Finanzmathematik

- Zinsen auf Einmalzahlungen
  - Geld & Zeit = Zinsen
  - Klassische Zinsmodelle

Agenda

1.1 Einführung & Grundbegriffe

Brainstorming – Geld & Zinsen

Abzinsen

Diskontierungsfaktor

Aufzinsen

$$Rendite = \frac{Ertrag - Aufwand}{Aufand} = \frac{Ertrag}{Aufwand} - 1$$

Ertrag-Aufwand = Zinsen

Anfangskapital

$Aufwand$

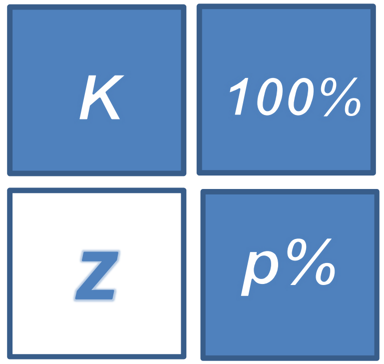
Endkapital

$Ertrag$

1.1 Einführung & Grundbegriffe

Ausgangspunkt ist die altbekannte Formel aus der Mittelstufe

$$\boxed{\boldsymbol{Z = K \cdot p\%}}$$



mit

Z = Zinsen

K = Kapital = amount

p = Zinsfuß = interest

i = Zinssatz = interest rate mit $i = p\%$

Werfen wir eine Blick auf die Aufgabensammlung und schauen wie weit wir damit kommen. ❖**Aufgaben 1.1 – 1.3**

❖**Formelsammlung** ❖**Taschenrechner** ❖**Internet**

1.1 Einführung - Rendite

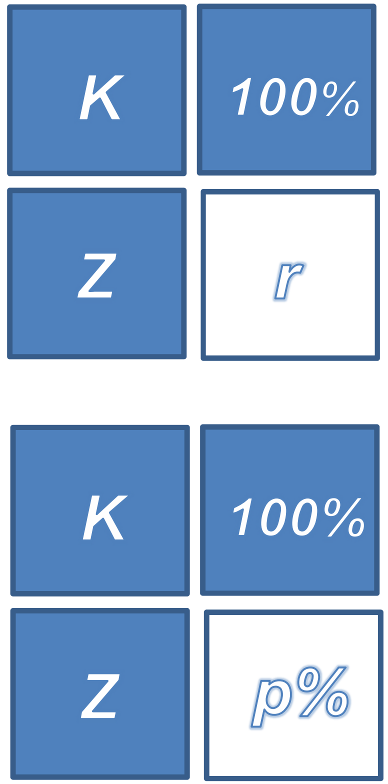
Der Zinsbetrag Z beziffert genau den Gewinn/Verlust einer Anlage in EUR.

Der Prozentsatz $p\%$ spiegelt dabei genau die Rendite r der Anlage wieder:

Allgemein wird mit der Rendite die Differenz zwischen Ertrag und Aufwand ins Verhältnis zum Aufwand gesetzt:

$$r = Rendite = \frac{Ertrag - Aufwand}{Aufwand}$$

$$= \frac{Gewinn/Verlust}{Aufwand} = \frac{Z}{K} = p\%$$

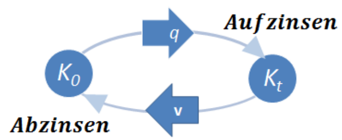


Mit der Rendite wird damit der Gesamterfolg einer Kapitalanlage als tatsächliche Verzinsung des eingesetzten Kapitals (Aufwand) gemessen.

Der Zeitraum spielt dabei erst einmal keine Rolle. Das wollen wir uns später noch genauer anschauen.

- **Internet: Aktienkurse**

1.1 Einführung – Auf- und Abzinsen



Für viele Fragestellungen/Aufgaben ist es nützlicher die altbekannte Formel **Z = K · p%** in einem anderen Kontext zu betrachten. Die Frage ist nicht mehr wie viele € bekomme ich (Gewinn/Verlust), sondern wie hat sich mein Kapital relativ verändert.

Dazu betrachtet man, wie bei den ❖ **Aufgaben 1.4 – 1.8**

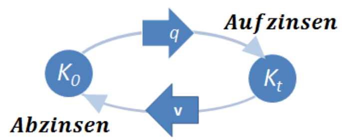
Anfangs- und **E**ndkapital (**A**ufwand und **E**rtrag) in einer Formel:

Kapitalwertveränderung

$$K_A \xrightarrow{q} K_E = K_A \cdot q$$

mit q = Kontierungsfaktor = Aufzinsfaktor

1.1 Einführung – Auf- und Abzinsen



$$AUFZINSEN: \qquad K_A \xrightarrow{q} K_E = K_A \cdot q$$

Frage: Wie berechnet man q aus der Rendite $r = p\%$?

Aus ZKp wissen wir $K_E = K_A + Z$ mit $Z = K_A \cdot p\%$.

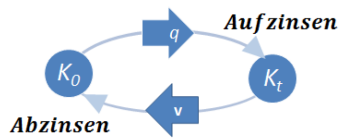
Also $\quad K_E = K_A + K_A \cdot p\% = K_A \cdot (1 + p\%)$

Das heißt, der Kontierungsfaktor q mit dem der Aufwand K_A multipliziert werden muss, ist gerade

$$q = 1 + p\%$$

oder mit anderen Worten $\quad r = p\% = q - 1$

1.1 Einführung – Auf- und Abzinsen



- Der Faktor $q := (1 + p\%)$ heißt ***Kontierungsfaktor*** oder ***Aufzinsfaktor***
- Der Rückweg wir durch Multiplikation mit $v := \frac{1}{q} = \frac{1}{1+p\%}$ vermittelt.

  Der Faktor v heißt ***Diskontierungsfaktor*** oder ***Abzinsfaktor***.
- Es gilt zusammenfassend:

$K_E = K_A \cdot q$, mit dem Kontierungsfaktor $q = 1 + r = 1 + p\%$

AUFZINSEN: $K_A \xrightarrow{q} K_E = K_A \cdot q$

ABZINSEN: $\cdot v = K_A \xleftarrow[v]{} K_E$ mit dem Diskontierungsfaktor $v = {}^{1}/_{q}$

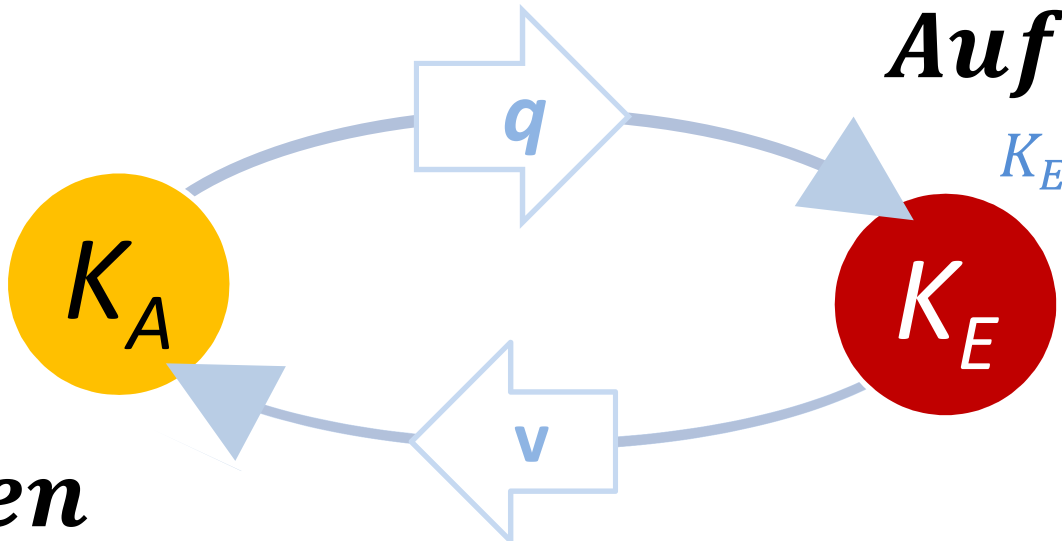
1.1 Bezeichnungen

- r = Rendite = Gesamtrendite am Ende der Laufzeit T
- $r_{\emptyset,p.a.} = \frac{r}{T}$ = Durchschnittliche Jahresrendite

- Aufzinsfaktor $q = 1 + p\%$ und Diskontierungsfaktor $v = {}^{1}/_{q}$ zum Ende der definierten Zeiteinheit T_{def} für des Zinssatzes $p\%$.

Aufzinsen

$K_E = K_A \cdot q$



Abzinsen

$K_A = K_E \cdot v$

1.1 Einführung – ZKp und die Zeit

Die **ZKp-Formel** und auch das **Aufwand/Ertrag-Modell** berücksichtigen nur implizit den Zeitcharakter der Zinsen.

Zwei Gründe das Modell um den Faktor Zeit zu erweitern:

- Je länger ich ein Kapital verleihe oder leihe,
  desto mehr Zinsen muss ich einfordern oder zahlen.

…. and last but not least:

- Jeder Zins ist für einen bestimmten Zeitraum definiert.

1.1 Exkurs – Zinsen per annum

Unabhängig von der Laufzeit wird der Zins stets für eine gewisse Zeitspanne definiert.

Die definierende Zeiteinheit eines Zinses kürzen wir mit $\boldsymbol{DZE}$ ab.

Bedeutung / Wirkung

Für ein Kapital, das für die Dauer der $\boldsymbol{DZE}$ auf einem solchen Konto anlegt wird, hat man am Ende der DZE einen Zinsanspruch in Höhe des Prozentsatzes vom angelegten Kapital.

In der Regel werden Zinssätze für $\boldsymbol{DZE} = 1$ Jahr definiert.

Die Bezeichnung ist dann $p\%$ $per\ annum$, $pro\ anno$ (siehe Duden online)

Abkürzung: $p\%$ $p.a.$

Beispiele:

Sparkasse: Variable Zinsen von derzeit $0{,}01\ \%\ p.a.$ ab 1,00 €

VISA Cash Konto $0{,}4\%\ p.a.$ mit monatl. Verrechnung

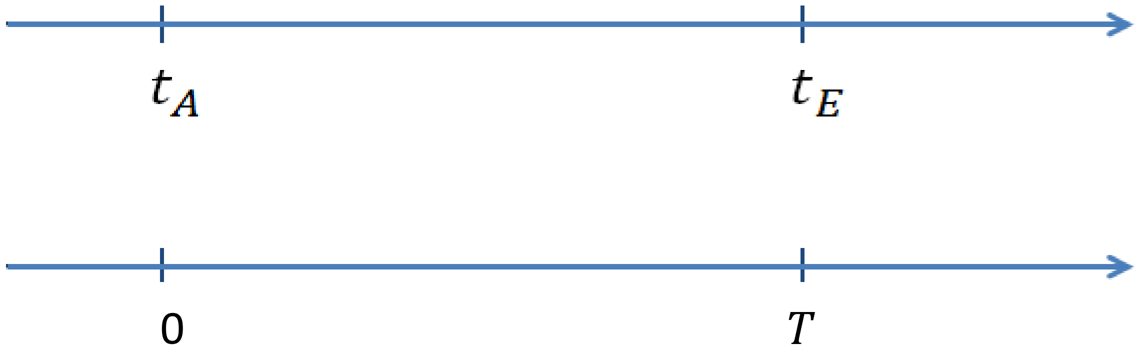
Internet: http://www.tagesgeldvergleich.net

Internet: https://wertpapiere.ing-diba.de

1.1 Exkurs - Day Count Conventions

Um es ganz genau zu machen . . . wird das Zeitintervall in Tagen dargestellt („Taggenaue Berechnung“). Wir verzinsen einen Betrag über eine Periode, die am Tag t_A beginnt und am Tag t_E endet (dies muss nicht ein ganzes Jahr sein).

Dann müssen wir die **Anzahl der Zinstage** zwischen $t_0 = t_A$ und $T = t_E$ bestimmen.



Es muss genau spezifiziert sein, wann dieser Zeitraum beginnt, wann er endet und wie lang er andauert. Gehört der erste Tag dazu ?

Gemessen wird in Jahren, d.h. ein Tag ist z.B. $t = \frac{1}{365}$.

1.1 Exkurs - Day Count Conventions

- Hierfür gibt es verschiedene Usancen, so genannte **Day Count Conventions (kurz DCC)** oder **Zinstagemethoden**
- Diese werden mittels eines Bruchs angegeben
- Im Zähler die Zählwise für die Anzahl der Tage pro Monat und im Nenner die Zählweise für die Anzahl der Tage innerhalb eines Jahres.

Tage pro Monat / Tage pro Jahr

1.1 Exkurs - Day Count Conventions

Die gebräuchlichsten Zinstagemethoden sind:

Act/Act tatsächlichen Kalendertage zwischen t_0 und t_1 geteilt durch die tatsächliche Anzahl der Tage eines Jahres

Act/365f tatsächlichen Kalendertage zwischen t_0 und t_1 geteilt durch 365 *)
Act/360 tatsächlichen Kalendertage zwischen t_0 und t_1 geteilt durch 360 *)

*) Geteilt wird immer durch 365 bzw. 360, egal ob es sich z.B. um ein Schaltjahr handelt oder nicht. Dies ist der Unterschied zu Act/Act.

30/360 jeder Monat hat genau 30 und jedes Jahr genau 360 Tage

- Fällt der Beginn der Zinsperiode auf den 31. eines Monats, wird die Berechnung vom 31. auf den 30:. desselben Monats vorverlegt.
- Fällt das Ende der Zinsperiode auf den 31. eines Monats, wird die Berechnung auf den 1. des nächsten Monats verschoben, außer wenn der Beginn der Zinsperiode der 30. oder 31. eines Monats ist. Dann wird das Ende vom 31. auf den 30. desselben Monats vorverlegt.

30E/360 jeder Monat hat genau 30 und jedes Jahr genau 360 Tage und

- Fällt der Beginn der Zinsperiode auf den 31. eines Monats, wird für die Berechnung der Beginn vom 31. auf den 30. desselben Monats vorverlegt.
- Fällt das Ende der Zinsperiode auf den 31., wird für die Berechnung immer das Ende vom 31. auf den 30. desselben Monats vorverlegt. Das ist der Unterschied zu 30/360.

1.1 Exkurs – Sparbuch

Der absolute Klassiker unter den Anlageformen ist das Sparbuch …., „

Internet: http://www.sparbuch.info/

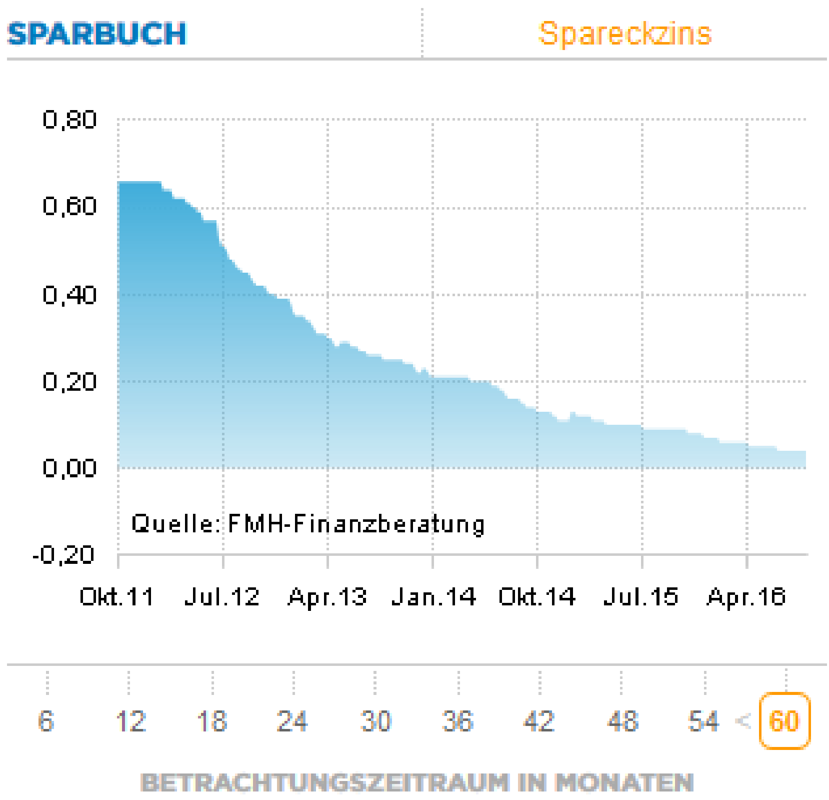
Aber auch das Sparbuch wirft Fragestellungen auf, die wir mit ZKp nicht direkt beantworten können.

Die Zeit, Zeitpunkte und Fristen spielen auf dem Sparbuch eine wesentliche Rolle:

- Angabe des **Tages** der Ein- und Auszahlungen, Dauer der Anlage **in Tagen**
- **Jährliche** Zinsgutschrift am **Ende des Jahres**
- Zinssatz ist als **Jahreszinssatz** angegeben
- **3 Monate** Kündigungsfrist
- Vorschusszinsen für **die Tage** der Überschreitung der Kündigungsfrist
- Der **Monat** wird zu **30 Tagen**, das Jahr zu **360 Tagen** gerechnet.
- Bei Auflösung des Sparkontos werden die Zinsen **sofort** gutgeschrieben.

Internet: bedingungen_sparverkehr.pdf

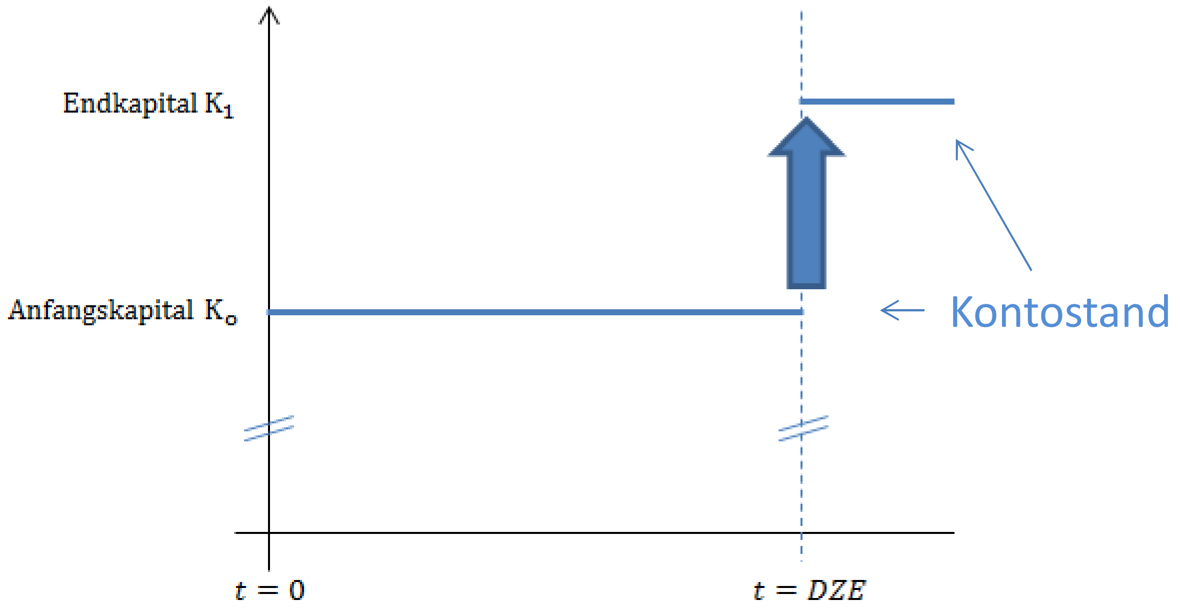
1.1 Exkurs – Sparbuch



https://www.fmh.de/zinsentwicklung-grafik/grafik-der-woche

Entwicklung des Spareckzinses in den letzten 5 Jahren

1.1 Exkurs – Sparbuch



Sparbuch: Am Ende der DZE wird der Zins fällig.

Das Geld vermehrt sich bei dieser Betrachtungsweise in Sprüngen.

Solche Zinsmodelle werden ‚diskrete Zinsmodelle' genannt.

1.1 Einführung – Kontostand

Mein Kontostand ändert sich ständig !

Diese Erfahrung hat wohl jeder schon gemacht. Schmerzlich, wenn sich der Kontostand gegen Ende des Monats immer mehr der Null nähert ….

- Der Kontostand ändert sich in Abhängigkeit von der Zeit.

Als Mathematiker modelliert man diese Abhängigkeit mit Hilfe einer Funktion.

- Jedem Zeitpunkt t wird ein EUR-Betrag $K(t)$ zugeordnet.
  $K(t)$ ist der Kontostand zum Zeitpunkt t

Im Folgenden betrachten wir zunächst Modellkonten mit möglichst

idealtypischen Verzinsungsregeln,

die wir später auf realistische Konten und Finanzprodukte anwenden werden.

1.1 Einführung – Zinsmodelle

Zinsmodelle sind Konten mit idealtypischen Verzinsungsregeln.

Mit ihrer Hilfe versuchen wir die zeitliche Abhängigkeit des Kapitalwertes (Kontostandes) von der Zeit zu beschreiben (modellieren):

$$K(t) = ?$$

- Dabei unterstellen wir stets, dass die DZE des betrachteten Zinssatzes gleich 1 ist:

$$i = r = p\% \, p.a.$$

- wir starten darüber hinaus auch nur mit einer einzigen Zahlung („single amount”)

$$K(0) = K_0$$

  und schauen, wie sich das Geld auf unserem Modellkonto aufgrund der verschiedenen idealtypischen **Zinsmodelle** entwickelt.

1.2 Einfache Verzinsung
– zeitlich linear stetiges Zinsmodell

Als erstes betrachten die „**Einfache Verzinsung“** .
Das Geld vermehrt sich in gleichen Zeiträumen immer um den gleich Betrag.
Der Zinsbetrag ist dabei proportional zum eingesetzten Kapital, dem Zinssatz und zur Zeit, nach dem Motto:

„Je länger – desto höher sind die Zinsen.“

Beispiele: doppelt so lange ⇔ doppelt so viele Zinsen
halb so lange ⇔ halb so viele Zinsen

Mathematisch:

$$Z(t) = K_0 p\% * t$$

Für $t = 1$ ergeben sich genau die Zinsen nach einem Jahr $Z = K_0 p\%$.
Nach einem halben Jahr, $t = 0{,}5$ ergeben sich genau halb so viele Zinsen $K_0 p\% * 0{,}5$

1.2 Bezeichnungen

- Die Zeit wird mit dem Parameter t bezeichnet. Allgemein $t \in \mathbb{R}$.
  Speziell $t = n \in \mathbb{N}$.
- Mit T bezeichnen wir das Ende der Laufzeit eines Geschäftes.
- Ein Jahr ist auf $t = 1$ festgelegt.
- Kapitalien bzw. Kontostände werden als Funktion $K(t)$ der Zeit betrachtet.
- Idealtypische Konten werden als Zinsmodelle bezeichnet
  z.B. linear stetige Zinsmodell $K(\mathrm{t}) = K(0) \cdot (1 + t \cdot p\%)$, wenn $p\%$ die Jahresrendite ist.
- Das Anfangskapital wird mit $K(0) = K_0 = K_A$ bezeichnet und
  das Endkapital mit $K(T) = K_T = K_E$.
- Jedes Konto hat einen <u>Nominalzinssatz</u> $p\%$ mit einem festdefinierten Zeitraum.
  z.B. $p\%\ p.a.$, wenn der Zinssatz die Jahresrendite auf diesem Konto darstellt.
- Jedem Konto liegt eine <u>Zinstageberechnungsmethode</u> (DayCountConvention) zugrunde. Die erlaubt das genaue Zählen der Tage.
  z.B. bei act/act ist ein Tag = $\frac{1}{365}$, bei 30/360 ist ein Tag =$\frac{1}{360}$ und ein Monat =$\frac{1}{12}$

1.2 Hörsaalübung

Sparbuch: $0{,}01\%\ p.a.,$

Auflösung nach 53 Tagen (act/act)
$K_0 = 1.000€$

Welcher Betrag ?

$$K(t) = K_0 \cdot (1 + tp\%)$$

$$K(t) = 1000 \cdot (1 + \frac{53}{365} \cdot 0{,}01\%)$$

$$K(t) = 1000{,}014521$$

Antwort: Kunde erhält 1.000,01€.

K	100%	$t=0$
Z_1	0,01%	$t=1$
$Z(t)$	0,01%	$t = \frac{53}{365}$

1.2 Einfache Verzinsung
– zeitlich linear stetiges Zinsmodell

Verkauft man dieses Finanzprodukt zum Zeitpunkt t, dann ist der

$$\textbf{\textit{Kapitalwert}} = \textbf{\textit{Kontostand}} = \boldsymbol{K(t)}$$

der Anlage die Zusammensetzung aus dem ursprünglichen Kapital und den bis dahin angefallenen Zinsen:

$$K(\boldsymbol{t}) = K_0 + Z(t) = K_0 + K_0 p\% \cdot x = K_0 \cdot (1 + \boldsymbol{t} p\%)$$

Daraus ergibt sich durch Ausklammern von K_0 das

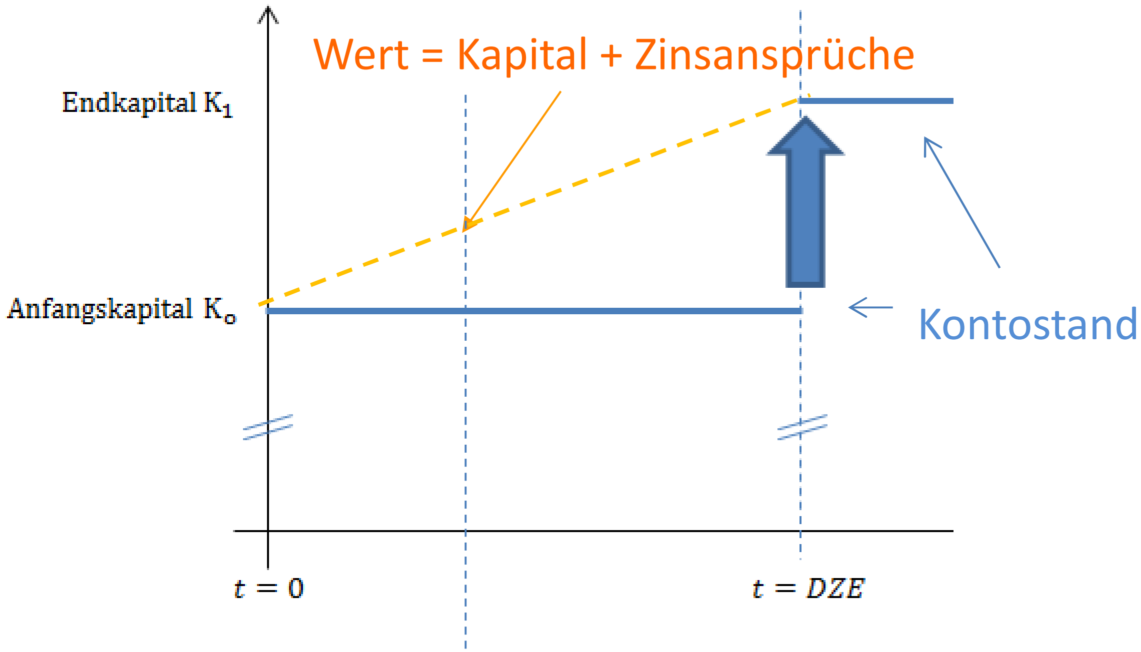
„Linear stetige Zinsmodell"

$K(t) = K_0 \cdot (1 + t \cdot p\%)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

1.2 Einfache Verzinsung

Anwendung: Sparbuch

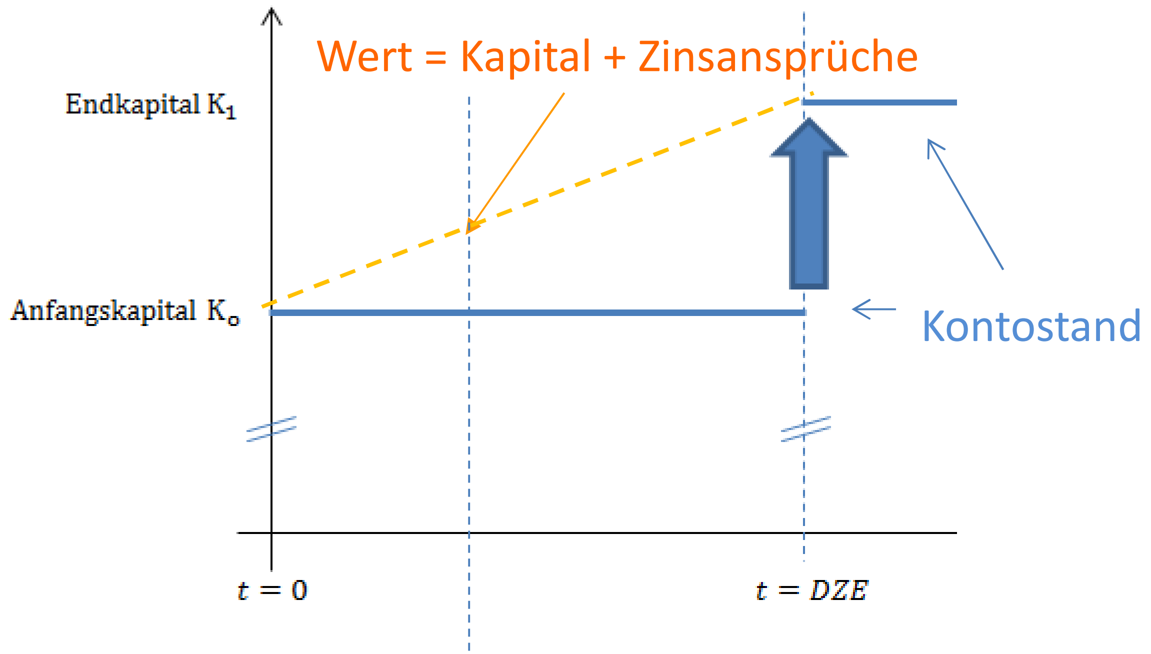
- Geld vermehrt sich in Sprüngen –



Was passiert in der Zwischenzeit ?

1.2 Einfache Verzinsung

Anwendung: Sparbuch



- Geradengleichung gesucht (es geht auch mit Mathematik!):
  $DZE = 1$, gegeben zwei Punkte: $(0\,;K_0)$ und $(1\,;\,K_1)$ mit $K_1 = K_0(1 + p\%)$

$$\frac{K_1 - K_0}{1 - 0} = \frac{K_t - K_0}{t - 0} \quad \Longrightarrow \quad K_t = K_0 \cdot (1 + tp\%)$$

1.2 Einfache Verzinsung

❖ **Aufgabe 1.12**

Ein Guthaben von 1.200 Euro wird zu einem Zinssatz von 4% p.a. festgelegt. Wie hoch ist der Wert der Anlage bei einfacher Verzinsung nach …

a) einem halben Jahr ?

b) einem viertel Jahr ?

c) einem Monat ?

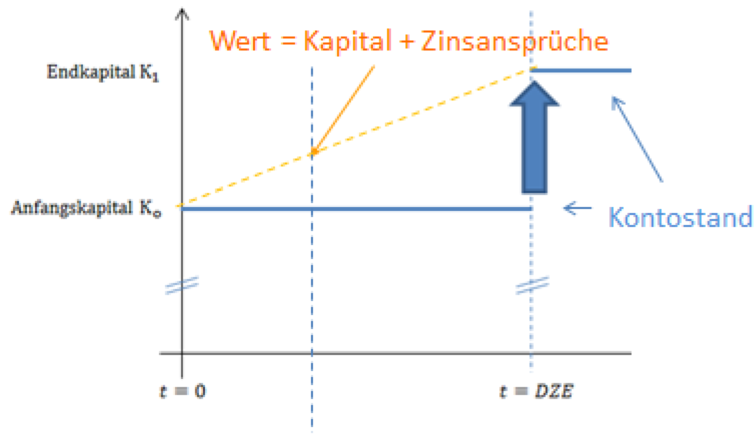
d) 7 Monaten ?

e) einem Jahr ?

Rechnen Sie mit [30/360]

Tafelbild

Was passiert in der Zwischenzeit ?



1.2 Einfache Verzinsung

Zusammenfassung:

Bei einfacher Verzinsung ergeben sich die Rendite und der Zinsbetrag direkt aus einem „Dreisatz“:

- Ist $i = p\%\, p.a.$ der zugrundeliegende Jahreszinssatz, dann ist nach einem Zeitraum t die Rendite $r = tp\%$

- Ist Z der Zinsbetrag, der in einem Jahr aufgelaufen ist, dann ist zum Zeitpunkt t das $t-$fache der Zinsen aufgelaufen.

…. und umgekehrt.

Beispiele:

- Rendite nach einem Jahr = 5% $\Rightarrow$ Rendite nach 8 Jahren = 40%
- Zinsbetrag nach 8 Jahren = 800 € $\Rightarrow$ Zinsbetrag nach 1 Jahren = 100 €

1.A Aufgaben

K(T)

❖ **Aufgabe 1.12 (f), (k)**

Ein Guthaben von 1.200 € wird zu einem Zinssatz von $4\%\ p.a.$ für einen bestimmten Zeitraum festgelegt. Wie hoch ist der Wert der Anlage nach

(f) 5 Jahren ?

(k) 50 Tagen für act/act [30/360]

Lösung:

(f) $K_5 = 1200\ € \cdot (1 + 5 \cdot 4\%) = 1440\ €, \qquad \mathrm{r} = 5 \cdot 4\% = 20\%$

(k) Zunächst muss der Zeitraum berechnet werden: $t = \frac{50}{360} = 0{,}13\overline{8}.$

$$K_t = 1200\ € \cdot (1 + 0{,}13\overline{8}. \cdot 4\%) = 1.206{,}67\ €$$

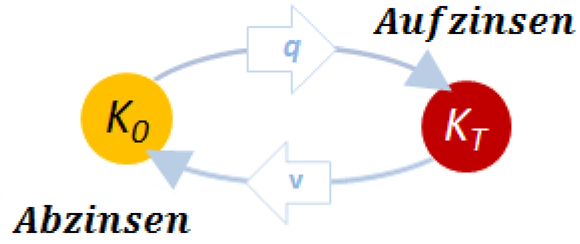
1.2 Einfache Verzinsung

- Formeln

Zins-Zeit-Modell		linear stetig
Zeitmessung in Jahren		$t \in \mathbb{R},\ T = \text{Laufzeitende}$
Zinsverrechnung		keine
$\boldsymbol{K(T)}$	**Future Value** of a single amount	$K(t) = K_0 \cdot (1 + tp\%)$
$\boldsymbol{K_0}$	**Current Value** of a single future amount at $\boldsymbol{T}$ **Kapitalwert = Barwert**	$\dfrac{K(t)}{1 + tp\%}$
$\boldsymbol{p\%\ p.a.}$	**Zinssatz p.a.**	$\dfrac{K(t)/K_o - 1}{t}$
$\boldsymbol{n\ \ bzw.\ \ T}$	**Laufzeit in Jahren**	$\dfrac{K(t)/K_o - 1}{p\%}$

1.2 Einfache Verzinsung

- Aufgaben



	K(T)	K_0	*i=p%*	*T*
K(T)		5.200,00 €	5.200,00 €	5.200,00 €
K_0	4.000,00 €		4.000,00 €	4.000,00 €
i = p%	*3%*	*3%*		*3%*
T	10	10	10	

Mögliche weitere Aufgabenstellungen:

- Gesamtrendite = ?
- Auf- und Abzinsfaktoren = ?
- Zinsertrag in € = ?

1.2 Einfache Verzinsung

- Anwendung: Unterjährige Zinsansprüche, Vorschusszinsen

- (Noch) nicht fällige Zinsbeträge werden Zinsansprüche (accrued interest = **angefallene Zinsen**) genannt.

- ***Innerhalb einer Zinsverrechnungsperiode*** (conversion period) werden im Allgemeinen die Zinsansprüche linear berechnet:

$$K(t) = K_0 \cdot (1 + tp\%) \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1, \text{ z.B. } \quad t = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{1}{12}, \quad \ldots$$

- Sie tragen natürlich zum aktuellen Wert der Anlage bei, können aber (noch) nicht ”realisiert“ werden.

- Es sei denn, …. wir verkaufen den Vertrag noch während der Laufzeit an einen Dritten. Der Verkäufer wird sicherlich eine Entschädigung dafür haben wollen, dass er das Geld vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Verkaufstag zur Verfügung gestellt hat bzw. die Zeit bis zur Verrechnung/Fälligkeit der Zinsen verkürzt ist.

1.2 Einfache Verzinsung

T

Wie viele Tage muss ich 10.000 € auf mein **Sparbuch (30/360)** mit 0,1% p.a. anlegen, damit ich am Jahresende 1 € Zinsen gutgeschrieben bekomme ?

- 36 Tage = 0,1 Jahre

K_0

Wieviel € muss ich 20 Tage auf mein **Sparbuch (30/360)** mit 0,1% p.a. einzahlen, damit ich am Jahresende 100 € Zinsen gutgeschrieben bekomme ?

- 1.800.000 €

1.2 Einfache Verzinsung

- Anwendung: DAX

Nachfolgend sei unterstellt, dass ein Börsenjahr aus $21 \cdot 12 = 252$ Handelstagen besteht.

Tagesrendite

- +0,85%
- +214,20% pro Jahr *)

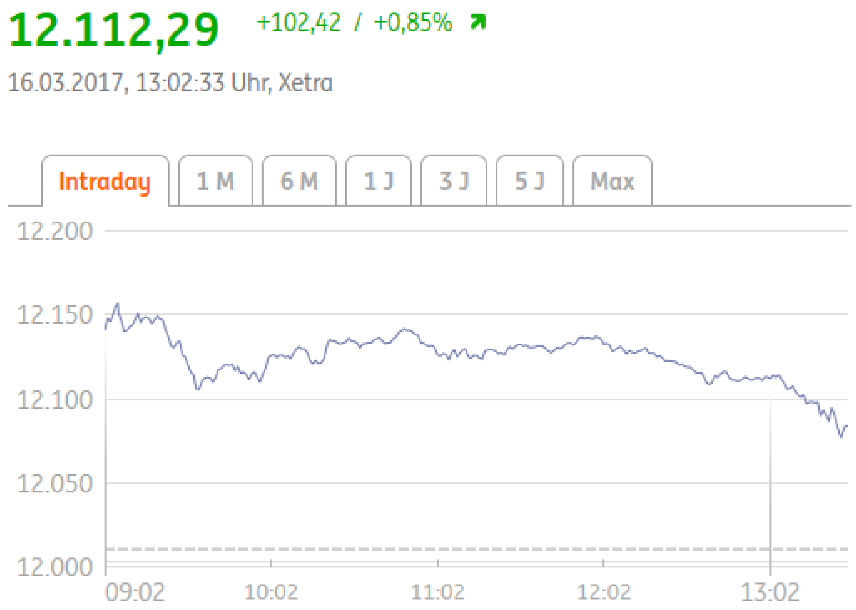
Monatsrendite

- +2,15%
- +0,1024% durchschnittlich/HTag *)

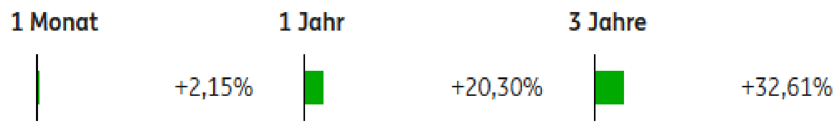
Jahresrendite

- +20,30%
- +0,0806% durchschnittlich/HTag *)

*) lineare ABSCHÄTZUNG , gerechnet mit 21/252



Wertentwicklung/Performance



1.2 Einfache Verzinsung

Anwendung: Anleihen

*) ABSCHÄTZUNG $i = p\% = \frac{K(t) - K_0}{tK_0} = \frac{r}{t}$

Anleihe	Nominal	20.000,00 €
		Konditionen
	Zinssatz p.a.	0,70%
	Kurs	**97%**
	Provision	1,5%
	Spesen	- €
	Laufzeit	20
		Zahlungen (summarisch)
Ertrag	Rückzahlungen (linear) = Nominal + Zinsen	22.800,00 €
Aufwand	Kaufpreis = Nominal*Kurs - Spesen, Provisonen etc.	19.700,00 €
		Renditebetrachtung
Gewinn/Verlust	Ertrag - Aufwand	3.100,00 €
Rendite	(Ertrag - Aufwand) / Aufwand	15,74%
"Jahreszins"	p% p.a. durchschnittlich/Jahr *)	0,79%

i = p%

1.2 Einfache Verzinsung

Anwendung: Darlehen

*) ABSCHÄTZUNG $i = p\% = \dfrac{K(t) - K_0}{tK_0} = \dfrac{r}{t}$

		Volksbank	Sparkasse
Darlehen	Nominal	80.000,00 €	80.000,00 €
		Konditionen	
	Zinssatz p.a.	6,50%	6,00%
	Disagio	**3%**	**5%**
	Provision	2%	1,50%
	Spesen	- €	100,00 €
	Laufzeit	5	6
		Zahlungen (summarisch)	
Ertrag	Auszahlung	76.000,00 €	74.700,00 €
Aufwand	Rückzahlungen an die Bank	106.000,00 €	108.800,00 €
		Renditebetrachtung	
Gewinn/Verlust	Ertrag - Aufwand	30.000,00 €	34.100,00 €
Rendite	(Ertrag - Aufwand) / Aufwand	39,47%	45,65%
"Jahreszins"	p% p.a. durchschnittlich/Jahr *)	7,89%	7,61%

$\boldsymbol{i = p\%}$

1.2 Einfache Verzinsung

T

Wie viele Tage muss ich 10.000 € auf mein Sparbuch mit 0,1% Zinsen anlegen, damit ich am Jahresende 3 € Zinsen gutgeschrieben bekomme ?

Lösung:

$$K(t) = K_A \cdot (1 + t \cdot 0{,}1\%)$$

$$K_A = 10.000\ €, \qquad K(t) = 10.003€$$

$$1{,}0003 = 1 + t \cdot 0{,}1\%$$

Aufgaben

❖ **Aufgabe 1.12 (f) (g)**

Ein Guthaben von 1.200 Euro wird zu einem Zinssatz von 4% p.a. für einen Zeitraum von 5 Jahren festgelegt. Wie hoch ist das Guthaben und die Rendite nach dieser Zeit?

Lösung: Wir entnehmen dem Text $K_o = 1200$; $p = 4$ und $t = 5$ Jahre.

(f) $K_5 = 1200\text{ €} \cdot (1 + 5 \cdot 4\%) = 1440\text{ €}$, $\quad \mathrm{r} = 5 \cdot 4\% = 20\%$

(g) **Zusätzliche Annahme**: Die Zinsen werden nicht ausgezahlt sondern der Anlage und deren Konditionen zugeschlagen. Das heißt im Folgejahr wird nicht nur das Kapital K_0 verzinst, sondern auch die bis dahin aufgelaufenen Zinsbeträge.

$$K_0 \to K_1 \to K_2 \to K_3 \to K_4 \to K_5$$

1.3 Zinsverrechnung + Zinseszins

Definition des „Zinseszins"-Gedankens:

- Zinserträge werden wieder angelegt und genau wie das ursprünglich eingesetzte Kapital verzinst.

$$K_1 := K_0 + Zinsen(K_0)$$

- In nächsten Jahr entstehen Zinsen nicht nur für das ursprünglich eingesetzte Kapital, sondern auch für die gutgeschriebenen Zinsen:

$$K_2 := K_1 + Zinsen(K_1) = K_1 + Zinsen(\,K_0 + Zinsen(K_0)\,)$$

1.3 Zinsverrechnung + Zinseszins

Was passiert also am Ende des 2. Jahres ?
Unser Konto weist jetzt folgenden Betrag aus:

$$K_2 \ := K_1 + \ Zinsen(K_1) \ = K_1 \cdot (1 \ + \ p\%) = K_0 \cdot (1 \ + \ p\%)^2$$

Die allgemeine Formel für den Kapitalwert (Kontostand) nach n Jahren lässt sich nun einfach herleiten, sie lautet:

„Exponentiell diskretes Zinsmodell“

$$K_n = \quad K_0 \cdot (1 + p\%)^n \quad mit\ n \in \mathbb{N}$$

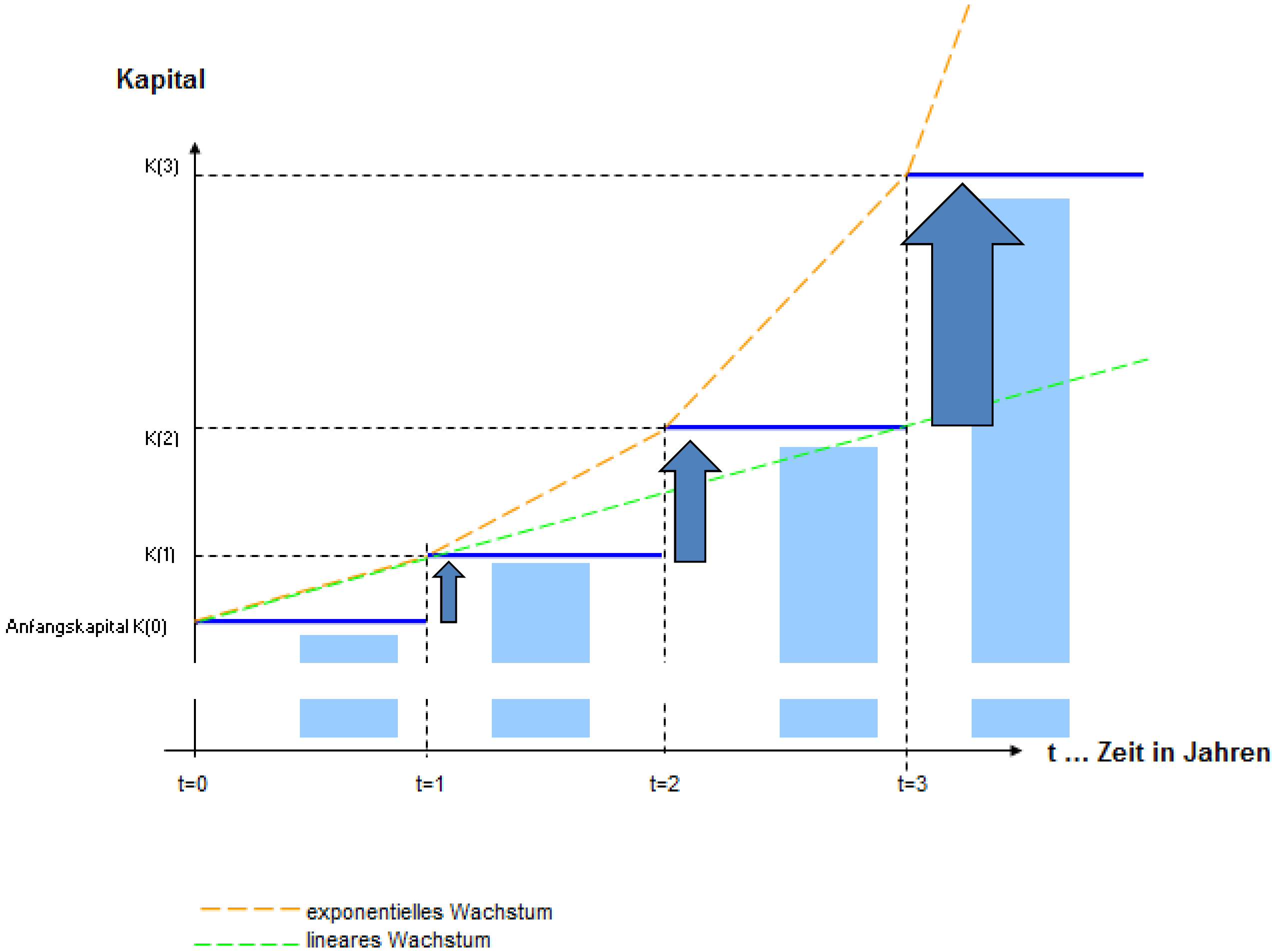
Beweis durch vollständige Induktion:

$$K_0 \xrightarrow{1+p\%} K_1 \xrightarrow{1+p\%} K_2 \xrightarrow{1+p\%} \ \dots \ \xrightarrow{1+p\%} K_{n-1} \xrightarrow{1+p\%} K_n \xrightarrow{1+p\%} K_{n+1}$$

$$K_{n+1} = \ K_n \cdot (1 \ + \ p\%) = K_0 \cdot (1 + p\%)^n \cdot (1 \ + \ p\%) = K_0 \cdot (1 + p\%)^{n+1}$$ q.e.d.

1.3 exponentielles (diskretes) Zinsmodell

Das Geld vermehrt sich in diesem Modell in Sprüngen.



1.3 Zinseszins – Formeln für jährliche Verrechnung

Kapitalwertentwicklung in Abhängigkeit von der Zeit bei einem Zins von $p\%$ p.a.

$K_n = K_0 \cdot (1+p\%)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ z.B. $n = 5, \dots, n = 1, n = 0$

Aufzinsfaktor p.a.

$$q = 1 + p\%$$

Anfangskapital = Barwert

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+p\%)^n} = \frac{K_n}{q^n}$$

Rendite

$$r = \frac{K_n - K_0}{K_0} = (1+p\%)^n - 1 = q^n - 1$$

- Zinssatz p.a. = effektive Jahresrendite
  Zinssatz effektiv % p.a.

$$i = p\% = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt[n]{1+r} - 1$$

Laufzeit

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+p\%)}$$

❖ **Formelsammlung +** ❖ **Aufgaben 1.12 + Internet**

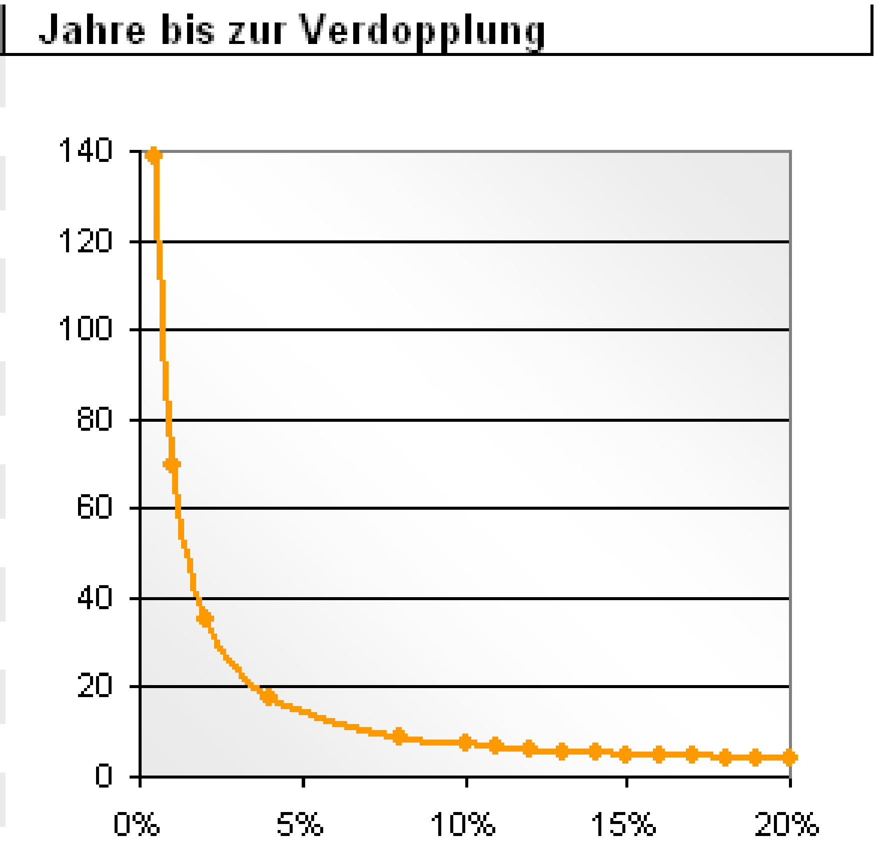
1.4 Verdopplung des Geldes

❖ **Aufgaben 1.9 – 1.11**

Nach wie viel Jahren hat sich mein Geld (Kapital) verdoppelt bei 2%; 4%; 8%; 10% Zinsen.

1.4 Verdopplung des Geldes

	Zinssatz	Jahre
Sparbuch	0,5%	139,0
	1%	69,7
Tagesgeld	2%	35,0
Kredite	4%	17,7
	8%	9,0
	10%	7,3
	11%	6,6
	12%	6,1
	13%	5,7
Dispokredit	14%	5,3
	15%	5,0
	16%	4,7
	17%	4,4
	18%	4,2
	19%	4,0
Finanzhaie	20%	3,8



1.5 PAngV Zinsmodell $(1 + X\%)^t$

Die Preisangabenverordnung enthält einen eigenen Paragraphen, der sich nur mit der Angabe der korrekten Angabe des Effektivzinses beschäftigt:

http://gesetze.juris.de/pangv/__6.html

„Der anzugebende effektive Jahreszins gemäß Absatz 1 ist mit der in der Anlage angegebenen mathematischen Formel … zu berechnen“

Berechnung des effektiven Jahreszinses

1. Grundgleichung zur Darstellung der Gleichheit zwischen Verbraucherdarlehens-Auszahlungsbeträgen einerseits und Rückzahlungen (Tilgung, Zinsen und Verbraucherdarlehenskosten) andererseits.
   Die nachstehende Gleichung zur Ermittlung des effektiven Jahreszinses drückt auf jährlicher Basis die rechnerische Gleichheit zwischen der Summe der Gegenwartswerte der in Anspruch genommenen Verbraucherdarlehens-Auszahlungsbeträge einerseits und der Summe der Gegenwartswerte der Rückzahlungen (Tilgung, Zinsen und Verbraucherdarlehenskosten) andererseits aus:

$$\sum_{k=1}^{m} C_k (1+X)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l (1+X)^{-s_l}$$

   Hierbei ist

   – X der effektive Jahreszins;
   – m die laufende Nummer des letzten Verbraucherdarlehens-Auszahlungsbetrags;
   – k die laufende Nummer eines Verbraucherdarlehens-Auszahlungsbetrags, wobei $1 \leq k \leq m$;
   – C_k die Höhe des Verbraucherdarlehens-Auszahlungsbetrags mit der Nummer k;
   – t_k der in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückte Zeitraum zwischen der ersten Verbraucherdarlehensvergabe und dem Zeitpunkt der einzelnen nachfolgenden in Anspruch genommenen Verbraucherdarlehens-Auszahlungsbeträge, wobei $t_1 = 0$;
   – m´ die laufende Nummer der letzten Tilgungs-, Zins- oder Kostenzahlung;
   – l die laufende Nummer einer Tilgungs-, Zins- oder Kostenzahlung;
   – D_l der Betrag einer Tilgungs-, Zins- oder Kostenzahlung;
   – s_l der in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückte Zeitraum zwischen dem Zeitpunkt der Inanspruchnahme des ersten Verbraucherdarlehens-Auszahlungsbetrags und dem Zeitpunkt jeder einzelnen Tilgungs-, Zins- oder Kostenzahlung.

1.5 PAngV & Zeit $\quad (1 + X\%)^t$

- **Preisangabenverordnung (PAngV) - Anlage (zu § 6)**

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \cdot (1 + X\%)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l \cdot (1 + X\%)^{-s_l}$$

Betrachten wir die möglichen Zeitpunkte in der Formel genauer:

t_k, s_l der in Jahren oder in **Jahresbruchteilen** ausgedrückte Zeitraum bis zur Zahlung C_k bzw. D_l ….. , wobei $t_1 = 0$.

Insbesondere können die Zeitpunkte jetzt wie im linearen Modell gewählt werden

$t \geq 0,$ z.B. $t = 5, \dots, t = 1, \dots \textit{aber auch } t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{1}{4}, \; t = \frac{1}{12}, \quad \dots$

d.h. sie sind jetzt nicht mehr nur auf ganze Zahlen beschränkt.

1.5 PAngV & Zeit $(1+X\%)^t$

- **Preisangabenverordnung (PAngV) - Anlage (zu § 6)**

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \cdot (1+p\%)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l \cdot (1+p\%)^{-s_l}$$

Betrachten wir eine einzelne Zahlung von 1.000€ zum Zeitpunkt $t_k = \frac{1}{2}$.
Für unser Beispiel sei $i = 3\%$.
Jede einzelne Zahlung wird - gemäß PAngV – exponentiell auf ihren Barwert abgezinst:

$$C(0) = 1.000\ € \cdot (1+3\%)^{-\frac{1}{2}} = 985{,}33\ €$$

oder m.a.W.: Jedem einzelnen Betrag wird folgende Kapitalwertentwicklung unterstellt:

$$C_k(t) = 985{,}33\ € \cdot (1+p\%)^t$$

MERKE:
PAngV ist eine Verallgemeinerung des Zinseszinsmodells mit jährlicher Zinsverrechnung. Die Einschränkung auf natürliche Zahlen wird fallengelassen.
Für ganze Jahre $t = n \in \mathbb{N}$ stimmen die Werte überein.

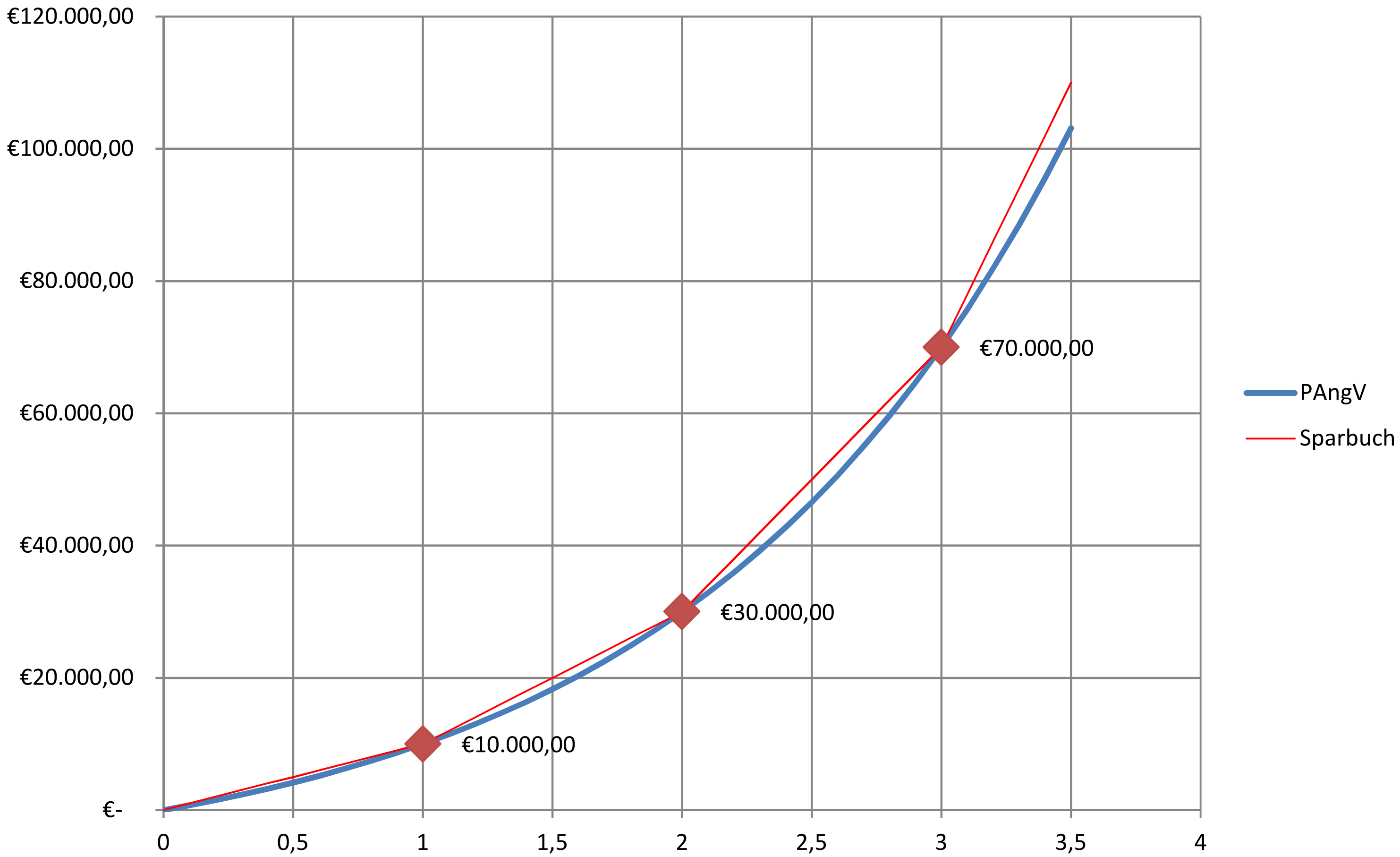
1.5 PAngV - DayCount Convention

Anmerkung c)

Der Zeitraum zwischen diesen Zeitpunkten wird in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückt. Zugrunde gelegt werden für ein Jahr 365 Tage (bzw. für ein Schaltjahr 366 Tage), 52 Wochen oder zwölf Standardmonate. Ein Standardmonat hat 30,41666 Tage (d. h. 365/12), unabhängig davon, ob es sich um ein Schaltjahr handelt oder nicht.
Können die Zeiträume zwischen den in den Berechnungen verwendeten Zeitpunkten nicht als ganze Zahl von Wochen, Monaten oder Jahren ausgedrückt werden, so sind sie als ganze Zahl eines dieser Zeitabschnitte in Kombination mit einer Anzahl von Tagen auszudrücken. Bei der Verwendung von Tagen

aa) werden alle Tage einschließlich Wochenenden und Feiertagen gezählt;
bb) werden gleich lange Zeitabschnitte und dann Tage bis zur Inanspruchnahme des ersten Verbraucherdarlehensbetrags zurückgezählt;
cc) wird die Länge des in Tagen bemessenen Zeitabschnitts ohne den ersten und einschließlich des letzten Tages berechnet und in Jahren ausgedrückt, indem dieser Zeitabschnitt durch die Anzahl von Tagen des gesamten Jahres (365 oder 366 Tage), zurückgezählt ab dem letzten Tag bis zum gleichen Tag des Vorjahres, geteilt wird.

Zinsen / Zinsansprüche



… Let‘s have a break ….

1.5 PAngV

- Standard Formeln

Zins-Zeit-Modell Typ		stetig exponentiell
Zeitmessung in Jahren		$t \in \mathbb{R},\ T = \text{Laufzeitende}$
Zinsverrechnung		jährlich
$\boldsymbol{K(T)}$	**Future Value** of a single amount	$K(t) = K_0 \cdot (1 + X\%)^t$
$\boldsymbol{K_0}$	**Current Value** of a single future amount at $\boldsymbol{T}$ **Kapitalwert = Barwert**	$\dfrac{K(t)}{(1 + X\%)^T}$
$\boldsymbol{X\%\ p.a.}$	**Zinssatz p.a.**	$\sqrt[T]{K(t)/K_o} - 1$
$\boldsymbol{n \quad bzw. \quad T}$	**Laufzeit in Jahren**	$\dfrac{\ln(K(t)/K_o)}{ln(1 + p\%)}$

1.5 PAngV

- Kennzahlen / Formeln

$r := \frac{K(T)}{K_o} - 1$	**Gesamtrendite**	$(1 + p\%)^T - 1$
$\frac{r}{T}$	**durchschnittliche Jahresrendite**	$\frac{(1 + p\%)^T - 1}{T}$
i_{eff}	**effektiver Jahreszins**	$\sqrt[T]{K(T)/K_o} - 1 = X\%$

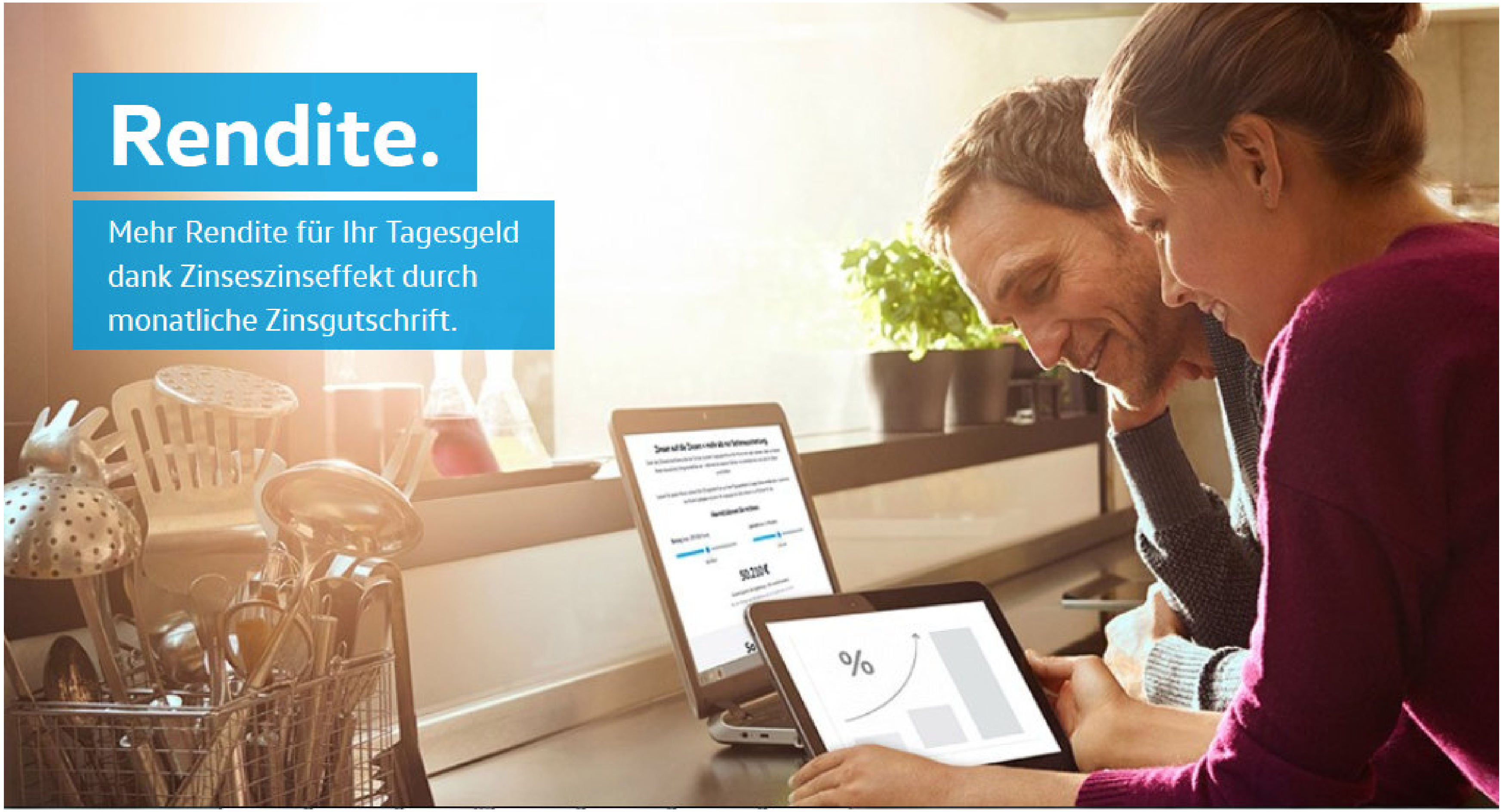
1.5 PAngV

- Aufgabe

Gegeben \ Gesucht	$K(T)$	K_0	$i=X\%$	T
$K(T)$	5.056,69 €	5.056,69 €	5.056,69 €	5.056,69 €
K_0	4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €
$i = X\%$ p.a.	*4,8%*	*4,8%*	*4,8%*	*4,8%*
T	5	5	5	5

r	*26,42%*	$r_{\varnothing}$	*5,28%*
r_{log}	*23,44%*	$r_{\varnothing log}$	*4,69%*
		i_{eff}	*4,80%*

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift



1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift

Was ist mit Zinsverrechnung oder Zinsgutschrift gemeint?

- Auf einem normalen **Sparbuch** bekommen wir erst zu Beginn des nächsten Jahres die Zinsen für das vergangene Jahr gutgeschrieben

- Im Internet kann man Angebote von anderen Banken finden.
  Z.B. unter den Stichwort „**Tagesgeld**“

Tagesgeld Anbieter		Zinsen p.a.	Zins gültig bis Einlage	Datum	Zinsgutschrift
		Testsieger mit fairsten Konditionen für			
	AXA Bank	2,30%	500.000,- Euro	31.01.2011	zum 31.12.
	Bank of Scotland	2,20%	500.000,- Euro	bis auf Weiteres*	zum 31.12.
			Weitere Empfehlungen d		
	ING-DiBa	2,00%	ohne Begrenzung	6 Monate	zum 31.12.
	VW Bank	2,00%	20.000,- Euro	01.04.2011	monatl.
	Postbank	1,80%	ohne Begrenzung	bis auf Weiteres*	zum 31.12.
				Depots mit Tagesge	
	Cortal Consors	4,00%	20.000,- Euro	12 Monate	viertel-jährlich
	DAB Bank	3,10%	7.000,- Euro	30.06.2011	viertel-jährlich
	S Broker	1,50%	500.000,- Euro	bis auf Weiteres*	viertel-jährlich

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift

Betrachten wir jetzt das folgende Angebot

Beispiel aus dem Internet

Zinsen p.a.	Zins gültig bis		Zinsgut-schrift
	Einlage	Datum	
4,00%	20.000,- Euro	12 Monate	viertel-jährlich

❖ **Aufgabe 1.13**

Das anfängliches Kapital $K_0 = 20.000$ € erhöht sich zum Zeitpunkt der Zinsverrechnung (hier: nach einem Vierteljahr) um 1% und ebenso in den nachfolgenden Quartalen.

$$K_{t=0} \xrightarrow{1+\,1\%} K_{t={}^{1}/_{4}} \xrightarrow{1+\,1\%} K_{t={}^{2}/_{4}} \xrightarrow{1+1\%} K_{t={}^{3}/_{4}} \xrightarrow{1+1\%} K_{t=1}$$

Wieviel € erhalte ich am Ende des Jahres ?

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift

Mehr Rendite
dank Zinseszinseffekt durch
vierteljährliche Zinsgutschrift

Aufgabe 1.13

Lösung

Auch hier können wir den Zinseszins-Effekt beobachten

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + 1\%)^4 = 20.000\,€ \cdot 1{,}01^4 = 20.812{,}08\,€$$

Im Vergleich zu einem Sparbuch, das uns ebenfalls 4% Zinsen verspricht, bedeutet dies ein Vorteil von 12,08 EUR pro Jahr.

Für das Sparbuch hätten wir folgendes rechnen müssen:

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + p\%) = 20.000\,€ \cdot 1{,}04 = 20.800{,}00\,€$$

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung

Geld vermehrt sich von selbst: je mehr - desto mehr man hat.

Definition des „Zinseszins"-Gedankens:

- Ein Kapital K_0 wird zu einem Jahreszins $p\%$ $p.a.$ für eine Laufzeit von n Jahren angelegt und pro Jahr finden m Zinsverrechnungen statt.
- Die Anzahl der Perioden in der Gesamtlaufzeit ist das Produkt aus der Anzahl der Perioden /Jahr mal die Anzahl der Jahre:

$$n \cdot m \in \mathbb{N}$$

- Jeweils am Periodenende werden die Zinsen Z gemäß dem anteiligen Jahreszins berechnet und auf das bisherige Kapital addiert.
- In der Folgeperiode wird das neue Kapital $K_0 + Z$ komplett wieder angelegt.
- Das heißt, in der Folgeperiode werden Zinsen sowohl für das ursprüngliche Kapital K_0 als auch für die angefallenen Zinsen Z der Vorperiode berechnet.
- Wieder gilt: Die Zinsen werden finanztechnisch und vertraglich genauso behandelt wie das ursprünglich eingezahlte Kapital.

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift

Sei $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Perioden im Jahr, d.h. es gibt m Zinsverrechnungszeitpunkte pro Jahr und der anteilige Jahreszins ist gleich $\frac{p\%}{m}$. Dann kann die folgende Formel angewendet werden, um die Höhe des Kapitals in den folgenden Jahren zu berechnen:

„Exponentiell diskretes Zinsmodell"

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^m \quad \text{und} \quad K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{mn} \quad \text{für } m, mn \in \mathbb{N}$$

- Der vertraglich festgelegte Jahreszins wird ***Nominalzins*** oder auch Sollzins genannt

$$p_{NOM}\% := \; p\%\, p.a.$$

- Der Zeitraum zwischen zwei Zinsverrechnungsterminen wird ***Conversion Period (CP)*** genannt.
- Der an die CP angepasste anteilige Jahreszins $p_{REL}\% := \frac{p\%}{m}$ heißt ***relativer Periodenzins*** (oder einfach nur kurz Periodenzins).

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift – Jahresrendite = Effektivzins

Zu Nominalzins und Periodenzins kommt jetzt noch ein dritter Zins hinzu, der sogenannte ***jährliche Effektivzins*** (oder effektiver Jahreszins, kurz „Effektivzins p.a.“).

Der Effektivzins ist nichts anderes als die Jahresrendite:

Aufgabe 1.13 - Fortsetzung
Die anfänglichen 20.000 € haben nach einem Jahr einen Ertrag von 20.812,08 € erbracht:

$$K_1 = Ko \cdot (1 + 1\%)^4 = 20.000 € \cdot 1{,}01^4 = 20.812{,}08 €$$

Frage: Welche (Jahres-) Rendite hat man damit realisiert ?

Lösung:

$$Rendite = \frac{Ertrag - Aufwand}{Aufwand} = \frac{Gewinn\ bzw. Verlust}{Aufwand}$$

Hier:

$$\frac{812{,}08 €}{20.000 €} = 0{,}040604 = 4{,}0604\%$$

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift - Effektivzins

- Bei unterjähriger Zinsverrechnung ist die auf das Jahr hochgerechnete Rendite immer höher als auf einem Anlagekonto mit jährlicher Verrechnung.

Die effektive Jahresrendite einer Anlageform mit unterjähriger Verrechnung wird oft als „**effektiver Jahreszins**“ bezeichnet:

$$p_{EFF}\% = \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^m - 1$$

Und tatsächlich gilt:

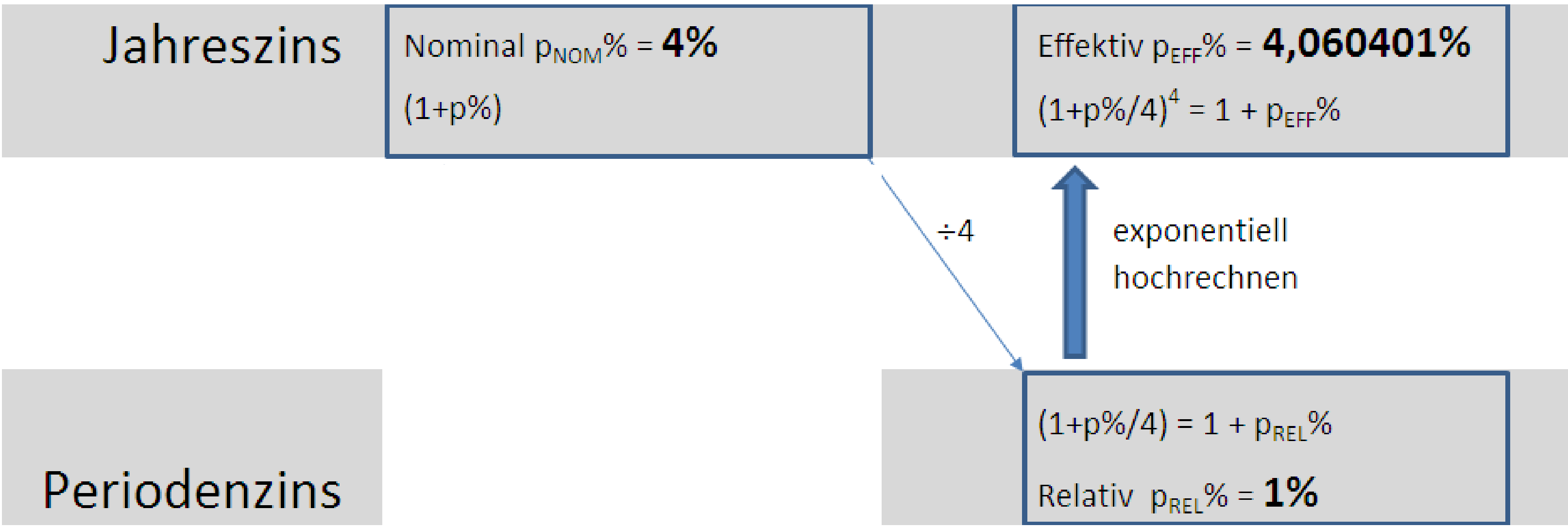
Mehr Rendite
dank Zinseszinseffekt durch
unterjährige Zinsgutschrift

1.6 Beispiel aus dem Internet

Zurück zu unserem Beispiel aus dem Internet:

Zinsen p.a.	Zins gültig bis Einlage	Zins gültig bis Datum	Zinsgut-schrift
4,00%	20.000,- Euro	12 Monate	viertel-jährlich

Hier erhalten wir folgendes Bild:



1.6 Unterjährige Zinsverrechnung

- Anwendung: DAX

Nachfolgend sei unterstellt, dass ein Börsenjahr aus $21 \cdot 12 = 252$ Handelstagen besteht.

Tagesrendite = effektiver Tageszins

- +0,85%
- 843,97% pro Jahr *)

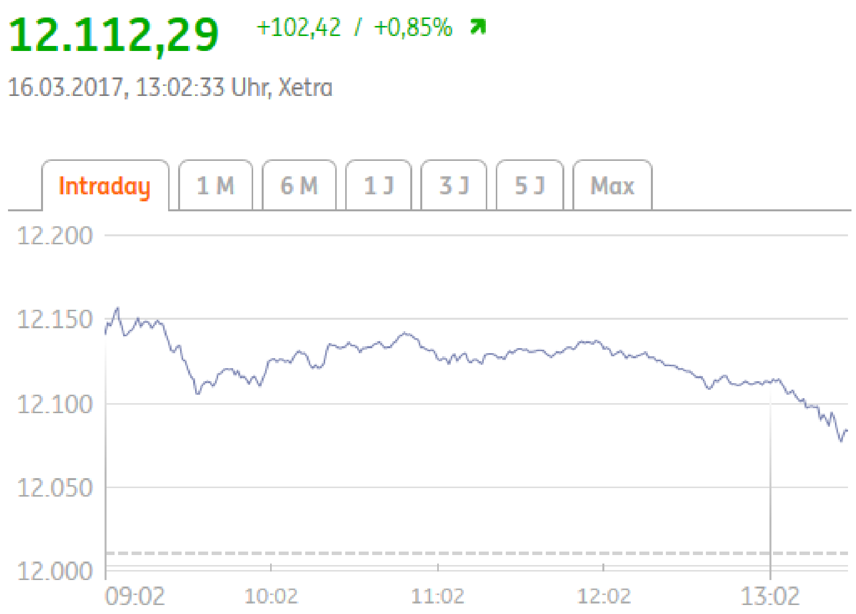
Monatsrendite

- +2,15%
- +0,1013% durchschnittlich/HTag *)

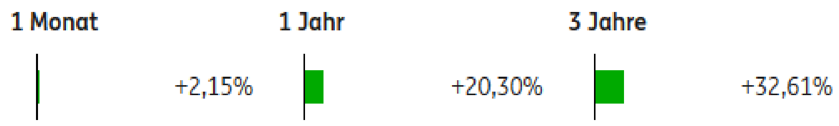
Jahresrendite

- +20,30%
- +0,0734% durchschnittlich/HTag *)

*) exponentielle HOCH/RUNTERRECHNUNG,
gerechnet mit 21/252



Wertentwicklung/Performance



1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift – Allgemeine Aufgabenstellung

Was muss man rechnen, wenn die Laufzeit sich über mehrere Jahre erstreckt?

Ein Kapital von 10.000 € wird auf einem **Konto mit vierteljährlicher Zinsverrechnung** bei ein Zinssatz von 3% p.a. für 1,5 Jahre angelegt.
(a) Wie hoch ist das Kapital am Ende der Laufzeit ?
(b) Welche Jahresrendite wird erzielt ?

Lösung:

1. Anzahl M der Perioden bestimmen $M = m \cdot n = 4 \cdot 1{,}5 = 6$
2. Periodenzins bestimmen $p_{REL} = \frac{p\%}{4} = 0{,}75\%$
3. Modell auswählen $K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p\%}{m})^M$
4. Werte einsetzen $K_{1,5} = 10.000 \cdot 1{,}0075^6$
5. Mit dem Taschenrechner ausrechnen: $K_{1,5} = 10.458{,}5224$
6. Antwort: Das Guthaben auf den Konto wird sich auf 10.458,52 € belaufen.

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift - Effektivzins

Was muss man rechnen, wenn die Laufzeit sich über mehrere Jahre erstreckt?

Ein Kapital von 10.000 € wird auf einem Konto mit vierteljährlicher Zinsverrechnung bei ein Zinssatz von 3% p.a. für 1,5 Jahre angelegt.
(b) Welche effektive Jahresrendite wird dabei erzielt ?

Lösung: Dazu können wir die Formel $p_{EFF}\% = \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^m - 1$ verwenden,
oder das Ergebnis von (a) nutzen:

$$p_{EFF}\% = m \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$$

Mit $m = 4$ und $n = 1{,}5$ ergibt sich in beiden Fällen:

$$p_{EFF}\% = 3{,}034\%$$

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung/ Zinsgutschrift - Effektivzins

Zwei Formeln
Die beiden Formeln können genutzt werden in Abhängigkeit davon, welche Werte in der Aufgabenstellung gegeben sind:

$$p_{EFF}\% \;=\; \left(1+\frac{p\%}{m}\right)^{m} - 1 \;=\; \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Beweis:
Aus der Kapitalwertentwicklungsformel ergibt sich $\frac{K_n}{K_0} = (1+\frac{p\%}{m})^{nm} = \;(\mathbf{1}+\boldsymbol{X}\%)^{\boldsymbol{n}}$

Zieht man die n-te Wurzel erhält man das gewünschte Ergebnis:

$$\boldsymbol{X}\% = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \left(1+\frac{p\%}{m}\right)^{m} - 1$$

Aufgaben

K(T)

❖ **Aufgabe 1.12 (h), (j)**

Ein Guthaben von 1.200 Euro wird zu einem Zinssatz von 4% p.a. für einen Zeitraum von 5 Jahren [70 Quartale] angelegt. Die Zinsen werden vierteljährlich-nachträglich berechnet und gutgeschrieben.

Wie hoch ist der Wert der Anlage nach dieser Zeit?

Lösung: $K_0 \rightarrow K_{t=1/4} = K_0 \cdot (1 + 1\%)$

$$K_5 = K_0 \cdot (1 + 1\%)^{20} = 1.464{,}228048$$

$$[\ K_5 = K_0 \cdot (1 + 1\%)^{70} = 2.408{,}116042 \approx 2 \cdot K_0\ ]$$

Der Wert der Anlage beträgt 1.464,23 € [2.408,12 €].

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung
- Formeln

Kapitalwertentwicklung (Kontostand) in Abhängigkeit von der Zeit bei einem Zins von $i = p\%$ p.a.

$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{nm}$ mit $n \in \mathbb{N}$ in Jahren und $m \in \mathbb{N}$ der Anzahl der Perioden pro Jahr

- Relativer **Periodenzins**

$$p_{REL}\% = \frac{p\%}{m} = \sqrt[nm]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Nominalzins

$$p\% = m \cdot \left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$$

- **Effektive** Jahresrendite (Effektivzins)

$$\boldsymbol{X}\% = p_{EFF}\% = (1 + p_{REL}\%)^m - 1 = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$$

- Aufzinsfaktor (je Periode) $q_{REL} = 1 + p_{REL}\%$
- Anfangskapital = Barwert

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + p_{REL}\%)^{nm}} = \frac{K_n}{q_{REL}{}^{nm}}$$

- Rendite

$$r = \frac{K_n - K_0}{K_0} = (1 + p_{REL}\%)^{nm} - 1$$

- Laufzeit

$$n = \frac{1}{m} \cdot \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1 + p_{REL}\%)}$$

❖ **Formelsammlung +**
❖ **Aufgaben 1.12**
❖ **Internet**

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung
- Standard Formeln

Zins-Zeit-Modell Typ	diskret exponentiell
n Jahre Laufzeit mit m Perioden pro Jahr	$n \in \mathbb{R} : m, nm \in \mathbb{N}$
Zinsverrechnung	m-fach, periodisch

$\boldsymbol{K_n}$	**Future Value** of a single amount	$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{nm}$
$\boldsymbol{K_0}$	**Current Value** of a single future amount at $\boldsymbol{T}$ **Kapitalwert = Barwert**	$K_0 = K_n \cdot \left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{-nm}$
$\boldsymbol{p\%\ p.a.}$	**Zinssatz p.a.**	$m \cdot (\sqrt[m \cdot n]{K_n/K_o} - 1)$
$\boldsymbol{n}$	**Laufzeit in Jahren**	$\dfrac{ln(K_n/K_o)}{m \cdot ln\left(1 + \frac{p\%}{m}\right)}$

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung

- Kennzahlen / Formeln

$\boldsymbol{r := \frac{K(T)}{K_o} - 1}$	**Gesamtrendite**	$\left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{mn} - 1$
$\boldsymbol{\frac{r}{n}}$	**durchschnittliche Jahresrendite**	$\frac{\left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{mn} - 1}{n}$
$\boldsymbol{i_{eff}}$	**effektiver Jahreszins**	$\left(1 + \frac{p\%}{m}\right)^{m} - 1 = \sqrt[\cdot n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$

1.6 Unterjährige Zinsverrechnung
- Aufgabe

mit m = 12, d.h. monatliche Zinsverrechnung

Gegeben \ Gesucht	K_n	K_0	$i = p\%$	T
K_n	5.082,56 €	5.082,56 €	5.082,56 €	5.082,56 €
K_0	4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €	4.000,00 €
$i = p\%$	*4,8%*	*4,8%*	*4,8%*	*4,8%*
T	5	5	5	5

r	*27,06%*	$r_{\varnothing}$	*5,41%*
r_{log}	*23,95%*	$r_{\varnothing log}$	*4,79%*
		i_{eff}	*4,91%*

Finanzmathematik

- Hausaufgabe
  - Formelsammlung → Taschenrechner
  - Glossar
  - Aufgabe erstellen → Übungsklausuraufgabe
  - Aufgaben Rechnen
  - Internetrecherche

Finanzmathematik

Zinsen auf Einmalzahlungen

- ☑ Geld & Zeit = Zinsen
- ☑ Klassische Zinsmodelle
- – Eulermodell
- – Logarithmische Rendite

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit