \frac{p\%}{m} = \sqrt[nm]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Nominalzins

$$p\% = m \cdot \left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right)$$

- **Effektive** Jahresrendite

$$\boldsymbol{X}\% = p_{EFF}\% = (1 + p_{REL}\%)^m - 1 = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right)$$

- Aufzinsfaktor (je Periode) $\quad q_{REL} = 1 + p_{REL}\%$

- Anfangskapital = Barwert

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + p_{REL}\%)^{nm}} = \frac{K_n}{q_{REL}{}^{nm}}$$

- Rendite

$$r = \frac{K_n - K_0}{K_0} = (1 + p_{REL}\%)^{nm} - 1$$

- Laufzeit

$$n = \frac{1}{m} \cdot \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1 + p_{REL}\%)}$$

- ❖ **Formelsammlung +**
- ❖ **Aufgaben 1.12**
- ❖ **Internet**

1.8 Übersicht über die Modelle

Das Standardmodell für eine Geldanlage ist der Übergang /die Transformation

$$K_o \xrightarrow{q_t} \qquad K(t) = K_t = K_0 \cdot q_t$$

mit dem ***<u>Kontierungsfaktor</u>*** q_t und der Laufzeit t in Jahren.

- Wie schon bei ZKp lässt sich aus je zwei Größen die dritte berechnen.
- Aus dem Kontierungsfaktor q lässt sich darüber hinaus - je nach Zinsmodell - der entsprechende Zins $p\%$ bestimmen und umgekehrt.
- Zur Berechnung für $t \in [0,1]$ sind die Day Count Conventions (DCC) zu beachten.

Wir betrachten im Folgenden die Modelle im Vergleich.

1.8 Übersicht über die Modelle

Das Standardmodell für eine Geldanlage ist der Übergang /die Transformation

$$K_o \xrightarrow{q_t} \qquad K(t) = K_t = K_0 \cdot q_t$$

mit dem ***<u>Kontierungsfaktor</u>*** q_t und der Laufzeit t in Jahren.

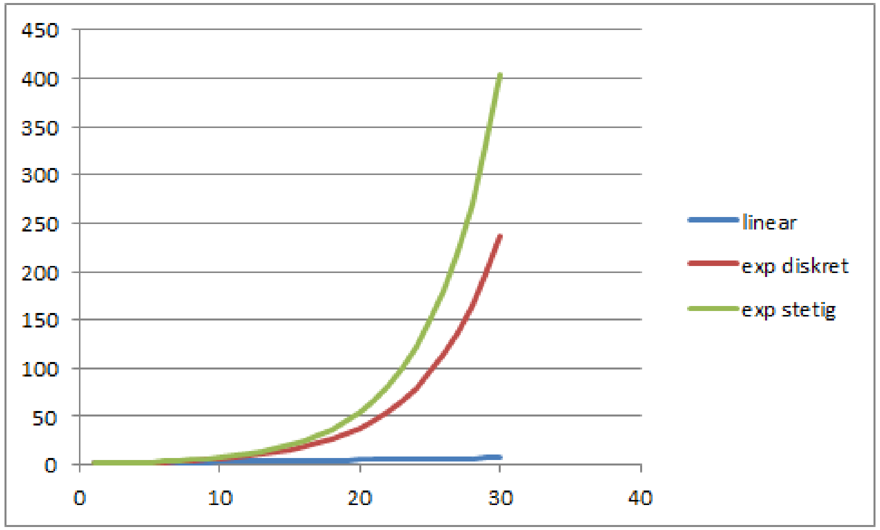
- Linear stetiges Modell mit $q_t = 1 + tp\%$ für alle $t \in \mathbb{R}$
- Exponentiell diskretes Modell mit $q_t = \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{mn}$ für $m, m \cdot n \in \mathbb{Z}$
- PAngV-Modell (stetig) mit $q_t = (1 + p\%)^{t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$
- Exponentiell stetiges Modell mit $q_t = e^{tp\%}$ für alle $t \in \mathbb{R}$

1.8 Übersicht über die Modelle

Wir betrachten im Folgenden die Modelle im Vergleich:

- Linear stetiges Modell mit $q = 1 + tp\%$ für $t \in \mathbb{R}$
- Exponentiell diskretes Modell mit $q = \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{mn}$ für $t = m \cdot n \in \mathbb{Z}$
- Exponentiell stetiges Modell mit $q = e^{tp\%}$ für $t \in \mathbb{R}$

In der Zinseszinsrechnung steigt der Wert des Kapitals exponentiell. Die Grafik zeigt wie sich der Wert des angelegten Geldes aus dem mit der Zeit entwickelt.



Die grüne Line zeigt, wie sich das Kapital bei exp. stetiger Verzinsung entwickelt.

Die rote Line zeigt die Entwicklung bei jährlicher Zinsverrechnung ($m = 1, PAngV$). Die blaue Linie spiegelt die lineare Verzinsung wieder.

1.8 Übersicht über die Modelle

Das Lineares Modell mit $\boldsymbol{q = 1 + tp\%}$, $\boldsymbol{p\%\ p.a.}$ und $\boldsymbol{t}$ in Jahren:

- **Zinsverrechnung**
  keine, bzw. erst am Ende der Laufzeit

- **Anwendungen - Finanzprodukte**
  - **Das Sparbuch - unterjährig**
    Berechnung der Zinsansprüche, die erst zum Jahresende gutgeschrieben werden.
  - **Zinsansprüche**
    Zwischen den einzelnen Verrechnungszeitpunkten werden die anwachsenden Zinsansprüche „linear abgegrenzt"
    $K(t) = K_0 \cdot (1 + tp\%) \quad \text{für} \quad 0 < t < Ende\ der\ CP$
  - **Festverzinsliche Wertpapiere**
  - **Abschätzung der Renditen** von kompliziertereren Zahlungsströmen durch eine Renditebetrachtung mit den Summen sämtlicher der Ein- und Auszahlungen - Bierdeckelmethode

1.8 Übersicht über die Modelle

Exponentiell diskrete Modelle

- **Zinsverrechnung**
  nur zur diskreten Zeitpunkten. Standard: Das Jahr wird in m gleichlange Zinsverrechnungsperioden aufgeteilt
- **Anwendungen**
  - **Das Sparbuch – mehrere ganze Jahre**
    Das nach Ablauf vom n Jahren erhaltene Kapital lässt sich mit Hilfe der Zinseszinsformel berechnen:
    $K_n = K_0 \cdot (1 + p\%)^n$ Zinseszinsformel nach $n \in \mathbb{N}$ Jahren
  - **Tagesgelder, Konten mit periodischer unterjähriger Zinsverrechnung**
    Die Zinsen, die bis Ende des Jahres angefallen und mitverzinst wurden, ergeben sich aus erweiterten Zinseszinsformel. M bezeichnet die Anzahl der Perioden pro Jahr
    Beispiel: m-Perioden, mit $p_{REL}\% = \frac{p\%}{m}$ Periodenzins
    $\boldsymbol{Z} = K_1 - K_0 = K_0 \cdot ((1 + \frac{p\%}{m})^m - 1)$, $\boldsymbol{X}\% = p_{EFF}\% = (1 + \frac{p\%}{m})^m$

1.8 Übersicht über die Modelle

Exponentiell stetiges Modell –

- **Zinsverrechnung**
  kontinuierliche Verzinsung und Zinsverrechnung
- **Anwendungen**
  - Grundlegendes Geldmodell der modernen Finanzmathematik (Portfolios, Aktien- und Optionsbewertungen, Volatilität etc.)
  - Besserer Vergleich mit anderen permanent schwankenden Größen (Inflation, Aktienkurse, ….
  - Die Zinsen, die bis zum Zeitpunkt t $\in \mathbb{R}$ angefallen sind, ergeben sich aus der Formel
    $$Z = K(t) - K_0 = K_0 \cdot (e^{tp\%} - 1)$$
  - **Abschätzung der Renditen** von komplizierteren Zahlungsströmen unter Berücksichtigung der Zeitpunkte und damit unter Berücksichtigung von Zinseszinseffekten.
  - **LOG Rendite siehe 1.9**

1.9 Rendite

Zurück zum Start:

Als **Rendite** einer Anlage $K_0 \xrightarrow{q} K_T = K_0 \cdot q$ mit Laufzeit T in Jahren und dem Kontierungsfaktor $q = \frac{K_T}{K_0}$ bezeichnet man das Verhältnis der Differenz von Endkapital und Anfangskapital (dem Ertrag = Gewinn/Verlust) zum eingesetzten Anfangskapital:

$$\boxed{\boldsymbol{Rendite} = r = \frac{Ertrag\ - Aufwand}{Aufwand} = \frac{K_T - K_0}{K_0} = \frac{\Delta K}{K_0} = \frac{Zinsen}{K_0} = \boldsymbol{p}\%}$$

- ΔK ist der absolute Gewinn/Verlust
- $r = \frac{\Delta K}{K_0}$ ist der relative Gewinn/Verlust und wird als Rendite bezeichnet.

Für den zur Rendite gehörende Kontierungsfaktor q gilt: $q = 1 + r\ \ bzw. \ \ r = q - 1.$

1.9 logarithmierte Rendite

Problem & Lösung:
Die Höhe der Jahresrendite hängt vom gewählten Zinsmodell ab. Die durchschnittliche Jahresrendite spiegelt Zinseszinseffekte nicht richtig wieder.

Zum besseren Vergleich wird in der Praxis daher oft die **logarithmierte Rendite** anstelle des einfachen Rendite herangezogen.

d.h. man entscheidet sich für den ***Jahreszinssatz im exponentiell stetigen Zinsmodell***:

$$\frac{ln\left(\frac{K_T}{K_0}\right)}{T} = p\%$$ heißt **logarithmierte Jahresrendite**

$$ln\left(\frac{K_T}{K_0}\right) = Tp\%$$ heißt **logarithmierte Rendite**

1.10 logarithmierte Rendite

Beispiel

$Laufzeit\ T = 10\ Jahre, \quad K_0 = 10.000\ € \quad K_{10} = 11.000\ €$

- $Rendite = 10\%$
- $Jahresrendite\ linear = \frac{Rendite}{10} = 1\%$

- $LogRendite = ln(1,1) = 0,0953101798 = 9,53 \ldots \%$
- $Jahresrendite\ exponentiell = \frac{LogRendite}{10} = 0,953 \ldots \%$

Realität = Sparbuch:

$$K_{10} = 11.000\ € = 10.000\ € \cdot (1 + p\%)^{10}$$
$$\Rightarrow \quad p\% = \sqrt[10]{1,1} - 1 = 0,9576583\%$$

→ **Internet** http://www.wallstreet-online.de/ratgeber

→ **Aufgabe 1.21 – Log-Rendite, jährliche Log-Rendite**

1.9 logarithmierte Rendite

1. Beispiel: **Verkettung** - **Hintereinander Ausführung von Investitionen**

„Zunächst halbiere sich unser Kapital,
um sich anschließend wieder zu verdoppeln“

$$K_0 \xrightarrow{q_1 = 0{,}5} K_1 \xrightarrow{q_2 = 2} K_2$$

mit den (Teil-)Renditen: $r_1 = q_1 - 1 = -50\% \quad und \quad r_2 = q_2 - 1 = 100\%$

Wie groß ist die Gesamtrendite ?

Antwort: Die Gesamtrendite beträgt 0%

1.9 logarithmierte Rendite

1. Beobachtung: Die Gesamtrendite $r_{ges} = 0\%$ lässt sich aus den Teilrenditen nicht direkt ablesen.

Anders verhält es sich mit der **log-Rendite** $r_{log} = \ln\left(\frac{K(T)}{K(0)}\right)$

In unserem Beispiel ist

$$r_{log} = \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = ln\left(\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{K_1}{K_0}\right) = ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) + ln\left(\frac{K_1}{K_0}\right) = ln(q_1) + \ln(q_2)$$
$$= r_{1,log} + r_{2,log}$$

Setzt man die Werte des Beispiels ein, so erhält man die Gesamt-LOG-Rendite als Summer der Teil-LOG-Renditen:

$$ln(2) + ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = ln(1) = 0.$$

Aufgaben

Jährliche Log-Renditen

$$p\% = \frac{ln\left({}^{K_T}/_{K_0}\right)}{T}$$

❖ **Aufgabe 16**

In einem Angebot werden Ihnen bei dreijähriger Laufzeit sich halbjährlich erhöhende Zinsen angeboten. Im ersten Halbjahr erhalten sie nominal 0,5% p.a..
In jedem weiteren Halbjahr erhöhen sich die Zinsen nominal um 0,25%-Punkte. Schätzen Sie die Gesamtrendite der Anlage mit Hilfe der log-Renditen unter Verwendung von DCC = 30/360 ab.

Lösung:

Erste Periode: $K_0 \xrightarrow{1+0{,}25\%} K_{0,5} \quad \approx \quad K_0 \xrightarrow{e^{0{,}25\%}} K_{0,5}$

$$K_{0,5} \cong K_0 \cdot e^{0{,}5\%/2}$$

Aufgaben

Jährliche Log-Rendite

$$p\% = \frac{ln\left(K_T/K_0\right)}{T}$$

❖ **Aufgabe 16**

Lösung: Fortsetzung

In den 6 Halbjahren nehmen die Zinsen insgesamt folgende Werte an:

0.5%, 0.75%, 1%, 1.25%; 1.5%, 1.75%

Wie im ersten Schritt approximieren wir die jeweiligen Kontierungsfaktoren

durch $q \approx e^{p\%/2}$

Dann ergibt sich die abgeschätzte LOG-Gesamtrendite einfach als Summe der Periodenzinsen:

0.25% + 0.375% + 0.5% + 0.625% + 0.75% + 0.875% = 3.375%

Antwort: Die Gesamtrendite nach drei Jahren beträgt etwa 3.375%,

was einer Jahresrendite von 3.375%/3 = 1,125% entspricht. Das exakte Ergebnis wäre übrigens 1,1277%.

1.9 logarithmierte Rendite

2. Beobachtung: Die einfache Rendite ist nicht „symmetrisch“.
Wechselt man den Standunkt in einer Finanztransaktion, ergeben sich unterschiedliche Renditen.

Tauscht man Ertrag und Aufwand, dann ist i.a.

$$\frac{Ertrag\ - Aufwand}{Aufwand} \neq -\ \frac{Aufwand - Ertrag}{Ertrag}$$

- *Stichwort: Meine Rendite, Deine Rendite …*

Anders verhält es sich mit der **log-Rendite:**

$$ln\left({}^{K_E}/_{K_A}\right) = -\ ln\left({}^{K_A}/_{K_E}\right)$$

- *Die log-Rendite des Einen ist die negative log-Rendite des Anderen.*

1.9 logarithmierte Rendite

2. Beobachtung

Beispiel: Bank A überlässt Bank B für eine Tag 10.Mio.€ und erhält am nächsten Tag das Geld + 10.000€ Zinsen zurück.

- *Die log-Rendite des Einen ist die negative log-Rendite des Anderen:*

	BANK A	BANK B
	10.000.000,00 €	-10.000,00 €
	10.000,00 €	10.010.000,00 €
Rendite	0,10000000%	-0,09990010%
	10.010.000,00 €	10.000.000,00 €
	10.000.000,00 €	10.010.000,00 €
log-Rendite	**0,09995003%**	**-0,09995003%**

1.9 logarithmierte Rendite

3. Beobachtung: einfache Rendite und log-Rendite lassen sich ineinander umrechnen.

Zunächst sei an die Renditeformel erinnert $r = \frac{K_E}{K_A} - 1$,

dann gilt für die **log-Rendite**

$$\boldsymbol{r_{log}} = ln\left(\frac{K_E}{K_A}\right) = ln(\,1 + \boldsymbol{r}\,)$$

und umgekehrt:

$$\boldsymbol{r} = e^{\boldsymbol{r_{log}}} - 1$$

Aufgaben

Jährliche Log-Rendite

$$p\% = \frac{\ln\left({}^{K_T}/_{K_0}\right)}{T}$$

- **Aufgabe 15**

1.9 logarithmierte Rendite

Vier wichtige Facts zum Abschluss:

1. Vergleicht man $r_{log} = ln\left(\frac{K_T}{K_0}\right)$ mit dem Euler-Modell $K_T = K_0 e^{Tp\%}$

Dann erhält man $r_{log} = Tp\%$ und $\frac{r_{log}}{T} = p\%$

d.h. die durch T geteilte log-Rendite ist genau der Zinssatz eines entsprechenden stetigen exponentiellen Zinsmodells mit kontinuierlicher Zinsverrechnung.

Die klassische Rendite r lässt sich daraus leicht berechnen:

$$r = \frac{K_T}{K_0} - 1 = e^{Tp\%} - 1 = e^{r_{log}} - 1$$

2. Entlang längerer Ketten addiert sich die log-Renditen einfach auf.

3. Die Log-Rendite ist „symmetrisch“ (Deine LOG-Rendite $=$ $-$Meine LOG-Rendite)

1.10 Zinsen Berechnen.de

https://www.zinsen-berechnen.de/tagesgeldrechner.php

1.11 Josephs EURO-Cent

«Hätte Joseph zur Geburt Jesu einen €-Cent bei der Sparkasse Bethlehem angelegt und dabei einen jährlichen Zins von 3% vereinbart ... »

- 3% ist das von vielen Politikern und der Öffentlichkeit angestrebte Wachstum
- Einfachheitshalber nutzen wir die ***stetige Rendite*** mit dem Taschenrechner: $0{,}01 \cdot \exp(2022 \cdot 3\%)$
- Dieser Betrag wird im 1.1.2022 fällig:

1.11 Kritischer Ausblick

Stichworte:

- Geld ist kein Lebewesen - Woher kommt der Zinsertrag ?
- Reich und Arm
- Der „Josephs-EURO-Cent“ (3% stetiger Verzinsung) im Vergleich
  - zum reichsten Mann der Welt = 75 Milliarden
  - zur Weltbevölkerung ~ 10 Milliarden
  - Zu den teuersten Fußballspielern ~ 100 Millionen (= 1 Ronaldo) http://www.youtube.com/watch?v=TP5omK12A2Y

- ESM = $700 \cdot 10^9$ € stehen bereit zur Absicherung (Bürgschaften für Kredite) und für Notkredite.

> Exponentielles Wachstum ist auf einem endlichen Planeten grundsätzlich gefährlich. Ein Spiel mit dem Feuer.

Finanzmathematik

- Aufgabenverteilung
  - Formelsammlung → Taschenrechner
  - Glossar
  - Aufgabe erstellen → Übungsklausuraufgabe
  - Aufgaben Rechnen
  - Internetrecherche

Finanzmathematik

Zinsen auf Einmalzahlungen

- ☑ Geld & Zeit = Zinsen
- ☑ Klassische Zinsmodelle
- ☑ Eulermodell
- ☑ Logarithmische Rendite

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit